NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 77, julio de 2011, páginas 119–126

Jugando con teselas

José Muñoz Santonja (Instituto de Enseñanza Secundaria Macarena. Sevilla)
Juan Antonio Hans Martín (Colegio Sta. Mª de los Reyes. Sevilla)
Antonio Fernández-Aliseda Redondo (Instituto de Enseñanza Secundaria Majuelo. Sevilla)
Grupo Alquerque - Sevilla

Fecha de recepción: 5 de febrero de 2011
Fecha de aceptación: 24 de febrero de 2011

Resumen Estamos acostumbrados a pasear en nuestras ciudades por encima de mosaicos de muy diversas formas. El estudio del recubrimiento del plano ha llevado al desarrollo de múltiples formas de unir piezas más o menos regulares sin que dejen ningún hueco entre ellas. En algunos casos nos encontramos con una serie de teselas creadas por personajes como Robinson o Penrose que dan mucho pie para presentarlas como juegos que pueden ser manipulados por cualquier persona. Al estudio de esas teselas hemos dedicado este artículo.

Palabras clave Mosaicos, geometría, juegos, recubrimiento del plano, teselas.

Abstract We are accostumed to walk in our cities on very different mosaics. The study of the lining of the plane has led to the development of multiple ways of joining more or less regular parts, without leaving any gap among them. In some cases we find a series of tiles created by people as Robinson or Penrose that can be presented as games that can be manipulated by anyone. We have dedicated this article to the study of these tiles.

Keywords Mosaics, geometry, games, coating plane, tilings.

1. Introducción

Casi desde que el hombre comenzó a construir con sus manos y a realizar construcciones duraderas, uno de los aspectos que más ha cuidado ha sido el de unir elementos para teselar de la forma más eficiente posible el plano. Hay muchos restos que nos indican la perfección que se buscaba en ese trabajo. Por ejemplo, las calzadas romanas construidas uniendo piezas que ajustaban de forma que no hubiesen resquicios para que una pata de un caballo o una rueda pudiesen sufrir percances, y que hoy en día siguen permitiendo su paso sin dificultad. O esos trabajos más elaborados como son los mosaicos en los que el objetivo era unir una serie de piezas para conseguir cubrir un plano con unos vistosos y originales dibujos.

Poco a poco los mosaicos fueron convirtiéndose en la unión perfecta de piezas que se pudieran repetir de forma periódica y los científicos y artistas comenzaron a estudiar todas las posibilidades de rellenar el plano. Así, los artistas árabes llegaron a utilizar todos los grupos cristalográficos posibles en las paredes de la Alhambra.

Ese objetivo de recubrir de una forma periódica el plano ha llegado hasta nuestros días de una forma cotidiana. Si nos fijamos en nuestras calles, es usual que las aceras y calles estén llenas de mosaicos de diversos tipos. Ya sabemos que solo existen tres polígonos regulares que recubren el plano: triángulo, cuadrado y hexágono. Por eso es fácil encontrarnos, al menos con cuadrados y hexágonos en las teselas que forman las aceras, como vemos en la Figura 1, en donde además podemos ver rectángulos.

Figura 1

Pero no sólo los polígonos regulares adornan nuestros suelos, podemos encontrar teselas, obtenidas en general por transformaciones de esos polígonos regulares u otros polígonos, que se repiten periódicamente para cubrir cualquier extensión que queramos. Podemos ver dos ejemplos en las Figuras 2 y 3.

Figura 2

Figura 3

Con esa misma idea muchos artistas han buscado la forma de recubrir el plano de una forma periódica y bella. Para los matemáticos siempre ha sido muy especial la obra de M. C. Escher. En la Figura 4, *Mariposas* (1948, tinta y acuarela), podemos ver un recubrimiento del plano utilizando la misma pieza, aunque coloreada de distintas maneras.

