NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 78, noviembre de 2011, páginas 47–71

Los positivos y negativos como medios de organización de familias de rectas en el plano

Aurora Gallardo Cabello (Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, I.P.N. México)
Eleazar Damián Velázquez (Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, I.P.N. México)

Fecha de recepción: 15 de septiembre de 2010
Fecha de aceptación: 29 de Abril de 2011

Resumen Presentamos una propuesta Freudenthaliana para la enseñanza de los números negativos en la escuela secundaria. Este artículo recoge la experiencia desarrollada con alumnos extremos: uno de bajo rendimiento y otro de alto rendimiento. El análisis de los procesos de resolución observados en entrevista individual de estos estudiantes, permitieron identificar hechos que muestran la necesidad de basarse en el principio de permanencia geométrico-algebraico para lograr una mejor comprensión de las operaciones con números positivos y negativos.

Palabras clave Plano cartesiano, números negativos, operaciones básicas, familias de rectas.

Abstract The work described in this article was based on a Freudenthalian perspective in order to analyze the teaching of addition and subtraction of positive and negative numbers in students' transition from arithmetic to algebra. Two extreme subjects were chosen for videotaped individual clinical interviews. Analysis of students´ work showed the need to consider the Geometric-Algebraical Permanence Principle in order to convince the learners of the validity of operations with negative numbers.

Keywords Cartesian plane, negative numbers, basic operations, families of straight lines.

1. Introducción

Compartimos la concepción Freudenthaliana referente al hecho de que el currículo de matemáticas debe enseñar a organizar campos de fenómenos. Más aún, Freudenthal (1983) afirma que la fenomenología didáctica puede empezar por los fenómenos que necesitan ser organizados y desde este punto de partida, enseñar al estudiante a manipular esos medios de organización. Así, los números naturales organizan el fenómeno de la cantidad, advierte el autor. En relación al tema que nos concierne, Freudenthal adopta una perspectiva histórica y plantea: "[…] Los números negativos se originaron a partir de la necesidad algebraica formal de validar la solución general de las ecuaciones, pero no fue sino hasta la algebrización de la geometría (la geometría analítica) que se vuelven vigentes, esto es, vigentes de contenido. […] La algebrización y los sistemas de coordenadas presuponen los números negativos que conflictuaron a Descartes. Los números fueron introducidos como magnitudes y se utilizaron letras para indicarlas, es decir, números positivos. Cuando se usa el método cartesiano no se puede evitar que las letras representen también números negativos. Si las rectas son descritas algebraicamente en su totalidad, si las curvas son descritas en cualquier situación es necesario admitir los valores negativos" p. 432, obra citada.

Insiste Freudenthal que la didáctica de las matemáticas le ha prestado poca atención a la siguiente situación: "Las operaciones numéricas y las leyes que las rigen, se justifican vía la simplicidad de la descripción algebraica de figuras geométricas, esto es, el álgebra es validada por el hecho de funcionar en geometría. […] este planteamiento resulta muy convincente en la enseñanza del álgebra elemental a fin de que los estudiantes acepten los números negativos. […] la recta numérica no posee una estructura visual lo suficientemente rica, se requiere de la bidimensionalidad del plano cartesiano" (pp. 450, obra citada).

Por lo tanto, para este autor no sólo debe basarse la enseñanza de los números negativos en el principio de permanencia algebraico, sino en el geométrico-algebraico, ya que éste permite que una sola fórmula algebraica represente la totalidad de una curva, independientemente de los cuadrantes que atraviese. Define lo que él considera como principio de permanencia geométrico-algebraico, al incorporar a la geometría y no quedarse sólo en la manipulación algebraica de los números negativos. Ya que los negativos son necesarios para describir completamente el plano cartesiano y las figuras planas con toda su extensión por ecuaciones, "la justificación de las operaciones numéricas y sus leyes se simplifica por la descripción algebraica de figuras y sus relaciones geométricas", (pp. 432-460 obra citada). Continua este autor, "desde la didáctica visualizo el principio de permanencia algebraico (retomado de Hankel (1867) referente a la extensión del sistema numérico de la matemática formal) más bien como un principio de permanencia geométrico-algebraico. Este principio se ajusta mejor a la perspectiva histórica que muestra a los negativos como indispensables para la permanencia de expresiones, ecuaciones y fórmulas pertenecientes a la geometría analítica" (pp. 435-436, obra citada).

