NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 77, julio de 2011, páginas 75–83

El infinito en matemáticas

Ramón Sebastián Salat Figols (Escuela Superior de Física y Matemáticas, IPN. México)

Fecha de recepción: 31 de agosto de 2010
Fecha de aceptación: 9 de marzo de 2011

Resumen En este trabajo se presenta la evolución del concepto de infinito y algunas relaciones con otros desarrollos de las matemáticas. También presento el hecho de que de varios axiomas intuitivos podemos obtener proposiciones que ya no nos resultan tan evidentes; esto se sustenta con datos experimentales. Discuto la relación entre la igualdad 0.999...=1 y el concepto de infinito; y la posibilidad de usar el concepto de infinitesimal en Cálculo. A partir de esta información, presento algunas consideraciones de importancia para la didáctica de las matemáticas.

Palabras clave Infinito, cálculo, infinitesimal.

Abstract In this work I present the evolution of infinite concept and some relations with other developments of mathematics. Also, I show the fact of that of several intuitive axioms we can obtain propositions which aren't evident to us; this is supported by empirical data; I discuss the relation of the equality 0.999...=1 and the concept of infinite; and the possibility to use the concept of infinitesimal in Calculus. From this information, I present some remarks of importance for the didactics of mathematics.

Keywords Infinite, calculus, infinitesimal.

1. Introducción

Desde la antigua Grecia, Aristóteles (1995, 384-322 A.C.) ve al infinito como una fuente de contradicción. Esta visión persiste con Galileo, aunque éste reconoce por primera vez un hecho importante: que en los conjuntos infinitos, a diferencia de los finitos, un subconjunto propio puede tener la misma cantidad de elementos que el conjunto. Y establece el hecho por medio del concepto de biyección. Esta idea es clave en el desarrollo de la Aritmética de los Números Transfinitos de George Cantor (1995, 1851). Esta teoría, la paradoja de Russell (1902) y la aparición de la axiomática formal de Hilbert, entre otros factores, conducen al logicismo, al intuicionismo y al formalismo, tres corrientes que surgen en un esfuerzo por fundamentar la Matemática.

Por otro lado, los estudiantes, antes de estudiar los conceptos de Cantor, tienden a aplicar el principio de que un conjunto siempre es mayor que cualquier subconjunto propio, válido para conjuntos finitos, a conjuntos infinitos.

Un hecho importante dentro del método deductivo es que un conjunto de axiomas que pueden resultar intuitivos, producen teoremas que ya no resultan tan evidentes. Cuando esto ocurre es el momento de dejar de confiar de manera irrestricta en la intuición y ser más estrictos en procurar la validez de los métodos usados en la deducción. Esta evolución en el pensamiento matemático que se da en la historia, tendrá que darse también en los alumnos que piensen estudiar a la Matemática por sí misma, más allá de sus aplicaciones.

Primero se presentará una breve reseña histórica, en la que se verán aspectos tales como el surgimiento de la definición de conjunto infinito, basada en la idea de que para los conjuntos infinitos existen subconjuntos propios que pueden ponerse en correspondencia biunívoca con él mismo; los conceptos de números infinitamente grandes y pequeños. Después se verá que dos segmentos, aún cuando tengan diferente longitud, tienen el mismo número de puntos y la cuestión de la igualdad $0.999... = 1$. Finalmente, se presentarán las respuestas que dan los estudiantes a varias preguntas tratando de obtener información acerca de qué piensan ellos acerca del infinito.

2. La historia en breve

Aristóteles (1995, 384-322 A.C), afirma que la teoría del infinito conduce a consecuencias imposibles, tanto si se supone que existe, como si se supone que no existe. Distingue entre el infinito potencial y el infinito realizado o en acto. Y en Metafísica (209, 384-322 A.C.), afirma que el infinito no puede existir en acto, es decir, que no existe el infinito realizado.

