

Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial

Margherita Gonzato (Universidad de Granada)

Teresa Fernández Blanco (Universidad de Santiago de Compostela)

Juan Díaz Godino (Universidad de Granada)

Fecha de recepción: 16 de junio de 2010

Fecha de aceptación: 17 de enero de 2011

Resumen

La adquisición de habilidades de orientación y representación espacial es un objetivo incluido en los diseños curriculares, por sus aplicaciones prácticas e implicaciones en el desarrollo cognitivo de los estudiantes. No obstante, la enseñanza del tema no es una tarea fácil para los profesores como revelan las investigaciones didácticas. En este trabajo analizamos diversas tareas presentadas en las investigaciones sobre visualización y orientación espacial de objetos y espacios tridimensionales. Proponemos una clasificación de las tareas y describimos ejemplos prototípicos para cada una de las categorías expuestas, incluyendo información sobre los conocimientos puestos en juego en su realización.

Palabras clave

Espacio, geometría, visualización, orientación espacial, situaciones de enseñanza, habilidades y conocimientos.

Abstract

The acquisition of skills of spatial visualization and spatial orientation is an objective proposed in the curricular design, for its practical applications and implications for the cognitive development of students. However, the teaching of this subject is not an easy task for teachers, as the educational research reveals. In this paper we analyze various tasks presented in the researches about spatial visualization and orientation of three-dimensional objects and spaces. We propose a classification of these tasks and describe prototypical examples for each of the categories listed, including information about the knowledge put into effect in such activity.

Keywords

Space, geometry, visualization, spatial orientation, teaching, skills and knowledge.

1. Introducción

La visualización y orientación espacial figura en las directrices curriculares como contenido a tratar en los distintos ciclos de educación primaria y secundaria ya que el desarrollo de habilidades de orientación espacial y visualización de cuerpos geométricos se considera un objetivo valioso y necesario para cualquier ciudadano.

Por ejemplo, en los Principios y Estándares del “National Council of Teachers of Mathematics” (NCTM, 2000) se indican entre los objetivos el desarrollo del sentido espacial y reconocimiento de la geometría como un medio para describir y modelizar el mundo físico. Estos objetivos relacionados con la orientación y visualización espacial se presentan desde preescolar hasta el octavo año en los “Curriculum Focal Points” de geometría. También las orientaciones curriculares españolas (MEC,



2006) hacen referencia al tema de la “orientación y representación espacial”. Concretamente en los criterios de evaluación se indica, “Describir la situación de un objeto del espacio próximo, y de un desplazamiento en relación a sí mismo, utilizando los conceptos de izquierda-derecha, delante-detrás, arriba-abajo, cerca-lejos y próximo-lejano. Este criterio pretende evaluar las capacidades de orientación y representación espacial, teniendo en cuenta tanto el lenguaje utilizado en la descripción como la representación en el plano de objetos y situaciones”.

Esto justifica que los procesos de enseñanza y aprendizaje de la visualización y orientación espacial sean objeto de atención por parte de la investigación en didáctica de la matemática (Battista, 2007; Gutiérrez, 1996a; Presmeg, 2006).

En este trabajo presentaremos una síntesis de investigaciones realizadas sobre este tema con el objetivo de facilitar el acceso de los profesores a los resultados de tales investigaciones y ayudarles a la reflexión sobre la forma de abordar la enseñanza del mismo, principalmente en los niveles de educación primaria.

Organizamos el artículo en cinco secciones. En la segunda sección fijamos la atención en los tipos de tareas o situaciones – problemas tratados en las investigaciones en las cuales se ponen en juego habilidades de visualización y orientación espacial y proponemos una clasificación en tres familias. En las siguientes secciones se describirán detalladamente cada una de las familias de tareas, presentando ejemplos prototípicos de dichas situaciones y mostrando los conocimientos puestos en juego cuando se aborda la solución de las tareas (secciones 3, 4 y 5). Terminamos con algunas reflexiones e implicaciones para la práctica escolar del uso de las distintos tipos de tareas descritas.

2. Tareas de visualización y orientación espacial

En las investigaciones analizadas en el campo de la educación matemática se proponen diferentes definiciones de visualización y orientación, tanto en el contexto de la geometría como en otras disciplinas (por ejemplo, el álgebra o la aritmética), pero muchas veces se designa un mismo concepto con nombres diferentes y conceptos diferentes con un mismo nombre. Además, estas definiciones pueden resultar de difícil aplicación directa en la enseñanza.

De forma general consideramos la visualización y la orientación espacial como un conjunto de habilidades relacionadas con el razonamiento espacial. Visualizar y orientar un objeto, un sujeto o un espacio, no incluye únicamente la habilidad de “ver” los objetos y los espacios, sino también la habilidad de reflexionar sobre ellos y sus posibles representaciones, sobre las relaciones entre sus partes, su estructura, y de examinar sus posibles transformaciones (rotación, sección, desarrollos,...). Observamos que la interpretación y la comunicación de la información de manera figural (con descripciones gráficas y modelos de hechos y relaciones espaciales) o verbal (vocabulario específico utilizado en geometría, expresiones y términos decticos) son importantes habilidades relacionadas con la visualización y la orientación espacial.

En este apartado abordamos de una manera operativa el tema de la visualización y la orientación en el contexto de la geometría espacial, identificando y clasificando los principales tipos de tareas sobre la visualización y la orientación de objetos o espacios tridimensionales (representados en el plano o presentados físicamente). Para lograr este objetivo analizamos las tareas presentadas en las diferentes investigaciones sobre el tema en el campo de la educación matemática y de la psicología.

Observamos que dichas investigaciones presentan diferentes tipos de estudios: investigaciones sobre aspectos epistémicos, como el estudio de las representaciones planas de objetos tridimensionales

(Gutiérrez, 1996b; Parzysz, 1988) y los procedimientos (Fischbein, 1993; Lurçat, 1979; Mesquita, 1992); investigaciones sobre aspectos cognitivos como las definiciones de procesos y descripción de habilidades (Bishop, 1983; Del Grande, 1990), la descripción de etapas y niveles (Mitchelmore, 1978; Piaget e Inhelder, 1967; Weill-Fassina y Rachedi, 1993), las estrategias (Gorgorió, 1996, 1998), los errores y las dificultades (Battista y Clements, 1996); investigaciones sobre experiencias o propuestas instruccionales (Berthelot y Salin, 1992, 1993; Clements, 2004; Cuisinier y al., 2007; Galvez, 1985; Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996; Lappan, Phillips, Winter, 1984; Wiegand, 2006); investigaciones con profesores (Gaulin, 1985; Malara, 1998).

Estas investigaciones presentan diferentes tipos de actividades que involucran capacidades de orientación y visualización espacial, también llamadas “habilidades espaciales” (spatial abilities), pero pocas presentan una detallada clasificación de las tareas.