Propone "esquemas didácticos" en que las operaciones con positivos y negativos se pueden integrar en tablas como las siguientes (figura 1), para la suma.

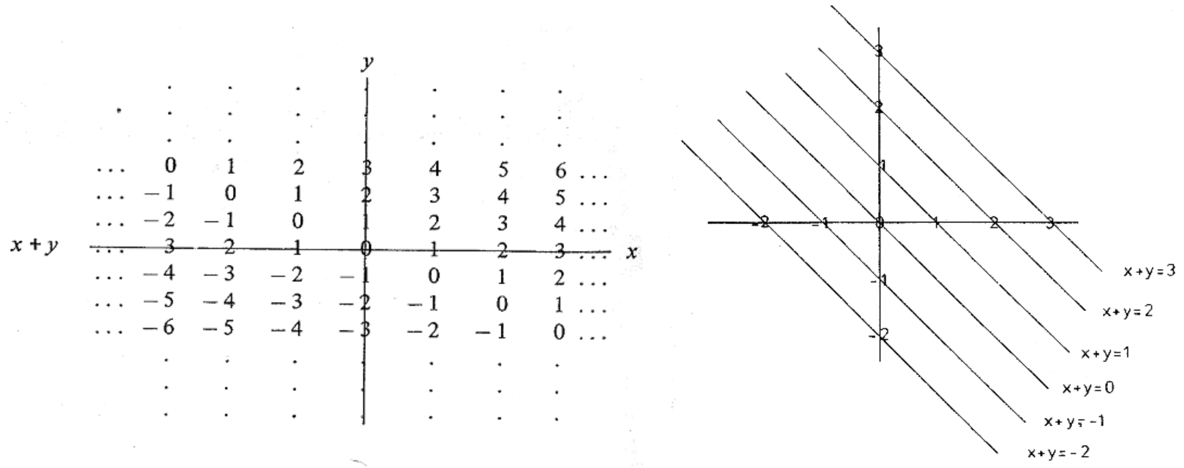


Figura 1. Esquemas para la adición con números positivos y negativos

Al observar la figura anterior podemos ver que las coordenadas en el plano cartesiano están marcadas con números positivos y negativos, esto es, ceros, unos, dos…, negativo uno, negativo dos…etc., si fijamos nuestra atención en los ceros y verificamos la suma de sus coordenadas (x, y) todas ellas nos darán como resultado igual a cero, lo mismo con el uno, el dos, negativo uno, negativo dos etc. Pongamos un ejemplo, localizamos el punto de coordenadas (-1, -3) y vemos que está marcado con el -4, si sumamos las coordenadas x = - 1 e y = -3 el resultado es igual a -4. Entonces, si sumamos las coordenadas de los puntos en el plano cartesiano cuya suma sea igual a negativo 4 obtenemos la recta x + y = -4. Lo mismo pasa con los demás puntos, por lo tanto, se observa que la suma con números positivos y negativos organiza la familia de curvas x + y = a.

Para la sustración de números positivos y negativos observemos la figura 2:

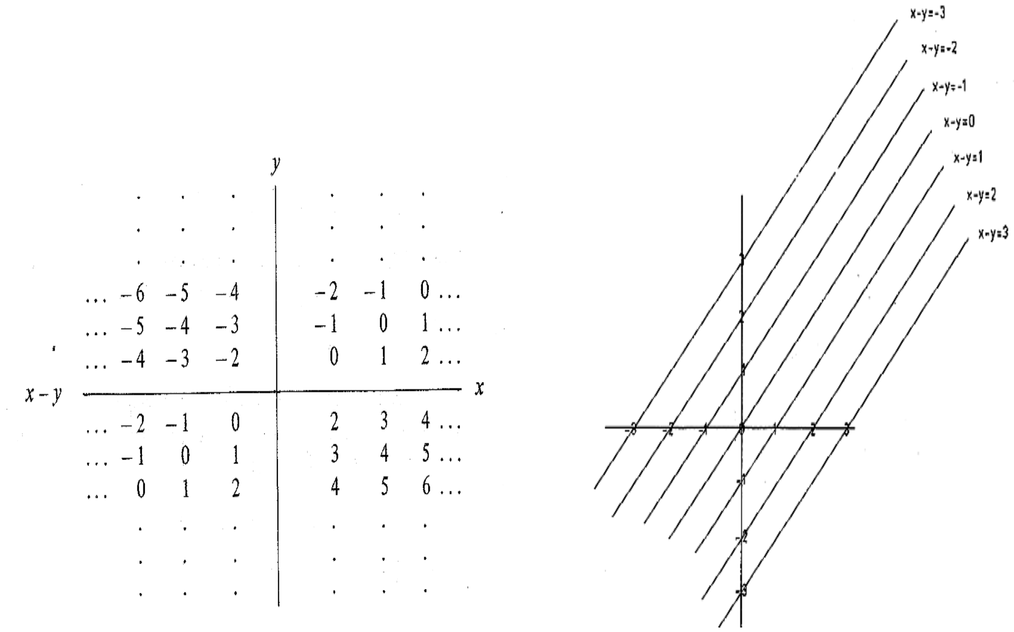


Figura 2. Esquemas para la sustracción con números positivos y negativos

Al igual que en la adición se observan que los puntos marcados con números positivos y negativos son el resultado de restar las coordenadas (x, y) de cada punto, esto es, x - y . Analicemos el siguiente ejemplo: centremos la atención en el punto de coordenadas (3, -1), ahora restemos al valor de la coordenada en "x" el valor de la coordenada en "y" así: 3 - (-1) = 4, realizando esta operación con cada uno de los puntos de coordenadas (x, y) y que den como resultado 4, queda definida la recta x-y=4. Así mismo, pasa con los demás puntos, quedando definida la familia de rectas x - y = a.

Para la multiplicación muestra esquemas como los que siguen (figura 3):