En Consideraciones y Demostraciones Matemáticas sobre dos Nuevas Ciencias, Galileo (1981, 1638), en uno de los diálogos entre Simplicio y Salviati, Simplicio señala que un segmento mayor que otro tiene una cantidad de puntos infinita mayor que la cantidad infinita de puntos del otro segmento, lo cual resulta difícil de comprender. Salviati responde que la confusión procede de aplicar a cantidades infinitas conceptos que se aplican a cantidades finitas; es decir, a las cantidades infinitas no se les puede aplicar los conceptos de mayor que, ni menor que. Salviati también propone el ejemplo de los números naturales cuadrados perfectos, los que son iguales al cuadrado de otro. Salviati plantea a Simplicio, que en principio hay más números naturales que cuadrados, pero después le hace ver que hay la misma cantidad, ya que existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de los números cuadrados y el conjunto de todos los números naturales, y plantea que de ésta aparente contradicción se deduce que la cantidad de números cuadrados y de sus raíces son infinitos. Galileo (1981, 1638) emplea la posibilidad de establecer una biyección entre un conjunto y un subconjunto propio del mismo como un modo de saber si el conjunto es infinito; pero interpreta a la existencia de esta biyección como una contradicción.

Bolzano (1995, 1851) afirma que una característica de los conjuntos infinitos es que los elementos del conjunto pueden ponerse en correspondencia biunívoca con los elementos de un subconjunto propio de él mismo y lo ilustra con varios ejemplos. Uno de ellos hace referencia a la ecuación $5y = 12x$ y afirma que si y es una cantidad entre 0 y 12, entonces x es una cantidad entre 0 y 5; y viceversa, si x es una cantidad entre 0 y 5, entonces y es una cantidad entre 0 y 12.

Cantor (1955), en 1895 da a conocer su teoría de los números transfinitos, revolucionando el concepto del infinito en la Matemática. Parecía que el infinito por fin había sido controlado por el raciocinio humano. Russell (1902), en una carta dirigida a Fregue plantea la siguiente paradoja: sea el conjunto A de todos los conjuntos que no pertenecen a sí mismo, esto es, $A = \{x \mid x \notin x\}$, ¿$A$ pertenece a sí mismo o no? Si $A \in A$, entonces, por definición de A, se obtiene que $A \notin A$, o sea, se obtiene una contradicción; si $A \notin A$, por definición, $A \in A$, nuevamente se obtiene una contradicción. Esta paradoja pone en tela de juicio la noción de conjunto o colección utilizada por Cantor en su teoría de los números transfinitos. Las paradojas son importantes porque, según la lógica clásica, de una contradicción puede deducirse cualquier proposición (Irvine, 2009).

David Hilbert (1967, 1926) afirma que el infinito no lo encontramos en la realidad; argumenta su observación partiendo de la Física del mundo microscópico (Mecánica Cuántica), en cuanto a la imposibilidad de dividir la materia indefinidamente y de la Astronomía en cuanto a la finitud del espacio por consideraciones geométricas. Y continúa afirmando que el infinito puede ser un concepto necesario en nuestro pensamiento, aunque no exista en la realidad. También señala que la inferencia lógica solamente ha fallado cuando se aplica a conceptos abstractos como los que se refieren a conjuntos infinitos. Propone una fundamentación de la Matemática, que pretende librarla de posibles contradicciones. Se inicia una discusión acerca de la formalización de la Matemática. Queda a discusión la validez del principio del tercero excluido y como consecuencia, está también a discusión la validez del procedimiento de demostración conocido como reducción al absurdo.

La Matemática además de tratar con el infinito a través de la cardinalidad de los conjuntos, también lo hace al considerar magnitudes infinitamente pequeñas e infinitamente grandes. Las cantidades infinitamente pequeñas se usaron en los primeros desarrollos del Cálculo, aunque no estaban definidos con precisión. Un infinitesimal positivo i puede definirse como aquel que cumple con $0 < i < r$, para cualquier número real positivo r. La existencia de infinitesimales está íntimamente relacionada con la propiedad arquimediana, que dice que para cualquier número real positivo a, existe un número natural n, tal que $a < n$. Como el conjunto de los números reales satisface la propiedad arquimediana no puede tener infinitesimales. En general, para que un cuerpo ordenado pueda tener infinitesimales debe ser no arquimediano.