Hershkowitz, Parzysz, y Van Dormolen (1996) identifican dos categorías de actividades relacionados con el espacio y las formas dependiendo del tipo de relación entre los objetos que son observados y el observador. En el primer tipo la relación es directa, subjetiva e implica la reflexión sobre lo que el observador ve: el estudiante describe lo que ve como observador o lo que ve identificándose con un observador. En las actividades del segundo tipo la relación es indirecta, aunque objetiva e implica la reflexión sobre cómo el observador ve: el estudiante tiene que reflexionar sobre la situación del observador, tiene que identificarse con dos personas, una que observa y la otra que observa al observador.

Por otra parte Berthelot y Salin (1992, p.36) identificaron tres grandes categorías de acciones para que el sujeto tenga un buen control de sus relaciones con el espacio sensible, esto es: reconocer, describir, fabricar o transformar objetos; desplazar, encontrar, comunicar la posición de objetos; reconocer, describir, construir o transformar un espacio de la vida cotidiana o de desplazamiento.

Basándonos en esa categorización de acciones y centrándonos en el contexto tridimensional (prescindimos de las tareas de orientación y visualización de figuras planas) podemos diferenciar tres grandes familias de actividades, según el tópico específico tratado:

1. Orientación estática del sujeto y de los objetos
2. Interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales
3. Orientación del sujeto en espacios reales

La primera familia es una ampliación de la categoría de acciones de Berthelot y Salin (1992) “desplazar, encontrar, comunicar la posición de objetos” donde incluimos las tareas que tratan el problema de la orientación del cuerpo del sujeto, del sujeto con relación a otros objetos, y la eventual orientación de objetos (orientaciones que involucran el conocimiento del esquema corporal y la posible proyección de este esquema en el objeto).

La segunda familia de actividades está relacionada con la categoría de acciones identificada por Berthelot y Salin como “reconocer, describir, fabricar o transformar objetos”, en las cuales incluimos también las tareas de representación (bi o tridimensional) de objetos tridimensionales (materiales o representados en el plano).

Mientras que en la tercera familia incluimos las actividades de reconocimiento, descripción, construcción, transformación, interpretación y representación de espacios de vida (espacio reales) o de desplazamientos.



Una importante diferencia entre las tareas de la familia 2 y 3 es que las actividades de “interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales” requieren que el sujeto cambie su punto de vista de manera “discreta”, es decir, se requiere que el sujeto se imagine o se ponga en una determinada posición con respecto a una composición de objetos, sin dar importancia al movimiento que tiene que hacer para cambiar su posición, sino solo al punto de vista final. Mientras que en las actividades de “orientación del sujeto en espacio reales” el punto de vista del sujeto cambia de manera continua a lo largo de su desplazamiento, es decir, su visión del espacio está vinculada a un movimiento continuo.

Otra importante diferencia es el tamaño del espacio. Si en la familia 2 se trabaja con objetos aislados o composiciones de objetos (la composición es considerada como un todo), y la atención no se fija en el espacio donde están, sino sobre su estructura y su composición, en la familia 3 se consideran espacios más grandes, que puedan ser recorridos (físicamente o mentalmente) por el sujeto.

Esta triple clasificación de las tareas de la visualización y orientación espacial se puede observar en diferentes trabajos (Berthelot y Salin, 1992; Gaulin, 1985; Gorgorió, 1998; Lurçat, 1979). Por ejemplo Lurçat (1979) presenta actividades que requieren que el sujeto interprete la posición de su cuerpo, la posición de otro sujeto y la posición relativa de objetos, sea en un contexto estático (objetos y sujetos fijos, familia de tareas 1), como de movimiento (itinerarios, familia de tareas 3).

En Gorgorió (1998) se analizan las estrategias utilizadas por alumnos de 12 y 16 años al resolver nueve tareas que involucran la rotación espacial. Estas tareas están clasificadas en dos grupos, atendiendo a si la acción requerida para resolverlas es de interpretación o de construcción (dibujo o construcción tridimensional). Observamos que entre los ítems de interpretación hay tres tareas que requieren la identificación de un objeto tridimensional tras una rotación (familia 2) y una tarea que requiere describir un itinerario entre dos puntos de una ciudad por medio de un mapa (familia 3). Esta variedad de tipos de tareas muestra la complejidad del tema y apoya nuestra propuesta de clasificar en tres familias los tipos de problemas en los que intervienen habilidades de visualización y orientación espacial.

En las secciones siguientes describimos con más detalle cada una de las tres familias de tareas propuestas, identificando trabajos de investigación centrados en cada una y algunos resultados de los mismos.

3. Tareas de orientación estática del sujeto y de los objetos

Incluimos en esta categoría las tareas que requieren comprender el esquema corporal, identificar y utilizar sus polaridades: arriba-abajo, izquierda-derecha, delante-detrás, utilizar dicho lenguaje para describir la posición del propio cuerpo, o de otro observador, con respecto a objetos u otras personas y las posiciones de objetos con respecto a otros objetos. En estas actividades consideramos que los objetos y las personas están inmóviles.

Vamos a dar algunos ejemplos de actividades de orientación estática del sujeto y de los objetos encontradas en la literatura, en libros de texto, o en otro material instruccional.

Ejemplo 1. El niño tiene que reconocer las diferentes partes de su cuerpo y de otra persona que está frente a él (García, 2009, Nivel 4, Ficha 213, Figura 1).

1. Con tu mano derecha tóctele el ojo izquierdo.
2. Enseña dos dedos con tu mano derecha y tres con tu mano izquierda.
3. Con tu mano derecha señala hacia el lado derecho.
4. Con los ojos cerrados, señala con la mano derecha tu pierna izquierda.
5. Con los ojos cerrados, enseña dos dedos con tu mano derecha y cuatro con tu mano izquierda.
6. Con tu mano izquierda señala mi pierna derecha.
7. Con tu mano derecha señala mi ojo izquierdo.
8. Con tu mano derecha señala mi oreja izquierda.
9. Con tu mano izquierda, señala mi ojo izquierdo.
10. Con tu mano derecha señala mi oreja izquierda.

El educador se coloca frente al niño/a y le explica que debe imitar sus gestos, pero sin realizar ninguna indicación verbal:

11. Con la mano derecha se toca el ojo derecho.
12. Con la mano izquierda se toca el pie derecho.
13. Con la mano derecha enseña cuatro dedos y con la izquierda dos.
14. Con la mano derecha toca su oreja izquierda.
15. Con la mano izquierda se toca el puño derecho.

Figura 1: Tareas de orientación del cuerpo en el espacio real

Ejemplo 2. En una imagen de niños en diferentes posiciones (figura 2), el niño tiene que colorear los zapatos izquierdos de un color y los derechos de otro (Wiegand, 2006, p. 107).



Figura 2. Tarea de orientación estática del cuerpo

Ejemplo 3. Se utilizan un coche pequeño y un camión pequeño y se modifican sus posiciones sobre la mesa: a) ambos en dirección izquierda delante del niño; b) orientados hacia el niño; c) el auto dirigido hacia el niño y el camión en dirección opuesta; d) en dirección oblicua, uno frente al otro. Se invita al niño, en cada situación, a poner: 1) el coche delante del camión; 2) el auto detrás del camión. (Lurçat, 1979).