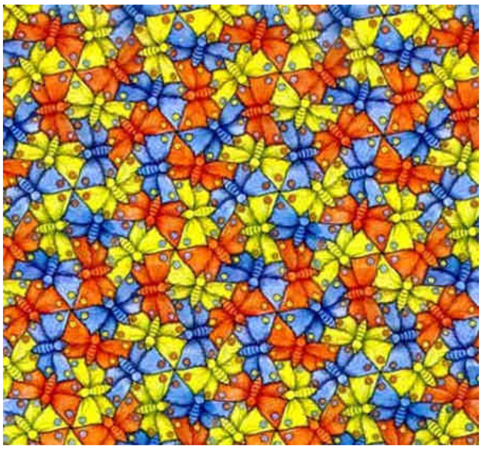

Figura 4

2. La búsqueda de teselas aperiódicas

Aunque la existencia de mosaicos aperiódicos se conoce desde hace tiempo, no es hasta principios de los años 60 en que el estadounidense de origen chino Hao Wang, profesor de la Universidad de Harvard, comienza a estudiar el recubrimiento aperiódico del plano utilizando una serie de cuadrados de lado unidad con las aristas coloreadas, que él llamo *dominós*, y que se unían de forma que coincidieran los colores de las aristas, sin permitir giros o reflexiones. Wang conjeturó que si era posible encontrar una serie de dominós que recubrieran el plano de forma aperiódica, también lo harían de forma periódica.

En 1966, el alumno de Wang, Robert Berger, demostró que la conjetura era falsa cuando encontró un grupo de 20.426 dominós que recubrían el plano sólo de forma aperiódica. Fue el primero en encontrar este tipo de teselas exclusivamente aperiódicas. Más adelante consiguió reducir el número de teselas considerablemente, hasta las 104 y otros matemáticos redujeron ese número hasta llegar a las personas de las que vamos a hablar, Raphael Robinson y Robert Ammann que redujeron el número sólo a seis teselas, aunque en ellas si se permitían los giros y reflexiones.

Nosotros utilizamos estas teselas como puzzles, ya que unir las piezas sin dejar ningún hueco es un juego apasionante y nada inmediato. Su construcción en cartón o madera no es excesivamente difícil, y un buen ejercicio para las clases de Tecnología donde se puede plantear como un proyecto conjunto entre ese departamento y el de Matemáticas. Pero además su resolución, es decir, el encajar adecuadamente las teselas es un buen problema geométrico para trabajar la Resolución de Problemas. De entrada representa un desafío al que es difícil sustraerse, donde las reglas y el objetivo son fácilmente comprensibles, por lo que todo el mundo se presta de forma autónoma a intentar resolverlo; no deja bloqueado, pues al tener la posibilidad de manipular las piezas el primer acercamiento es de ensayo y error, pero permite reflexionar sobre la geometría particular de cada pieza y avanzar hacia su resolución y, por último, proporciona gran satisfacción a quien lo resuelve.

3. Teselas de Robinson

El matemático estadounidense Raphael Robinson Mitchell (1911-1995) fue profesor de la Universidad de Berkeley. Aunque su tesis doctoral trataba sobre análisis complejo, a lo largo de su vida desarrolló sus estudios en otras ramas, como por ejemplo, en teoría de números, geometría y combinatoria.

Fue uno de los pioneros en la utilización de ordenadores para localizar resultados en Teoría de Números.

Figura 5

Se casó con una de sus estudiantes, la famosa matemática estadounidense Julia Hall Bowman, que fue la primera mujer en ser presidente de la Asociación Americana de Matemáticas.

A partir del trabajo de Berger, consiguió construir en 1971 un conjunto de seis teselas que recubrían el plano de forma aperiódica. En las siguientes imágenes podemos ver las seis teselas de Robinson y una de sus soluciones, de las que nosotros hemos encontrado, al menos, cinco.

Figura 6

Figura 7

En la Figura 8 se puede ver un recubrimiento[1] no periódico del plano utilizando las teselas de Robinson.

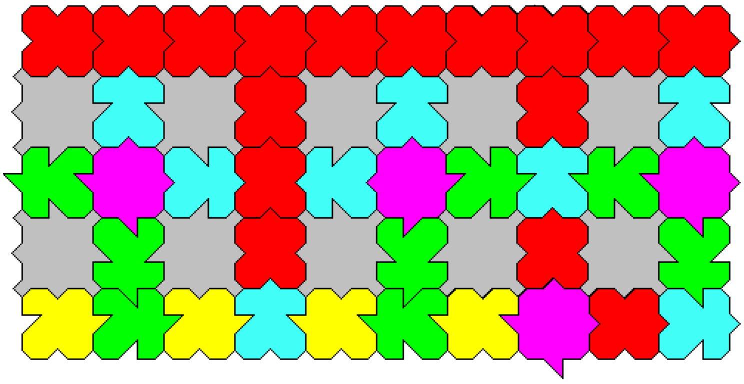

Figura 8

4. Teselas de Ammann

Casi de forma simultánea a Robinson, el matemático aficionado y empleado de Correos Robert Ammann (1946-1994), encontró otra serie de seis teselas que también recubrían el plano de forma aperiódica. Investigó además en la teoría de los cuasicristales. Tuvo una fluida correspondencia con el matemático y divulgador Martin Gardner a raíz de la publicación por parte de este último de un artículo sobre los trabajos de Penrose.