Un ejemplo de un cuerpo no arquimediano lo encontramos en Hilbert (1902), en su Fundamentación de la Geometría, en el cual hay elementos infinitesimales e infinitamente grandes; esto es, con la intención de probar la independencia de la propiedad arquimediana del resto de los axiomas de cuerpo, en el contexto de una aritmética con segmentos. Imaz (2001), presenta un ejemplo sencillo de un cuerpo no arquimediano y una introducción acerca de cómo puede usarse éste en el ámbito del Cálculo. Con la existencia de modelos para cuerpos no arquimedianos, el infinitesimal deja de ser un objeto sujeto a las contradicciones que le eran propias en los inicios del Cálculo. Finalmente, la fundamentación del Cálculo usando un cuerpo no arquimediano y por lo tanto, en el que no vale la completitud, no es una tarea sencilla; es decir, el uso de un cuerpo no arquimediano simplifica la parte operativa del Cálculo, pero no su fundamentación. Robinson (1966), recupera el concepto de infinitesimal en el contexto formal de la Matemática y también la fundamentación del Cálculo empleando infinitesimales; una introducción a este enfoque puede encontrarse en Henle y Kleiberg (1979). Salat (1993), construye una propuesta de un primer curso de Cálculo usando infinitesimales.

Como puede observarse de esta breve revisión, la conceptualización del infinito en la Matemática ha sido un proceso largo; surge como un concepto necesario que va más allá de la realidad (material). La invención por el hombre de objetos que no están en la realidad material promueve la atención en los aspectos formales de la Matemática; cómo es que deducimos las proposiciones, cómo evitar contradicciones; estamos en el terreno de la metamatemática. Estas nuevas discusiones pasan a formar parte de la Matemática misma. El teorema de Gödel es un ejemplo importante de estas discusiones; para una introducción sencilla ver Martinón (2006).

3. Dos ejemplos ilustrativos

3.1 Número de puntos de un segmento

Dos segmentos cualesquiera tienen la misma cantidad de puntos. Este hecho contraria nuestra intuición, tal vez porque si un segmento de longitud menor lo sobreponemos a otro de longitud mayor de tal manera que coincidan por uno de sus extremos, se exhibe que existen puntos en el segmento mayor que no están en el menor. Siempre puede establecerse una correspondencia biunívoca entre los puntos de dos segmentos cualesquiera disjuntos; la construcción geométrica frecuentemente usada se muestra en la fig. 1. Así, a cada punto E del segmento $\overline{AB}$ le corresponde un único punto G del segmento $\overline{CD}$, y recíprocamente, a cada punto G del segmento $\overline{CD}$, le corresponde un único punto E del segmento $\overline{AB}$. Para asegurar que la prolongación de $\overline{EF}$ corta a $\overline{CD}$ hay que usar el teorema de la barra transversal, que se enuncia a continuación.

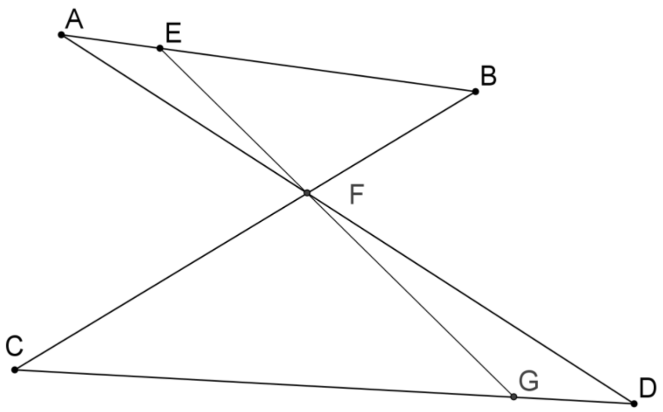

Figura 1

Teorema de la barra transversal. Sea Q en el interior de $\angle AOB$. Entonces el rayo $\overrightarrow{OQ}$ corta al segmento $\overline{AB}$.