En las situaciones anteriores hemos evitado poner tareas de descripción de posiciones relativas de objetos que no tienen, por su estructura o su uso, una determinada y clara orientación (por ejemplo, en un dibujo, no tiene sentido pedir que se pinten los objetos que están a la derecha de una botella). Esto para evitar los conflictos de referencias que pueden aparecer según que el objeto sea visto como tal en el espacio, o bien considerado a partir de su estructura posiblemente ambigua.



Un estudio muy interesante que trata diferentes problemáticas relacionadas con dichas actividades es presentado por Lurçat (1979). En particular, en este trabajo se establece una distinción entre objetos que, por su estructura o su función, poseen una parte anterior y una posterior (y por tanto derecha/izquierda) y los que no las poseen. También se diferencia entre referentes subjetivos (dependientes de la posición del sujeto) y objetivos (independiente de la posición del sujeto). Para explorar las diferentes modalidades de la proyección del esquema corporal se proponen interesantes situaciones experimentales.

En Alberti (2004) se afirma que las relaciones con las cuales se estructura el espacio están relacionadas con las propiedades de nuestro cuerpo, que le dan un significado preciso. La distinción entre delante/detrás de una persona se define por el hecho de que el cuerpo está orientado, es decir, tiene una parte considerada como delante por su forma y funciones y otra como detrás. La orientación de la forma es, por tanto, una condición necesaria para poder usar un objeto como referencia para identificar la combinación delante/detrás. La distinción de izquierda/derecha, asume que el objeto de referencia tenga un plano de simetría, como el cuerpo humano que se caracteriza por su lateralidad, es decir, dos partes iguales de forma y función, pero cuyos movimientos tienen sentido contrario. La distinción cerca/lejos es una relación que involucra al menos a tres cuerpos, uno de los cuales sirve de referencia para establecerse y comparar las distancias de los otros. Es, por tanto, una noción de tipo métrico que se necesita para evaluar las distancias entre objetos y ponerle un orden, aunque no estén alineados en el plano o en el espacio. Implica entonces la capacidad de reconocer la conservación de las longitudes al variar la orientación de la referencia o de los objetos.

En el plano, por ejemplo, el binomio arriba/abajo no puede tener el significado del lenguaje común, ya que se refiere a las características del espacio físico que tiene la dirección vertical como dirección de referencia; por tanto, el sentido de estos términos debe ser aclarado por el profesor, de acuerdo a las convenciones en uso. Incluso la distinción delante/detrás hecha sobre la hoja puede dar lugar a ambigüedad, por lo que parece oportuno evitar proponer a los niños fichas con estos temas.

Observamos que estas problemáticas están tratadas mayormente en edad preescolar (educación infantil) siendo estos conocimientos considerados en las escuelas primarias como previos. Es por esta razón que centraremos más la atención en las otras dos familias de tareas relacionadas con la visualización y orientación espacial.

4. Tareas de interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales

En esta familia de tareas incluimos las actividades que requieren reconocer y cambiar puntos de vista (cambio de perspectivas), interpretar perspectivas de objetos, rotar mentalmente objetos, interpretar diferentes representaciones planas de objetos tridimensional (perspectivas, vistas,...), convertir una representación plana en otra, construir objetos a partir de una o más representaciones planas,... Observamos que en estas tareas se construyen técnicas para representar un objeto o un espacio, y al mismo tiempo se aprende a leer diferentes tipos de representaciones planas y los códigos respectivos.

Muchas son las investigaciones que estudian las estrategias, los conocimientos, las habilidades, las dificultades, puestas en juego al resolver diferentes actividades de perspectivas de cuerpos tridimensionales. Describimos brevemente las tareas presentadas en algunos trabajos centrados en este tópico.

Gutiérrez (1996a, p. 36), en el análisis de un experimento de enseñanza de las representaciones planas de módulos multicubos, distingue tres tipos de actividades:

- A partir de una representación plana del módulo, el estudiante tiene que construir el respectivo módulo físico.
- A partir del módulo (físico o presentado en perspectiva en el ordenador con la posibilidad de girarlo libremente), tiene que dibujar diferentes tipos de sus representaciones planas.
- El estudiante tiene que relacionar dos tipos de representaciones planas del módulo, sin construirlo físicamente.

Observamos que las representaciones planas que Gutiérrez considera en este trabajo son la perspectiva (no tratada en el análisis del experimento), la representación por plantas, las vistas ortogonales, las vistas ortogonales codificadas y la proyección isométrica.

En Pittalis, Mousoulides y Christou (2009) se describen dos actividades relacionadas con la interpretación de una representación plana de un objeto tridimensional: una requiere construir un objeto tridimensional a partir de sus vistas y la otra requiere dibujar un objeto tridimensional y estudiar las propiedades del objeto que se conservan en su representación.

Muchos trabajos analizados incluyen tareas de rotación de un objeto tridimensional. Por ejemplo Gorgorió (1996, 1998) se centra en el estudio de las estrategias utilizadas por alumnos entre 12 y 16 años al resolver tareas que involucran rotaciones espaciales.

Fischbein (1993) analiza el caso del desarrollo de un cubo, como ejemplo de una práctica con estudiantes de actividades mentales en las cuales la cooperación entre el aspecto conceptual y el figural requiere un esfuerzo especial. Esta actividad se refiere al desarrollo de un cuerpo geométrico y está compuesta de tres partes:

- Dibujar la imagen obtenida desarrollando un cuerpo geométrico
- Identificar el cuerpo geométrico obtenido a partir de un desarrollo plano
- Indicar en el desarrollo las aristas que se hacen corresponder cuando el objeto tridimensional sea reconstruido.

De manera más general, Ben-Chaim, Lappan y Houang (1988) estudian las habilidades de visualización espacial y el efecto de la instrucción en los grados 5-8 (identificando diferencias por sexo, edad y proveniencia) utilizando un test de visualización espacial cuyos ítems requieren reconocer vistas ortogonales o perspectivas de composiciones de cubos (edificios), añadiendo o quitando cubos, combinando dos sólidos, aplicando la idea de vista codificada superior.

En el contexto de formación de profesores señalamos dos trabajos centrados en este tema: Malara (1998) y Gaulin (1985). Malara presenta una experiencia llevada a cabo con profesores de escuela secundaria que consistía en resolver actividades que involucran la habilidad de visualizar el efecto de determinadas transformaciones sobre sólidos, o de imaginar la perspectiva de un sólido desde un determinado punto de vista. Gaulin analiza tres ejemplos de actividades propuestas a maestros en formación, para “desarrollar la visualización espacial y la intuición geométrica”, dos de estas tareas se centran en el estudio de las posibles representaciones de sólidos multicubos.

A continuación intentamos clasificar las tareas descritas en estas investigaciones.

Analizando las investigaciones anteriores observamos que las tareas presentadas tienen en cuenta tres parámetros: el estímulo inicial presentado, la acción principal requerida para resolver la tarea y el tipo de respuesta solicitada. El estímulo inicial se refiere a la presencia o no, en la descripción de la tarea, del objeto físico, o de una de sus representaciones.