Las teselas que creó Ammann y una de sus variadas soluciones las vemos en las Figuras 9 y10

Figura 9

Figura 10

[1] La imagen está tomada de la página http://www.spsu.edu/math/tile/aperiodic/index.htm en la que aparecen varios mosaicos aperiódicos.

Si las comparamos con las de Robinson, vemos que en estas últimas hay tres tipos distintos de puntos de enlace, mientras que en las anteriores solo había dos.

En la Figura 11 vemos un recubrimiento del plano utilizando estas teselas.

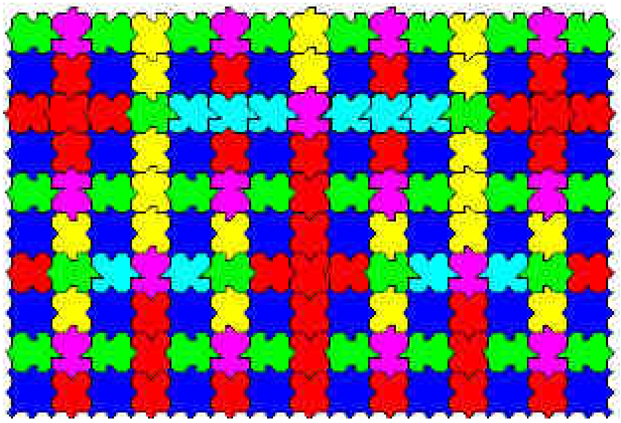

Figura 11

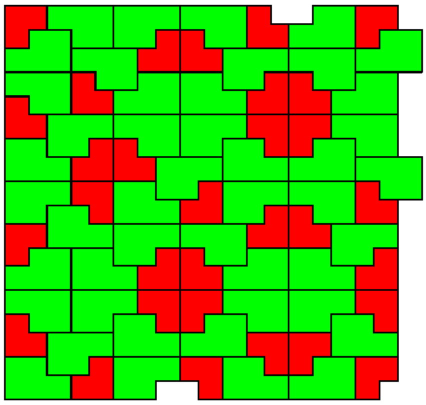

Figura 12

Dado que una de sus aficiones principales fueron las teselaciones aperiódicas, Ammann también encontró otra forma de teselar el plano utilizando dos piezas con la característica de que la relación entre los lados desiguales de las piezas es el número de oro. Podemos verlo en la Figura 12.

5. Teselas de Alquerque

La dificultad de resolución de los dos puzzles anteriores era alta, a pesar de haber varias soluciones posibles; lo habíamos comprobado en los salones de juegos o cuando sacábamos dichos rompecabezas a la calle. Por ello nos planteamos la posibilidad de crear, en la misma línea, unas teselas más simples.

Para ello decidimos utilizar un solo tipo de enganche entre las piezas y jugamos con la combinatoria. Así construimos todas las piezas posibles que tenían desde una punta hasta las cuatro. Obtuvimos las que llamamos Teselas de Alquerque, que son más simples de resolver aunque solamente tienen dos soluciones posibles, salvo giro o simetría, mientras que los otras teselas tienen más soluciones. En las siguientes imágenes tenemos el puzzle y una de las dos soluciones.

Figura 13

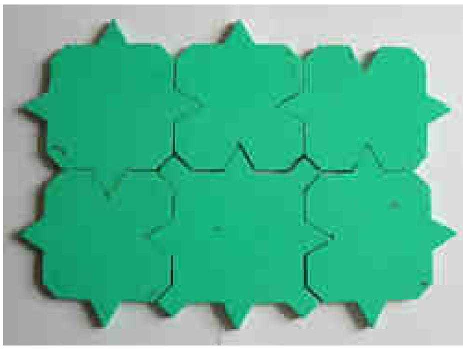

Figura 14

A continuación podemos ver un recubrimiento del plano utilizando estas teselas.