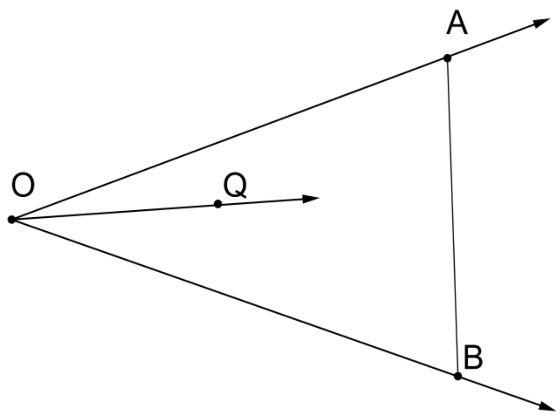

Figura 2

Y para demostrar este teorema tan solo se necesitan los siguientes axiomas y algunas definiciones.

I1. Dos puntos cualesquiera determinan una única recta.
I2. En cada recta existen por lo menos dos puntos.
O1. Si A, B, C son puntos de una recta y B está entre A y C entonces B también está entre C y A.

O2. Si A y C son dos puntos en una recta, entonces existe otro punto B entre A y C y un punto D, tal que C está entre A y D.

O3. Dados tres puntos en una recta, existe solamente uno de los tres que está entre los otros dos.

O4. Cuatro puntos A, B, C, D de una recta se pueden colocar de tal manera que B esté entre A y C y también entre A y D y que C esté entre A y D y también entre B y D.

O5. Sean A, B, C tres puntos no colineales y sea l una recta que no pase por ninguno de los tres puntos. Entonces si la línea pasa por algún punto del segmento $\overline{AB}$, ésta deberá pasar también por algún punto del segmento $\overline{BC}$ o por algún punto del segmento $\overline{AC}$.

Estos son los postulados de incidencia y de orden de la Geometría de Hilbert, omitiendo las partes que se refieren al espacio.

Es curioso que ninguno de estos postulados contraria a nuestra intuición. Sin embargo, el hecho de que cualesquiera dos segmentos tengan la misma cantidad de puntos es más difícil de aceptar. El axioma O2 obliga a los segmentos a tener una infinidad de puntos.

Por lo tanto, si aceptamos estos axiomas tendremos que aceptar el hecho de que para conjuntos infinitos deja de valer el principio de que el todo es mayor que cualquiera de sus partes, aunque este hecho esté o no de acuerdo con nuestra intuición. Es decir, de un conjunto de axiomas que nos pueden parecer verdades evidentes, usando el método deductivo, podemos obtener proposiciones que ya no se nos presentan como verdades evidentes.

3.2 ¿0.999…=1?

Para aceptar la igualdad tenemos que aceptar por ejemplo, que el proceso de localización de $0.999...$ en la recta numérica, que es infinito, termina; es decir, tenemos que aceptar el infinito actual o realizado. En general, muchas personas con poca información acerca del infinito en Matemáticas no aceptan la validez de la igualdad.

Existen por lo menos dos formas diferentes de argumentar la validez de la igualdad. Una de ellas es la siguiente:

$$\begin{aligned} 10x &= 9.999.... \\ x &= 0.999.... \\ 9x &= 9.000... \end{aligned}$$

Se multiplica la igualdad $x = 0.999....$ por 10 y se le resta la misma igualdad; en otras palabras, se calcula $9x = 10x - x$. Este procedimiento presupone la posibilidad de realizar una resta infinita y que en la parte decimal de $10x$ haya la misma cantidad de nueves que en la parte decimal de x. No he observado un solo caso en el que un estudiante ponga en duda este procedimiento, aunque muchos de ellos, antes de conocer el argumento, no aceptan la validez de la igualdad.