Las acciones principales requeridas para resolver las tareas que se presentan en las investigaciones son:

- Cambiar el tipo de representación (plana o tridimensional): representar un objeto físico con una representación plana, construir un objeto tridimensional a partir de su representación plana, o convertir representaciones planas de tipos diferentes (perspectiva/proyección isométrica/vistas/vistas codificadas/fotografías). Observamos que el cambio de representación puede implicar también una rotación del objeto, un cambio de punto de vista.
- Rotar: rotar el objeto o partes del objeto, o de manera equivalente cambiar mentalmente de perspectiva (imaginarse en otra posición con respecto al objeto). Observamos que no hay cambio de tipo de representación plana.
- Plegar y desplegar: plegar un desarrollo plano para formar un objeto tridimensional (físico o representado), o viceversa desplegar el objeto para obtener uno de sus desarrollos.
- Componer y descomponer en partes: dadas dos o más piezas componerlas para formar un sólido, o viceversa, dado el sólido descomponerlo en dos o más partes.
- Contar elementos: dado un sólido contar los elementos que lo componen (unidades de volumen, caras, aristas, vértices, etc.).

Observamos que las acciones pueden aparecer de forma explícita o implícita en el enunciado de la tarea.

En cuanto al tipo de respuesta solicitada diferenciamos entre:

- Construcción: si se requiere la construcción del objeto tridimensional.
- Dibujo: si se requiere una representación plana del objeto tridimensional.
- Identificación: si se requiere identificar la respuesta correcta entre más opciones.
- Verbal: si se requiere una respuesta verbal /numérica (que no exija ninguno de los anteriores tipos de respuestas).

Observamos que Gorgorió (1996), centrándose en actividades de rotación (tipo de acción) clasificó las tareas en dos categorías: tareas de “construcción”, si la respuesta requiere la construcción del objeto o su dibujo, y tareas “de interpretación”, que requieren que el estudiante reaccione ante una acción geométrica ya cumplida. Con respecto a nuestra clasificación del tipo de respuesta, separamos las tareas de “construcción” de Gorgorió en construcción del objeto físico y dibujo como representación plana del objeto tridimensional, mientras que las tareas “de interpretación” de la autora corresponden al tipo de respuesta que nosotros llamamos de identificación.

Presentamos en la tabla 1 una síntesis de la clasificación de las tareas propuesta.

Estimulo inicial		Acción (ejecutar/imaginar)	Tipo de respuesta
Presencia del objeto físico	Objeto (y/o sujeto) móvil	Convertir entre representaciones (plana o 3D)	Construcción
	Objeto (y sujeto) fijo	Rotar	Dibujo
Ausencia del objeto físico	Objeto observado previamente	Plegar o desplegar	Identificación
		Composición y descomposición en partes	Verbal
	Objeto presentado en el plano	Conteo de partes	Otras

Tabla 1. Clasificación de las tareas de interpretación de objetos tridimensionales

Podríamos también considerar el tipo de objeto: geométricos, multicubos, cotidiano, el tipo de representación plana utilizado (perspectiva, por proyecciones ortogonales codificadas, etc.) y el tamaño del espacio: micro (objeto solo), meso (composición de objetos). Observamos que cuando se trabaja con un objeto fijo, ausente o representado en dos dimensiones, sin posibilidad de manipularlo, las acciones requeridas serían “mentales”, como, por ejemplo, imaginar la rotación de un objeto o cambiar el punto de vista. Además hacemos constatar que una tarea puede involucrar más acciones y si la respuesta es de dibujo puede necesitar de diferentes técnicas (dibujo en perspectiva caballera, en proyección, etc.).

Vamos a dar algunos ejemplos prototípicos de actividades que pertenecen a esta segunda familia encontrados en la literatura, en libros de texto o en otro material instruccional. En este trabajo elegimos clasificar las tareas según la acción principal requerida para su resolución (ver tabla 1).

4.1. Convertir representaciones

Ejemplo 4: Construye una composición de cubos que tenga las vistas ilustradas en la figura 3 (Pittalis, Mousoulides y Christou, 2009, p. 387).

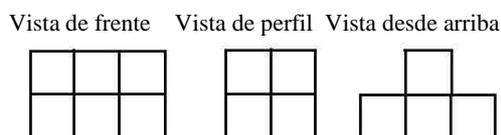


Figura 3. Proyecciones ortogonales del objeto

Para resolver esta tarea el alumno tiene que conocer un determinado lenguaje gráfico para interpretar las representaciones planas del objeto, que en este caso son proyecciones ortogonales, llamadas vistas. El conocimiento de las propiedades de dichas representaciones (por ejemplo que conservan la forma, tamaño y posición relativa de los cuerpos proyectados y en consecuencia las caras del cubo son cuadrados cuando se miran frontalmente) permite coordinarlas e integrarlas para construir el objeto tridimensional. Esta coordinación de las vistas constituye una de las mayores dificultades para los estudiantes (Battista y Clements, 1996; Gutiérrez, 1996a).

Observamos que el estímulo inicial de esta tarea son las representaciones planas (proyecciones ortogonales) y el tipo de respuesta es de construcción. Variando el estímulo inicial (poniendo un objeto físico u otro tipo de representación plana), o bien el tipo de respuesta que se pide se pueden obtener interesantes variaciones de la tarea.

4.2. Rotar objetos

Ejemplo 5. ¿Cuál de las imágenes de la derecha continua la serie? (Ferrero, 2008, p.172, figura 4)



Figura 4. Dados que giran

En la resolución de esta tarea de rotación se tiene que leer una representación plana (perspectiva paralela) de un cuerpo tridimensional y se ponen en juego los siguientes conocimientos principales: eje

de rotación, rotación de un cuerpo alrededor de un eje, la estructura del cubo y las propiedades derivadas de la rotación como isometría.

Variando la estructura del cuerpo y su tipo de representación (estímulo inicial), combinando varios ejes de rotación y cambiando el tipo de respuesta (por ejemplo, de dibujo) se pueden formular diferentes tareas de rotación. Observamos que en muchas tareas de rotación de un objeto se puede variar el enunciado solicitando un cambio de posición con respecto al objeto (y viceversa). En Gorgorió (1998) se pueden encontrar interesantes ejemplos de tareas de rotación y un análisis de las posibles estrategias utilizadas para resolverlas. En este trabajo se mencionan también algunos errores manifestados por los alumnos en la resolución de las tareas, entre los cuales está la confusión entre la rotación de 180 grados y la simetría.

4.3. Plegar y desplegar (desarrollos)

Ejemplo 6 (figura 5). Escribe cuáles de estos desarrollos corresponden a un cubo (Almodovar y García, 2009, p. 197)

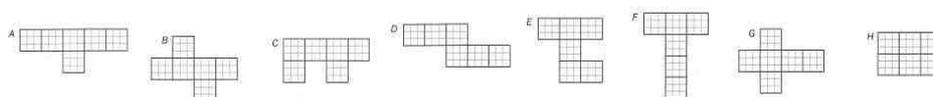


Figura 5. Desarrollos de cubos

Para resolver esta tarea es necesario conocer qué es un desarrollo y las propiedades que conserva con respecto al objeto geométrico, por ejemplo, el paralelismo de las aristas de las caras, la forma y el tamaño de las caras.