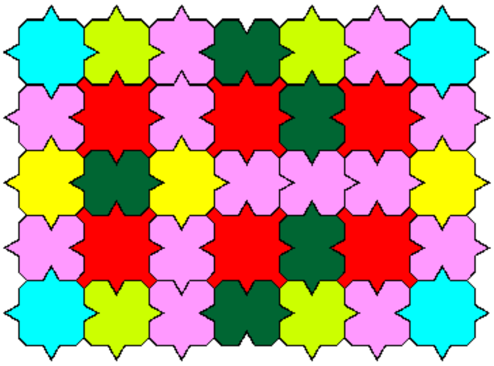

Figura 15

6. Teselas de Penrose

Los tres conjuntos de teselas que hemos visto anteriormente siguen la misma línea. Básicamente partimos de cuadrados en cuyos lados incluimos entrantes o salientes de forma más o menos aleatoria y existe una pieza que lleva en los cuatros vértices los cuadraditos que permiten no dejar huecos al unir las piezas. Pero para acabar el artículo vamos a ver un conjunto, también de seis teselas, que rompe los esquemas que hemos seguido hasta el momento.

Una de las personas que más ha estudiado la forma de recubrir el plano ha sido el matemático inglés Sir Roger Penrose.

Roger Penrose (Reino Unido, 1931), es físico y matemático y profesor emérito de la Universidad de Oxford y recibió en 1994 el título de Sir. Es miembro de la Royal Society de Londres y en 1988 se le concedió el Premio Wolf de física junto con Stephen Hawking.

Gran aficionado a las paradojas y a los rompecabezas, trabó amistad en 1954 con el pintor M. C. Escher y a partir de su relación Penrose se interesó por las figuras imposibles, creando por ejemplo el triángulo imposible o tribarra, y los recubrimientos del plano.

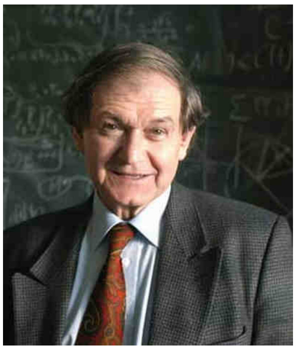

Figura 16

A Penrose se deben mosaicos de muy diverso tipo, por ejemplo, creó lo que se conoce como “carretilla de Penrose” que podemos ver en la Figura 17 o los llamados “Pollos de Penrose”, en la Figura 18, formado por dos piezas que recubren el plano de forma aperiódica.

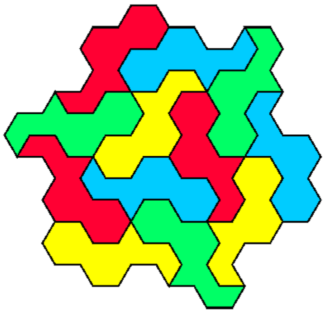

Figura 17

Figura 18

A mediados de los años 70 del pasado siglo, Penrose construyó un conjunto de seis teselas[2] partiendo de tres pentágonos regulares, un rombo, una estrella de cinco puntas y una media estrella, a los que modificó con entrantes y salientes para que pudieran engarzar correctamente. De esta manera creó las teselas de la Figura 19 que recubren el plano aperiódicamente como podemos ver en la Figura 20.

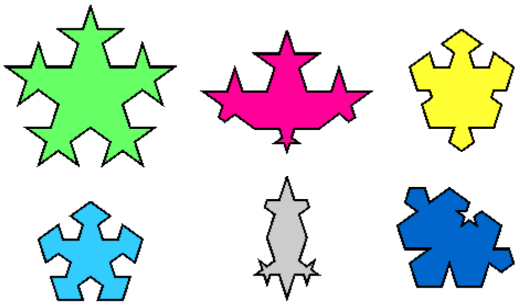

Figura 19

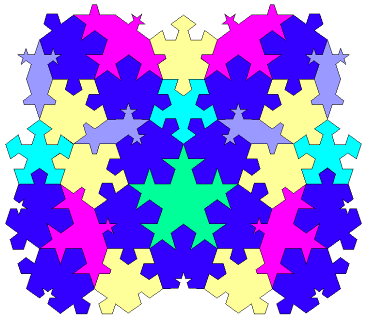

Figura 20

Posteriormente, consiguió dividir las teselas y generar el mosaico a partir de dos piezas simples. En concreto partiendo de dos cuadriláteros, uno cóncavo y otro convexo, llamados dardo (o flecha) y cometa que podemos ver en la Figura 21.