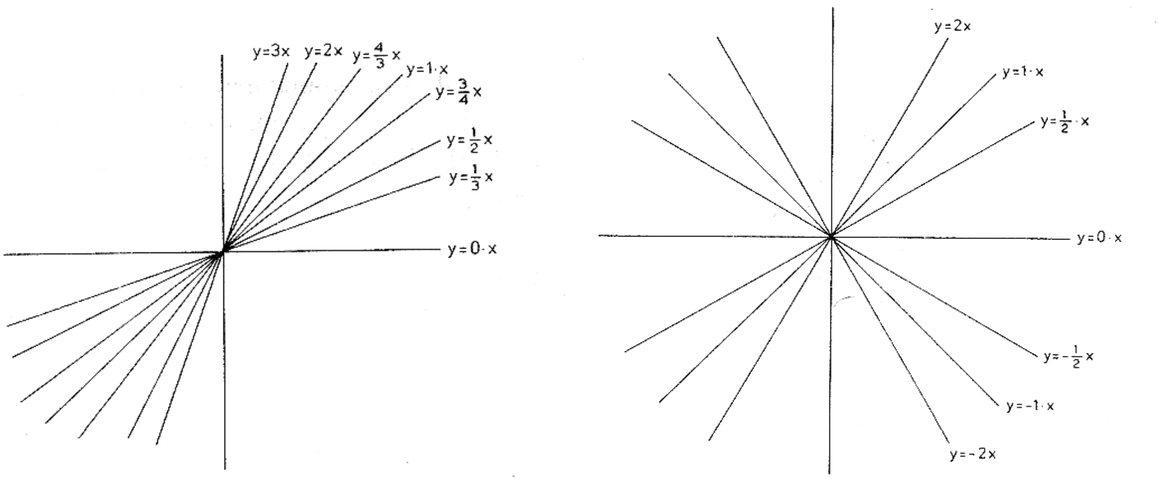


Figura 3. Esquemas para la multiplicación con números positivos y negativos

Para definir la familia de rectas para la multiplicación a través de los números positivos y negativos, Freudenthal (1983, pp. 432-460) hace lo siguiente: el valor de la coordenada en “y”es igual al valor de la coordenada en “x”, multiplicada por cualquier número positivo o negativo, esto es, algunos de los puntos que conforman la recta y = 3x son: (3, 9); (2, 6); (1, 3); (0, 0); (-1, -3); (-2, -6); (-3, -9)…etc., como podemos ver la coordenada en “x” es multiplicada por 3 y se obtiene la coordenada en “y”. De esta forma queda definida la familia de rectas para la multiplicación.

Para la familia de rectas de la división el autor propone dar el trato a las fracciones como cociente de enteros, quedando así definida la familia de rectas para la división. Pongamos por ejemplo: $y = \frac{x}{-2}$. En este caso se observa que el valor de la coordenada en “y” es igual a dividir el valor de la coordenada en “x” por negativo dos, esto es, algunos puntos que conforman esta recta son: (4, -2); (2, -1); (0, 0); (-2, 1); (-4, 2); etc., así queda definida la familia de rectas para la división. Por lo tanto, las operaciones elementales de los números positivos y negativos organizan familias de rectas en el plano.

2. El Estudio Empírico

Nos basamos en el hecho ampliamente conocido, de que las manifestaciones de la negatividad matemática surgen en la historia y en la didáctica mucho antes de la emergencia de los números enteros, Lizcano (1993). Por otra parte, Gallardo (1994; 2002) realizó un estudio histórico-epistemológico con el propósito de analizar la extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros en estudiantes ubicados en la transición de la aritmética al álgebra. Identificó cuatro categorías de la negatividad en los textos históricos, así como también, en las tareas aritmético-algebraicas propuestas al alumno de secundaria. Estas son las siguientes.

- Número sustractivo. Donde la noción de número se subordina a la magnitud (en a – b, a es siempre mayor que b donde a y b son números naturales).
- Número signado. Donde el signo más o menos es asociado con la cantidad, sin ser necesario agregarle significado alguno.
- Número relativo. Donde en el dominio discreto surge la idea de cantidades opuestas en relación con una cualidad y en el dominio continuo la idea de simetría.
- Número aislado. Donde se advierten dos niveles, el resultado de una operación o como la solución de un problema o ecuación.

2.1 Objetivos de la investigación

En nuestro estudio empírico nos preguntamos: ¿Cómo interpretan los estudiantes los números negativos y cómo aprenden las operaciones elementales a partir de los números naturales? Bajo el telón de fondo de la propuesta Freudenthaliana pretendemos analizar los siguientes objetivos:

- Identificar las dificultades y habilidades que manifiestan dos estudiantes extremos, uno de bajo rendimiento y otro de alto rendimiento, al representar las adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones, con números positivos y negativos, en el plano cartesiano.
- Analizar los procesos de resolución de estos dos estudiantes extremos, en las operaciones elementales con positivos y negativos que organizan rectas en el plano.

2.2 Metodología

La investigación se realizó en una escuela secundaria pública urbana de México Distrito Federal, con 13 alumnos de 14 a 15 años de edad. En primer lugar se aplicó un cuestionario inicial, luego se desarrolló un programa de enseñanza, después se aplicó un cuestionario final y por último se llevaron a cabo entrevistas a dos alumnos, uno de bajo rendimiento y otro de alto rendimiento, de acuerdo a los resultados obtenidos en las etapas ya mencionadas. Los ejercicios del protocolo que se pidió resolver a los estudiantes en las entrevistas se encuentran enunciados en el apartado 3 de este artículo.