Una de las dificultades para resolver tareas de desarrollo proviene del hecho que, a diferencia de las proyecciones, en estas representaciones se produce una duplicidad de algunos elementos del cuerpo tridimensional. Por ejemplo, una arista del cubo puede ser representada por dos aristas en el desarrollo (a un punto del cubo le puede corresponder puntos del plano). Estas aristas corresponden a aquellas que se unen al plegar el desarrollo. Un análisis más detallado de esta tarea se puede encontrar en Mesquita (1992).

4.4. Composición y descomposición en partes

Ejemplo 7. Juntando dos piezas de puzle se pueden construir nuevos sólidos, como se muestra en el ejemplo. Para cada uno de los siguientes sólidos formados por las dos piezas, la figura 6 muestra cómo se construye pintando una de las piezas que lo compone. (Variación de la tarea presentada por Lappan, Phillips y Winter, 1984, p. 622).

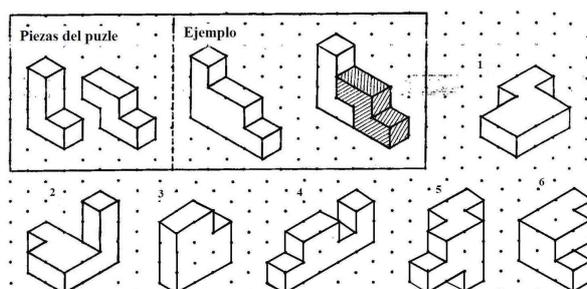


Figura 6. Composiciones de puzles de dos piezas

En la resolución de esta actividad se tienen que interpretar representaciones isométricas de objetos y conocer sus convenios. La partición del sólido en las dos piezas dadas supone la identificación de dichas piezas en la figura, que se hace a través de movimientos isométricos de las piezas. Las posiciones relativas de las piezas permitirán obtener las diferentes construcciones.

Además de las dificultades de interpretación y representación en perspectiva isométrica tenemos las dificultades asociadas al hecho de que algunas partes de los objetos están ocultas.

4.5. Conteo de partes

Ejemplo 8. El objeto representado en la figura 7 está formado por cubos. Supongamos que pintamos toda su superficie exterior de azul y después lo desmontamos totalmente. ¿Cuántos cubitos tendrían exactamente tres caras azules? ¿Y cuántos tendrían exactamente dos caras azules? ¿Y una cara azul? ¿Y ninguna cara azul? (Bishop, 1983, p. 187).

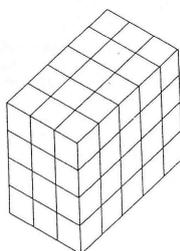


Figura 7. Conteo de cubitos

En esta tarea se tiene que interpretar la representación del objeto y sus partes (los cubitos), se tiene que conocer la estructura del ortoedro y coordinar las diferentes caras que pertenecen al mismo cubito (las vistas ortogonales de las caras del cubito).

5. Tareas de orientación del sujeto en espacios reales

Incluimos en esta familia aquellas tareas que requieren que el sujeto comprenda el espacio donde se sitúa (o donde se sitúa otra persona u objeto), su ubicación y orientación en el espacio. “Orientarse en el espacio” puede significar leer un mapa, un plano o comprender una maqueta de espacios de diferentes tamaños (ciudad, barrio, escuela, aula), describir verbalmente un itinerario entre dos lugares conocidos, dibujar un plano, un mapa o construir una maqueta de un espacio conocido, orientar un mapa con respecto a puntos de referencia fijos en la realidad, o con respecto a los puntos cardinales. También incluimos las situaciones que requieren que el alumno lea, construya o utilice un sistema de coordenadas para estudiar las diferentes características de un espacio. Por ejemplo, incluimos tareas donde se requiere que el alumno defina un lugar en un mapa por medio de coordenadas cartesianas o polares, o de dibujar un itinerario descrito verbalmente a través del uso de coordenadas.

Observamos que al abordar algunas situaciones de “Orientación del sujeto en espacios reales” se requiere conectar el esquema corporal al espacio físico circundante, trabajando otro aspecto de dicho conocimiento. Por ejemplo, en la descripción de un itinerario dibujado en un mapa (sin el uso de los puntos cardinales) es necesario conocer el propio esquema corporal (izquierda-derecha, arriba-abajo, delante-detrás), proyectarlo en el personaje imaginario que recorre el itinerario representado, y conectarlo con los puntos de referencia presentes en el mapa (edificios, cruces,...).



Siguiendo las ideas de las “matemáticas realistas” de la escuela holandesa, Hershkowitz, Parzys y Van Dormolen (1996) afirman que la geometría euclidiana empieza con la orientación en el espacio real, esto es, el entorno del cual los estudiantes forman parte. Afirman que “la experiencia en el espacio comprende la posición relativa de los objetos en el espacio y la posición relativa de los objetos en relación con la posición de un observador respecto de dichos objetos” (p. 177). Estos autores subrayan que para adquirir un modo de pensamiento y de razonamiento visual es necesaria una educación visual bien planeada y sugieren interesantes tareas de interpretación de mapas y planos.

Un trabajo muy interesante que trata sobre el tema de la orientación del sujeto en espacios reales es el de Galvez (1985). En el capítulo 5, la autora describe una secuencia de situaciones didácticas para el aprendizaje de la orientación en el espacio urbano. Parte de la hipótesis de que, para trabajar con mapas, hay que aprender a orientarlos con respecto al espacio físico que representan. Las situaciones didácticas que describe en este capítulo están destinadas a promover el aprendizaje de la elaboración y uso de mapas del espacio circundante al ámbito escolar.

Otro trabajo que presenta interesantes problemas de elaboración e interpretación de planos y mapas es de Berthelot y Salin (1993). Las actividades que proponen surgen del cumplimiento de tres condiciones: la necesidad de utilizar un plano para resolver el problema, que el tamaño del espacio sea lo suficiente grande para que no se pueda abarcar con una única mirada y, por último, que el espacio sea el más indiferenciado posible (con pocos elementos identificables en el mapa) para que los alumnos tengan que tomar consciencia de la necesidad de un sistema de referencia y de su control.

Weill-Fassina y Rachedi (1993) analizan cómo adultos de bajo nivel escolar localizan en un plano de un edificio el punto donde se sitúan. En el análisis a priori de las tareas identifican tres grandes etapas de la localización espacial: 1) la macro-localización, o sea la localización de los objetos característicos, elementos del plano o materiales de percepción más saliente, 2) la orientación, o sea la puesta en congruencia de los dos espacios (el plano con el espacio físico) y la coordinación de los puntos de vistas, y 3) la micro-localización, o sea la búsqueda de elementos de localización finos para localizar el elemento requerido.