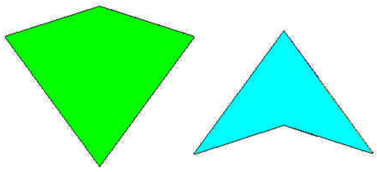

Figura 21

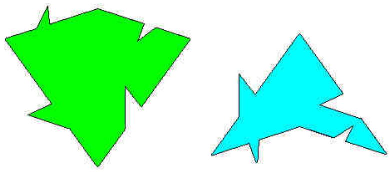

Figura 22

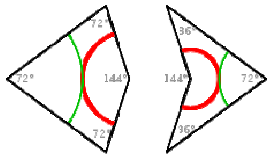

Figura 23

Como los dos cuadriláteros unidos pueden formar un rombo, con lo que se cubría el plano de forma periódica, Penrose propuso modificar las piezas para forzar el recubrimiento aperiódico y construyó las piezas que aparecen en la Figura 22. Por último, el matemático inglés John Conway, que fue quien los nombró como dardo y cometa, planteó dibujar dos semicírculos de colores distintos, como puede verse en la Figura 23, de forma que, al teselar, no se pudieran unir líneas de distinto color.

En las dos imágenes siguientes vemos una teselación del plano con estas dos piezas y un mosaico en un banco público en Ámsterdam.

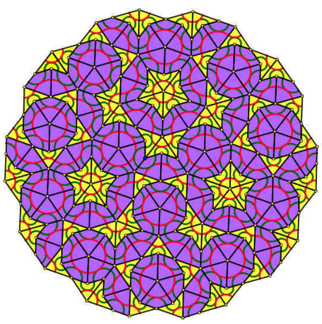

Figura 24

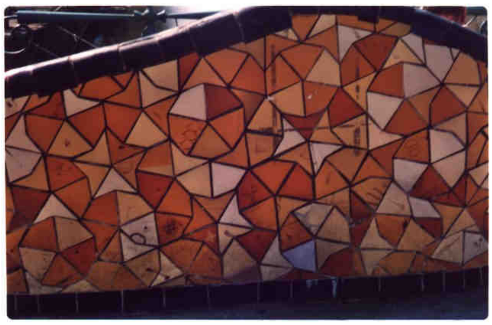

Figura 25

[2] Un estudio sobre las teselas de Penrose podemos encontrarlo en la siguiente dirección: http://cumincades.scix.net/data/works/att/11ed.content.pdf

Hemos nombrado, pero no hemos mostrado las soluciones a estos puzzles, tareas que os ponemos como deberes y entretenimiento. Si estáis interesados en las plantillas para construir los puzzles mencionados se pueden descargar en formato PDF en la página web del Grupo Alquerque: http://www.grupoalquerque.es/

Bibliografía web

Los mosaicos y su clasificación:
http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/mosa.htm.
http://www.imposible.cl/dru/?q=node/33
http://roble.pntic.mec.es/jarran2/cabriweb/Mosaicos/mosaicos.htm

Los mosaicos con Geogebra:
http://jmora7.com/Mosaicos/index.html
http://jmora7.com/Onda/OndaGG/index1.htm

Mosaicos semirregulares:
http://usuarios.multimania.es/acericotri/mosasemi.htm

Un mosaico para Dubai (comunicación en congreso).
http://www.caminos.upm.es/matematicas/Fdistancia/MAIC/CONGRESOS/JORNADAS%201/126%20Comunicaci%C3%B3n%20TESELACIONES%20DUBAI.pdf

José Muñoz Santonja, catedrático de Secundaria en el IES Macarena en Sevilla, autor de los libros “Newton. El umbral de la Ciencia Moderna” y “Ernesto el aprendiz de matemago” en la editorial Nivola. Coautor del libro “Lectura matemática de un periódico” en la editorial Aljibe. Miembro del comité de dirección de la revista UNO. Durante los cuatro primeros años ha llevado la sección “¡Esto no es serio!” en la revista UNION editada por la FISEM.

Juan Antonio Hans Martín, profesor de Secundaria en el C.C. Sta. Mª de los Reyes, Torreblanca, Sevilla.

Antonio Fernández-Aliseda Redondo, profesor de Secundaria en el IES El Majuelo, Castilleja Sevilla. Coautor del libro “Lectura matemática de un periódico” en la editorial Aljibe. Ha sido asesor y subdirector del Centro de Profesado de Castilleja, en Sevilla.

Los tres autores, escriben en la sección *Juegos* en la revista SUMA editada por la FESPM, pertenecen al proyecto Estalmat-Andalucía, fueron autores de libros de texto de matemáticas en la editorial Vicens-Vives.