La segunda suposición presupone aceptar que si a un conjunto infinito numerable le quitamos un elemento, el conjunto que se obtiene tiene el mismo número de elementos que el original; es decir, que una parte de un conjunto puede tener la misma cantidad de elementos que el conjunto mismo. El otro procedimiento consiste en emplear los conceptos del Análisis Matemático. $\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + ...$ es una serie infinita. El término general de su sucesión de sumas parciales es

$s_n = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + ... + \frac{9}{10^n} = 1 - \frac{1}{10^n}$. Esta sucesión de sumas parciales converge a 1, por lo tanto de acuerdo a la definición de convergencia de series, la serie converge a 1, es decir, $\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + ... = 1$. Que la sucesión de sumas parciales converja a 1, significa que para cualquier número positivo ε existe un número natural k, tal que la distancia entre $1 - \frac{1}{10^n}$ y 1, es menor que ε para cualquier $n > k$. Con estos argumentos no necesitamos tratar el asunto de si un subconjunto puede tener la misma cantidad de elementos que el mismo conjunto o no. Acaso, ¿han desaparecido los problemas con el infinito? Lo que ocurre es que por definición podemos escribir $a_1 + a_2 + a_3 + ... = c$ si y solamente si la sucesión $\{s_n\}$ definida por $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ converge a c, es decir, si $\{s_n\}$ se acerca a c tanto como se quiera para n suficientemente grande, aunque nunca llegue a valer c.

Si consideramos a n como un natural infinitamente grande, entonces $s_n = 1 - \frac{1}{10^n}$ es infinitamente próximo a 1, pero diferente de 1. Por lo tanto, la respuesta a la pregunta planteada depende del modelo que se emplee para el Análisis; es decir, depende de si buscamos la respuesta en el cuerpo de los números reales o en una extensión que contenga números infinitamente grandes e infinitamente pequeños.

4. Qué piensan los estudiantes

A continuación se presentan los datos acerca de las respuestas dadas por estudiantes del primer año de la Licenciatura en Física y Matemáticas de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional (México), a varias preguntas relativas al infinito. La idea principal es la de tratar de detectar si los estudiantes tienden a aplicar las mismas ideas acerca de los conjuntos finitos a los conjuntos infinitos. Específicamente, la idea de que si A es un subconjunto propio de B entonces la cardinalidad de A tiene que ser menor que la cardinalidad de B. En la pregunta uno, se trata de observar si los estudiantes piensan que los dos segmentos de longitud diferente, tienen o no el mismo número de puntos. Las preguntas dos, tres y cuatro tratan de obtener información acerca de hasta qué punto los estudiantes aceptan, que para el caso de conjuntos infinitos, un conjunto y un subconjunto propio de él, puedan tener los mismos elementos. La pregunta cinco, busca observar si los estudiantes se inclinan por aceptar o por rechazar la igualdad (recuérdese que en un cuerpo que sea la extensión de los números reales que contenga números infinitamente grandes e infinitamente pequeños no se cumple la igualdad).

1. *Considere los segmentos* $\overline{\boldsymbol{AB}}$ *y* $\overline{\boldsymbol{CD}}$ *de la figura.*

   A*____________*B

   C*___________________________________*D

   ¿ $\overline{\boldsymbol{CD}}$ *tiene más o igual cantidad de puntos que* $\overline{\boldsymbol{AB}}$ *?*

Solamente el 28 % de los estudiantes respondieron que los dos segmentos tienen el mismo número de puntos. El argumento más comúnmente esgrimido para afirmar que $\overline{CD}$ tiene más puntos que $\overline{AB}$ es que $\overline{CD}$ tiene mayor longitud que $\overline{AB}$.