Sbaragli (2003), analizando algunas experiencias que tuvieron profesores de diferentes niveles escolares, propone actividades relacionadas con el espacio y las figuras. Sugiere que los alumnos de los primeros niveles educativos empiezan con actividades “corporales”, en el espacio real, para seguir en una representación tridimensional de tamaño reducido como puede ser la construcción de una maqueta, donde el niño no ejecuta la actividad con su propio cuerpo sino la gestiona desde el “exterior”. Solo después de las actividades en el espacio tridimensional se puede pasar a actividades en el plano, al “dibujo”. Subraya la importancia de jugar entre el espacio tridimensional y el bidimensional en todos los años de la escuela primaria.

Berthelot y Salin (1992, pp. 325-326) diferencian tres tipos de situaciones que requieren el uso de planos y mapas: la exploración de lugares desconocidos (que puede servir para elaborar un propio plano), el desplazamiento en un espacio (los planos dan las informaciones necesarias para determinar el propio itinerario) y la comunicación de una localización precisa (con planos en escalas). También se diferencian las situaciones que requieren comunicar informaciones espaciales sin un plano o con un plano.

Siguiendo estas ideas vamos a distinguir tres tipos de estímulos iniciales:

- Espacio real: tareas donde la acción del sujeto transcurre en el presente o ya ha sido realizada en el espacio real sin el apoyo de ningún tipo de representación del espacio.
- Representación espacial: tareas donde el sujeto no realiza físicamente una acción sino que sólo interpreta la información contenida en el mapa sin navegación física del espacio y sin

tener una referencia física al espacio representado.

- Espacio real y representación del espacio físico: tareas donde el sujeto realiza o ha realizado la acción en un espacio físico y dispone de una representación de dicho espacio.

Observamos que las acciones iniciales requeridas para resolver la tarea están asociadas al estímulo inicial.

Hemos distinguido entre cuatro tipos de respuesta, independientes del estímulo inicial:

- De representación: el sujeto tiene que representar un espacio y/o un trayecto en dos o tres dimensiones.
- De localización de objetos y personas: el sujeto debe localizar un objeto o una persona en mapas, planos con o sin el uso de un sistema de coordenadas.
- De descripción (verbal) de trayectos o posiciones.
- Física: orientar la representación del espacio (de acuerdo a los puntos cardinales, de acuerdo a objetos fijos en la realidad), ejecutar físicamente trayectos, ubicar físicamente objetos o personas en el espacio.

Resumimos en la tabla 2 la clasificación propuesta.

Estímulo inicial	Acción inicial	Tipo de respuesta
Espacio real	Explorar el espacio (con movimiento)	De representación: <ul style="list-style-type: none"> • del espacio: construir maquetas, dibujar mapas/planos • de trayectos
	Observar espacios, trayectos,... (sin movimiento)	De localización de objetos y personas: <ul style="list-style-type: none"> • en un mapa/plano/maquetas • con coordenadas
Representación Espacial	Interpretar información gráfica (localizar elementos, leer trayectos, interpretar sistemas de coordenadas,...)	De descripción (verbalmente): <ul style="list-style-type: none"> • trayectos • posiciones
Espacio real + representación del espacio	Relacionar el espacio con su representación espacial	Física: <ul style="list-style-type: none"> • orientar la representación del espacio (de acuerdo a los puntos cardinales, de acuerdo a objetos fijos en la realidad) • ejecutar trayectos • ubicar objetos o personas en el espacio

Tabla 2. Clasificación de las tareas de orientación del sujeto en espacios reales

Podríamos también considerar como variables de las tareas el tipo de representación del espacio: 2D (planos, mapas, fotos,...), 3D (maqueta) y el tamaño del espacio real. Observamos que en muchos casos la respuesta a la tarea involucra también una acción y que para resolver una tarea se pueden necesitar varias acciones.

A continuación, vamos a dar algunos ejemplos prototípicos de tareas pertenecientes a esta familia de actividades encontrados en la literatura, en libros de texto o en otro material instruccional. Observamos que en los libros de textos de primaria¹ se encuentran exclusivamente tareas de

¹ Hemos revisado las colecciones de textos de primaria (de 1º a 6º curso) de las editoriales Santillana, SM y Anaya (ediciones de años entre 2006 a 2009).



interpretación de información gráfica, sin un referente físico. Se trabaja entonces una orientación puramente “mental”.

Para mostrar la gran variedad de situaciones de orientación del sujeto en espacios reales que se pueden proponer a alumnos de primaria, vamos a dar algunos ejemplos prototípicos, clasificados según la acción inicial requerida para su resolución (ver tabla 2), es decir: explorar el espacio (con movimiento físico), observar espacios, trayectos,... (sin movimiento físico), interpretar información gráfica, relacionar el espacio con su representación espacial. También analizaremos brevemente los conocimientos principales puestos en juegos en la resolución de las tareas.

5.1. Explorar el espacio

Ejemplo 9: “El maestro lleva a los niños de visita al parque de bomberos. Por el camino hablan acerca de las casas y las tiendas por las que pasan. Al volver a la escuela crean una maqueta de la ciudad utilizando bloques” (Wiegand, 2006, p. 93).

En esta tarea se requiere que el alumno organice la información de un espacio que se ha recorrido previamente para construir con bloques una representación tridimensional. Observamos que el tipo de repuesta requerida es de representación (construcción de maqueta). Se podría variar la tarea pidiendo la representación plana sin la ayuda de los bloques, o señalar en la representación el recorrido seguido durante el paseo. Estas variaciones supondrían un nivel superior de dificultad al perderse una de las dimensiones.

5.2. Observar espacios, trayectos,... (sin movimiento)

Ejemplo 10. Se presentan 16 cajas de cerillas sobre una mesa grande cuadrada colocada en una habitación totalmente vacía y puesta de manera que sus lados estén inclinados 45 grados con respecto a las paredes de la sala. Se disponen las cajas, cuatro por cada lado, paralelas a los bordes de la mesa. El profesor pone un bloque lógico diferente (que los alumnos saben representar) en cada caja y las deja abiertas. Los chicos observan el contenido de cada caja y tienen que recoger información (dibujar planos, escribir,...) para que el día siguiente, una vez que las cajas han sido cerradas, puedan describir el contenido de tres cajas señaladas por el profesor (Berthelot y Salin, 1993, pp. 96-97).

La situación ha sido construida para que los chicos tengan la necesidad de considerar (y representar) un elemento externo a la situación (por ejemplo las ventanas, la puerta, un cuadro,..) para poder orientar correctamente su plano y poder localizar los elementos y su posición el día siguiente. Una dificultad asociada a la interpretación del mapa es la puesta en congruencia del espacio físico con el espacio representado.