Es importante mencionar que, los cuestionarios inicial y final tienen la misma estructura que el protocolo de las entrevistas, en donde se manejan distintos estratos del lenguaje algebraico como son: $a \pm \square = b$, (a y b son números negativos y/o positivos), y = ± ax (a es un número negativo o positivo) y expresiones de la forma x ± y = a (x, y, a, son números positivos y/o negativos). Así mismo se diseñó el programa de enseñanza, es decir, primero se plantearon actividades para abordar la adición y sustracción, luego se les enseño a tabular estas operaciones de acuerdo con la propuesta de Freudenthal, lo que él llama la extrapolación del cero, es decir, le da valores a “x” de la siguiente manera: …4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4,… y encontrar los valores de “y”, que cumplan la condición x ± y = a. Enseguida se recurre al plano cartesiano para dibujar los puntos de la representación tabular. Después que han dibujado la recta correspondiente se da una coordenada en “x” o en “y” a través de expresiones como $x \pm \square = a$, $\square \pm y = a$, y se busca la coordenada faltante apoyándose en la recta trazada. Para la multiplicación se introduce el concepto de múltiplos, es decir, una vez que se tabuló y se dibujó la recta de acuerdo con Freudenthal, se explicó que esa recta representa los múltiplos de un número, de la siguiente manera: en la expresión de la forma y = ± ax, “a” es un número constante positivo o negativo, “x” es cualquier número negativo, positivo o cero y los valores de “y” son los múltiplos del número “a”. Por último para la división se utilizaron a las fracciones como cociente de enteros, por ejemplo en las expresiones como: $y = \frac{x}{a}$, donde “a” es diferente de cero y es un número positivo o negativo, “x” es un número positivo o negativo y la “y” representa el cociente de dividir “x” entre un número constante “a” quedando definida la división entre cualquier número positivo o negativo y diferente de cero.

Es importante señalar que, estas ideas de Freudenthal, eran desconocidas tanto para el profesor como para el grupo de estudiantes. Estos jóvenes ya habían tenido experiencia con contenidos previos referente a las operaciones elementales con los números positivos, negativos y con temas relacionados al plano cartesiano, ya que se encontraban cursando el tercer grado de secundaria. Para constatar este hecho se consultó con el profesor del grupo y se comprobaron los contenidos desarrollados a través de algunos cuadernos de los alumnos, observándose que fueron enseñados como lo señala el programa oficial, es decir, sin ningún vínculo entre las operaciones elementales con positivos y negativos y el plano cartesiano. Además se recurrió al Modelo Chino (Gallardo, 1994), basado en el método Fang-Cheng descrito en el texto chino “El libro de los Nueve Capítulos del Arte de las Matemáticas” (250 A.C.). Agrega Gallardo “los modelos concretos de enseñanza no pueden ser desterrados del ámbito aritmético escolar y recurrir solamente a las reglas sintácticas de operatividad de enteros, a pesar de las dificultades intrínsecas del modelaje”. La operatividad empleada en ese modelo es la misma que presentan los matemáticos chinos y consiste en esencia, en la oposición entre positivos y negativos; específicamente el modelo chino se basa en: 1) el conteo de los números positivos extendido a los números negativos, 2) en el proceso de sustracción existen casos en que se requiere de una representación alternativa del minuendo para llevar a cabo la operación de resta, recurriendo entonces a la adición adecuada de ceros según sea el caso.

Los estudiantes extremos que se escogieron para realizar las entrevistas fueron, una alumna de nombre Erika de 13 años de edad, que obtuvo la menor cantidad de aciertos, en los cuestionarios inicial y final y así mismo, manifestó un bajo rendimiento durante la fase de enseñanza. El otro estudiante de nombre Diego y con 13 años de edad, reveló un alto rendimiento en los custionarios, obteniendo el mayor número de aciertos y se destacó su desempeño en la fase de enseñanza. A los dos estudiantes se les aplicó el mismo protocolo de entrevista, las cuales se realizaron por separado, con una duración de 60 minitos para cada una de las entrevistas. Aunque los dos sujetos trabajaron con lápiz y papel, para dar mejor claridad a las imágenes en este artículo, éstas se elaboraron con la computadora, copiando fielmente lo que los estudiantes realizaron.