2. *Considere al conjunto de los números naturales* $\boldsymbol{N} = \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 6,...}\}$ *y ahora considere* $\boldsymbol{P} = \{\mathbf{2, 4, 6, 8, 10, ...}\}$, *el subconjunto de los números pares. ¿Hay igual cantidad de enteros en* $\boldsymbol{N}$ *que en* $\boldsymbol{P}$ *, o hay más en* $\boldsymbol{N}$ *?*

El 43 % de los estudiantes contestó que hay igual cantidad de números en ambos conjuntos. Un argumento frecuente para afirmar que hay más números naturales que pares es que en los naturales están los pares y otros más.

3. *Si se multiplican los dos miembros de la igualdad* $\mathbf{x = 0.999...}$ *por* $\mathbf{10}$ *se obtiene* $\mathbf{10x = 9.999...}$ *La parte decimal de* **10x**, *¿tiene la misma cantidad de nueves que la parte decimal de* **x**?

El 62 % contestó que en las partes decimales de los dos números había la misma cantidad de nueves. Uno de los estudiantes argumentó la respuesta de que había la misma cantidad de nueves diciendo “porque es un número infinito”.

4. *Considere al conjunto de los números naturales* $\boldsymbol{N} = \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 6,...}\}$ *y ahora considere el conjunto* $\boldsymbol{B} = \{\mathbf{2, 3, 4, 5, 6, ...}\}$, *que se obtiene a partir del conjunto de los números naturales quitando el elemento* 1. *¿* N *tiene más elementos que* B *o tiene la misma cantidad de elementos que* B *?*

El 33 % respondió que había la misma cantidad de elementos en ambos conjuntos. Un estudiante para argumentar que hay más elementos en N dijo: “porque es un número menos”.

5. *¿Es válida la igualdad* $\mathbf{0.99999999.... = 1}$ *?*

24 % de los estudiantes contestaron que la igualdad es válida. El argumento dado para sustentar la afirmación de que no vale la igualdad es que $0.99999999...$ es aproximadamente igual a 1. El 76 %, piensa que las dos expresiones representan números diferentes, por pequeña que pueda ser esta diferencia.

Las repuestas a las preguntas dos y cuatro dan cuenta de que para los estudiantes un subconjunto propio de un conjunto siempre tiene que tener menos elementos que el conjunto, es decir, tienden a aplicar la noción válida para los conjuntos finitos de que un subconjunto propio tiene menos elementos que el conjunto, a los conjuntos infinitos. Sin embargo, llama la atención que en la pregunta tres, el 63 % piensa que x y $10x$ tienen la misma cantidad de nueves. Posiblemente porque la forma en que se presenta, sugiere la correspondencia biunívoca.

Cuando a los estudiantes se les presenta el argumento de multiplicar por 10 a $0.999...$ y restarle la misma cantidad, ninguno de ellos presentó alguna objeción, pero muchos de ellos se sintieron contrariados al ver el resultado. Además, no mostraron interés en descubrir los principios que se estaban usando; simplemente, no dudaban de la prueba.

5. Conclusiones

Los estudiantes a los que se presentó el cuestionario, que ya habían concluido el bachillerato, mostraron que tienden a aplicar al caso de conjuntos infinitos el principio de que todo conjunto es mayor que cualquiera de sus subconjuntos propios. Así que el concepto de infinito develado por Cantor y aún las concepciones de Galileo aparecen tardíamente en la formación matemática de los estudiantes. Quizá porque el concepto de infinito es una construcción del hombre que va más allá de la realidad material. Si el desarrollo psicológico intelectual del alumno corresponde al de la etapa de las operaciones formales, no hay necesidad de protegerlo del infinito. Varias de las discusiones importantes que se dan en la historia del infinito son totalmente accesibles en la adolescencia.