Berthelot y Salin (1992) describen los conocimientos necesarios para la realización de un plano: la determinación de un sistema de referencia pertinente, la necesidad de articular los diferentes planos obtenidos por la representación de los espacios locales situados alrededor de los puntos de referencia y, por último, la representación de los desplazamientos y su coordinación en el espacio considerado. Observan que en la realización de un plano local o un mapa global, el control de la orientación relativa entre los diferentes elementos representados es esencial. También hacen remarcar que los conocimientos que se ponen en juego dependen de la naturaleza del problema (por ejemplo, si queremos representar un plano para orientar a un amigo tenemos que respetar por lo menos las propiedades topológicas y afines del espacio) y de las características del espacio considerado. No pueden faltar las informaciones que permitan al lector del plano orientarlo con respecto a la realidad.

5.3. Interpretar información gráfica

Ejemplo 11 (figura 8): Almudena sale de su casa en la C/ Gato, va hasta el cruce con la C/ Delfín y gira a la derecha en dirección a la plaza. En la plaza coge la C/ Foca hasta el cruce con la C/ Oso, donde está la casa de su amiga Begoña. ¿Qué número corresponde a la casa de Almudena? ¿Y a la casa de Begoña? (Ferrero, 2006, p. 209).

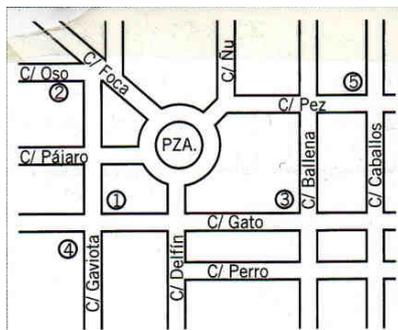


Figura 8. Mapa de un barrio

En esta tarea es importante la coordinación de la orientación del sujeto (su derecha, su izquierda,...) y del espacio representado en el dibujo (las calles, los números,...).

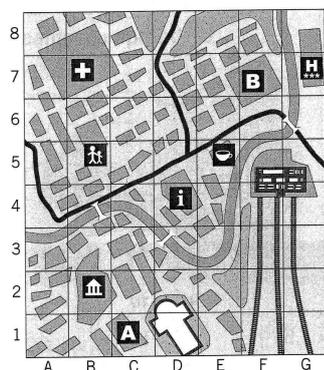
Por lo que se refiere a los sistemas de referencia en la descripción de un itinerario de acuerdo a un mapa Gálvez (1985) piensa que el sujeto debe ser capaz de disociar al menos dos sistemas de referencia:

- El sistema ligado a su propio esquema corporal y proyectado por traslación sobre el papel y
- El sistema correspondiente a la proyección del esquema corporal de un móvil que se desplazaría a lo largo del itinerario que se trata de describir

Observamos que, en la tarea propuesta, Almudena representa un móvil con su esquema corporal que se desplaza siguiendo el itinerario descrito (la derecha y la izquierda dependen del sentido del trayecto seguido).

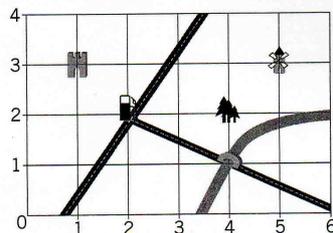
Ejemplo 12 y 13 (figuras 9 y 10; Ferrero 2006, p. 212 y p.207, respectivamente).

Observa el plano y contesta.



- a) Indica las casillas en las que se localizan: **i** **A** **+**
- b) ¿Qué edificios hay en las casillas (B, 5), (F, 7) y (G, 7)?

Fíjate en el plano y completa en tu cuaderno.



- MOLINO → (5, 3)
- GASOLINERA → (... , ...)
- CASTILLO → (... , ...)
- → (4, 1)
- CASTILLO → (... , ...)

Figuras 9 y 10. Tareas de interpretación de un sistema de coordenadas



Estas dos tareas de localización de edificios en un plano se diferencian por el tipo de sistemas de coordenadas. En el ejemplo 12 (figura 9) se utiliza un sistema de intervalos alfa-numérico, donde cada letra y cada número designa un intervalo, y el par letra número designa una región. Por otra parte, el ejemplo 13 (figura 10) utiliza el clásico sistema cartesiano de representación de puntos en un plano, de forma que cada punto del plano viene determinado por un par de números (abscisa y ordenada). Por lo tanto, en el primer caso un elemento se sitúa en una (o más) regiones, mientras que en el segundo un elemento viene localizado por un punto (dos coordenadas). Conocer las diferencias entre los dos sistemas es fundamental a la hora de planificar las tareas.

5.4. Relacionar el espacio con una representación espacial

Ejemplo 13. “Búsqueda de un objeto escondido en una mesa usando un registro hecho en un plano del aula”. Mientras un alumno sale del salón otro esconde un objeto en una mesa y marca dicha mesa sobre un plano del aula que el maestro ha reproducido en una hoja de papel (que tiene cada niño). Entra el alumno que estaba fuera e interpretando el plano tiene que encontrar el objeto escondido. (Galvez, 1985, pp. 64-65).

Fijando la atención en el alumno que estaba afuera, el tipo de respuesta sería de localización física (respuesta física, ubicar objetos, ver tabla 2). Variando el tipo de respuesta, el número de cajas y/o su disposición se pueden obtener otras tareas.

Berthelot y Salin (1992) describen los conocimientos principales implicados en la lectura de un plano: poner en relación los elementos del plano con sus correspondientes en la realidad (se necesita conocer el código utilizado por el autor del plano) y orientar el plano materialmente o mentalmente.

Observamos que en las tareas donde se requiere la interpretación o el uso de una representación gráfica de la realidad (plana o tridimensional) es necesario hacer una correspondencia entre el objeto (o la situación) representado y la representación (modelización). Esta correspondencia realidad-modelo requiere la habilidad de interpretar, comprender y crear relaciones y analogías entre la representación de la realidad y la realidad, o entre dos representaciones diferentes de la realidad. Berthelot y Salin (1993) afirman que la resolución de un problema por modelización implica el establecimiento de una cierta relación entre dos mundos: el mundo sensible y un modelo, sistema simbólico dotado de reglas internas que permiten construir, a partir de objetos iniciales y de relaciones iniciales, nuevos objetos y nuevas relaciones validas.

En Clements (2004) y en Weill-Fassina y Rachedi (1993) se identifican dos grandes dificultades relacionadas con la interpretación de planos y mapas:

- Dificultad para orientar un mapa a través de elementos en la realidad (dificultad para considerar y poner en congruencia dos sistemas de referencia diferentes).
- Dificultad para comprender el lenguaje simbólico (dificultad para entender que un mapa representa sólo algunos aspectos de la realidad y no es la realidad en miniatura).

Observamos que esta familia de actividades tiene evidentes relaciones con situaciones diarias. Por lo tanto, sería una fuerte limitación restringir el tema únicamente a las actividades de interpretación de información gráfica presentadas usualmente en los libros de textos y olvidar la importancia y el interés de trabajar con un referente real, en un espacio que los estudiantes puedan recorrer y explorar.