De unos cuantos postulados cuya validez es accesible a nuestra intuición pueden obtenerse por medio del método deductivo proposiciones cuya validez es mucho menos obvia o incluso que pueden contrariar nuestra intuición. Este hecho nos obliga a confiar menos en nuestra intuición y preocuparnos más sobre la posible validez de los métodos lógicos en la construcción de la Matemática. Esta característica de la Matemática, en el momento apropiado debe mostrársele al alumno, no tanto quizá como una vocación estética hacia el formalismo, sino como el resultado de una evolución histórica natural y necesaria.

Parece razonable pensar que hay que proponer a los estudiantes discusiones acerca del infinito en matemáticas y sus implicaciones en torno a la reflexión sobre el propio pensamiento matemático, tan pronto como sea posible.

Por otro lado, es posible diseñar un curso de Cálculo con énfasis en las aplicaciones, sin pretender una fundamentación al estilo de Weierstrass, basado en un modelo de cuerpo no arquimediano. El obligar a fundamentar un primer curso de Cálculo en exceso se asemeja a que en los primeros temas de teoría de conjuntos fuera necesario estudiar la teoría de Fraenkel-Zermelo para evitar la paradoja de Russell. Esta comparación, seguramente exagerada, hace reflexionar en aspectos de la implementación didáctica del conocimiento matemático en los cursos. Aunque hay que tener presente que en un cuerpo no arquimediano, no es válida la propiedad de la completitud y esto lleva a una fundamentación que puede ser muy diferente de la usual.

Bibliografía

Aristóteles (1995, 384-322 A.C.). *Física*. *Traducción y notas: Guillermo R. de Echandía*. Madrid: Planeta de Agostini. Editorial Gredos, S.A. Biblioteca Clásica Gredos (pp 91-111).

Aristóteles (2009, 384-322 A.C.). *Metafísica*. Biblioteca Virtual Miguel de Cervantes. Libro 11, capítulo X. http://www.cervantesvirtual.com, 1 de agosto de 2009.

Bolzano, B.(1995, 1851). *Las paradojas del infinito*. Mathema. México: Servicios Educativos de la Facultad de Ciencias, UNAM (pp 64-66).

Cantor, G.(1955) . *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. Republication of the original translation of 1915. New York : Dover Publication, Inc.

Galilei, G. (1981, 1638). *Consideraciones y Demostraciones Matemáticas sobre dos Nuevas Ciencias*. Madrid: Editorial Nacional.

Henle, J.M.; Kleinberg, E.M. (1979). *Infinitesimal Calculus*. MIT Press.

Hilbert, D. (1967, 1926). *Über das Unendliche*, *Mathematische Annalen*, 95: 161-90. Lecture given Münster, 4 June 1925. English translation in van Heijenoort (1967, pp 367-392).

Hilbert, D. (1902). *Foundations of Geometry*. University of Illinois. The Open Court Publishing Co. Authorized translation by E.J. Towsend.

Imaz, C. (2001). ¿Qué pasa con el infinito? *Avance y Perspectiva*, 20, pp. 305-311.

Laugwitz, V.D. (1968). Eine nichtarchimedische Erwiterung angeordneter Körper. *Math. Nachr*. 37, pp. 222-236.

Irvine, A.D. (2009). Russell's Paradox, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2009 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.), http://plato.stanford.edu/archives/ sum2009/entries/ Russell-paradox/.

Martinón, A. (2006). La cumbre del imposible matemático. *Números* [en línea], 64. Recuperado el 15 de mayo de 2010, de http://www.sinewton.org/numeros/.

Robinson, A. (1966). *Non-estándar Analysis*. Holanda: North Holland.

Salat, R. (1993). *Elaboración, prueba y análisis de un modelo infinitesimal del Cálculo*. Tesis doctoral. México: CINVESTAV.

Ramón Sebastián Salat Figols, Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional, México, D.F. Originario de Villafranca del Panadés, Barcelona, España, 26 de septiembre de 1950. Licenciado en Física y Matemáticas por la Escuela Superior de Física y Matemáticas; Maestría y Doctorado en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa por el CINVESTAV, México, DF. Becario de EDD y SIBE del Instituto Politécnico Nacional.