6. Reflexiones finales

En este trabajo hemos propuesto una clasificación de tareas, relacionadas con la orientación y visualización de espacios y objetos tridimensionales, encontradas en las investigaciones y en los libros de texto. Esta lectura nos ha permitido poner de manifiesto la riqueza y diversidad de las tareas presentes así como los conocimientos que se ponen en juego y las potenciales dificultades asociadas a las mismas.

La distinción entre tres tipos de familias de tareas de visualización y orientación espacial puede ayudar a los profesores en la planificación de clases que cubran los diferentes aspectos del tema y que incluyan trabajos manipulativos y físicos. Las clasificaciones detalladas de las familias 2 y 3, presentadas en las tablas 1 y 2, pueden ser útiles para diseñar variaciones interesantes de las tareas: cambiando el estímulo inicial de una tarea o el tipo de respuesta se pueden obtener diferentes actividades que estimulan más aspectos de una misma acción.

Observamos que frecuentemente en los cursos de matemáticas el tema de la orientación y visualización de espacios y objetos tridimensionales es poco tratado o planteado como actividad recreativa. Las tareas que se encuentran en los libros de textos reflejan este escaso interés y cubren parcialmente los aspectos principales del tópico: se trabaja únicamente con representaciones planas de objetos y espacios sin hacer una referencia a los objetos y espacios reales que representan, no se trabaja en espacios conocidos sino con representaciones de espacios ficticios y personajes imaginarios.

Situaciones de visualización y orientación espacial podrían ser presentadas no sólo en el ámbito matemático, sino también en otras asignaturas, como pueden ser la geografía, el dibujo técnico y la educación física. En matemáticas el niño puede abordar tareas como las que hemos descrito en este trabajo; en geografía el niño se puede enfrentar a situaciones relacionadas con la lectura y elaboración de materiales cartográficos, que podrían ser incentivadas yendo al descubrimiento de nuevos espacios. En el dibujo técnico el niño podrá aprender los procedimientos de la proyección y los convencionalismos de representación, mientras que en educación física podrá experimentar la orientación de su propio cuerpo con actividades motrices. Observamos así que en la escuela primaria el tema podría ser tratado de manera interdisciplinar.

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (MCINN), España y de la Beca FPU, AP2008-04560.

Bibliografía

- Alberti, C. (2004). L'organizzazione dello spazio fisico rispetto al soggetto. En C. C. Bozzolo y A. Costa (Eds.), *Nel mondo della geometria, Vol. 1. L'orientamento spaziale*. Trento: Erickson.
- Almodovar, A. y García, P. (2009). *Matemáticas 5: Primaria*. Madrid: Santillana.
- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Battista, M. T. y Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (3), 258-292.
- Ben-Chaim, D., Lappan, G. y Houang, R. T. (1988). The effect of instruction on spatial visualization skills of middle school boys and girls'. *American Educational Research Journal*, 25(1), 51-71.



- Berthelot, R. y Salin M. H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Tesis doctoral, Université de Bordeaux I.
- Berthelot R. y Salin M. H. (1993). Conditions didactiques de l'apprentissage des plans et cartes dans l'enseignement élémentaire. En A. Bessot y P. Verrillon (Eds.), *Espaces graphiques et graphismes d'espaces*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Bishop, A. (1983). Space and geometry. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and process* (pp. 175-203). New York: Academic Press.
- Clements, D. H. (2004). Geometric and spatial thinking in early education. En D. H. Clements y J. Sarama (Eds.), *Engaging your children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Mahawah, NY: Erlbaum.
- Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, 37 (6), 14-20.
- Ferrero, L. (2006). *Matemáticas 6: Primaria, tercer ciclo*. Madrid: Anaya.
- Ferrero, L. (2008). *Matemáticas 4: Primaria, segundo ciclo*. Madrid: Anaya.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 2, 139-162.
- Galvez, G. (1985). *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano: Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria*. Tesis doctoral, Centro de Investigación del IPN Mexico.
- García, J. J. (2009). *Estimular la orientación espacial, Nivel 1-2-3-4*. Madrid: Grupo Gesfomedia.
- Gaulin, C. (1985). The need for emphasizing various graphical representations of 3-dimensional shapes and relations. En L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the 9th P.M.E. Conference*, 2, 53-71.
- Gorgorió, N. (1996): Choosing a visual strategy: The influence of gender on the solution process of rotation problems. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 3-19. Valencia: Universidad de Valencia.
- Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 207-231.
- Gutiérrez, A. (1996a). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 3-19. Valencia: Universidad de Valencia.
- Gutiérrez, A. (1996b). Children's ability for using different plane representations of space figures. En A. R. Batturo (Ed.), *New directions in geometry education* (pp. 33-42). Brisbane: Centre for Math. and Sc. Education, Q.U.T.
- Hershkowitz, R., Parzysz, B. y Van Dormolen, J. (1996). Space and shape. En A. J. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education, Vol 1* (pp. 161-204). Dordrecht: Kluwer.
- Lappan, G., Phillips, E. D. y Winter, M. J. (1984). Spatial visualization. *Mathematics Teacher*, 77, 618-23.
- Lurçat, L. (1979). *El niño y el espacio: la función del cuerpo*. México D.F.: Fondo de Cultura Económica.
- Malara, N. (1998). On the difficulties of visualization and representation of 3D objects in middle school teachers. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME International Conference*, 3, 239-246.
- Mesquita, A. L. (1992). The types of apprehension in spatial geometry: sketch of a research. *Structural Topology*, 18, 19-30.
- Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria.
- Mitchelmore, M. C. (1978). Developmental stages in children's representation of regular solid figures. *The Journal of Genetic Psychology*, 133, 229-239.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). Principles and standards for school mathematics. National Council of Teachers of Mathematics. Edición electrónica: <http://standards.nctm.org/>
- Parzysz, B. (1988). 'Knowing' vs 'seeing'. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 79-92.

- Piaget, J. y Inhelder, B. (1967). *The Child's Conception of Space*. New York: W.W. Norton.
- Pittalis, M., Mousoulides, N. y Christou, C. (2009). Level of sophistication in representing 3D shapes. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*, 385-392. Thessaloniki: PME.
- Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 205-235). Dordrecht: Sense Publishers.
- Sbaragli, S. (2003). Un "percorso" in verticale: lo spazio e le figure. En Autori Vari (2003), *Il curricolo di Matematica dalla scuola dell'infanzia alla secondaria superiore* (pp 73-120). Bologna: Pitagora.
- Weill-Fassina, A. y Rachedi, Y. (1993). Mise en relation d'un espace réel et de sa figuration sur un plan par des adultes de bas niveau de formation. En A. Bessot y P. Vérillon (Eds.), *Espaces graphiques et graphismes d'espaces* (pp. 57-86). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Wiegand, P. (2006). *Learning and teaching with maps*. London: Routledge.

Margherita Gonzato, becaria del Programa de Formación de Profesorado Universitario (FPU) del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Email: mgonzato@ugr.es

Teresa Fernández Blanco, Profesora Titular de Escuela Universitaria de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Santiago de Compostela.

Juan Díaz Godino, Catedrático de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Página web: <http://www.ugr.es/local/jgodino>