En este artículo únicamente presentamos el análisis de las entrevistas de los dos estudiantes extremos. "A través de un protocolo se puede dar seguimiento a estrategias de solución que surgen de preguntas específicas y de otras situaciones que emergen durante la entrevista, alienta al informante a describir sus experiencias en detalle y el significado que les atribuyen", afirman Cohen & Manion, (1980, pp. 80-90, 241-262).

3. Entrevista de Erika

A continuación se muestran algunos de los diálogos de la entrevista de Erika (Damián, 2009), una alumna que presentó bajo rendimiento, en toda la ruta de investigación. Acompaña a los diálogos el análisis del proceso de resolución del ejercicio. El entrevistador se identifica con la letra E y al informante con la letra M.

Ejercicio 1: Representa la recta x + y = 8 en el plano cartesiano

M: "Tengo que ver los números que tiene "x" para que cuando sea sumada a "y" me dé un resultado a 8".

Construye una tabla de dos columnas.

x	y
1	7
2	6
3	5
0	8
-1	-7
-2	-6
-3	-5

Los primeros valores asignados a "x" 1, 2, 3, la conducen a valores correctos de "y". Cuando la "x" la considera negativa también le asigna valores negativos a "y". Ella extrapoló los valores de "y" correspondientes a la "x" positiva y solamente les agregó un signo menos. Obtuvo así: (-1, -7), (-2, -6), (-3, -5). Obsérvese que no escribió una tercera columna correspondiente a x + y en la tabla anterior que le hubiera podido advertir de los valores negativos erróneos asignados a la "y". Las cantidades negativas las nombra como: menos uno, menos dos,… asignándoles la categoría de números signados.

E: "¿Qué vas hacer ahora?"
M: "Esta gráfica la voy a representar en el plano cartesiano.

M coloca los puntos (-1, -7), (-2, -6), (-3, -5). Duda y afirma:

M: "Creo que ya me equivoqué".
E: "¿Por qué?"
M: "Porque no conté muy bien los números del plano cartesiano".

M atribuye los errores al conteo, localiza en el plano cartesiano las coordenadas de su tabla como sigue (Figura 4):

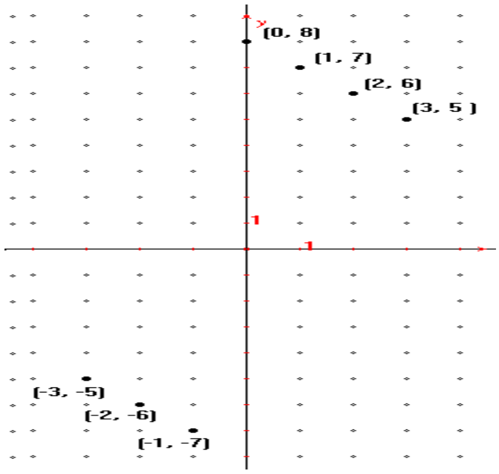


Figura 4. Respuesta de Erika en el Ejercicio 1

E: "¿Qué figura tiene que formarse para que represente una suma?".
M: "Una recta, pero a mí no me da una recta".

En este momento se da cuenta que tiene dos rectas separadas una en el primer cuadrante y otra en el tercero.

E: "Ya localizaste todos los puntos de tu tabla, ¿qué pasó con estos puntos?" (señala los localizados en el terecer cuadrante) ¿por qué no están alineados con estos otros? (señala los localizados en el primer cuadrante)".
M: "Aquí (apunta los del primer cuadrante) son números positivos y aquí (se refiere a los del tercer cuadrante) son números negativos".

Nótese que en el plano cartesiano les asigna la categoría de relativo a los números positivos y negativos. Utiliza una regla para unir los puntos obtenidos en el primer cuadrante.

E: "¿Hasta dónde llega la recta?"
M: "Puedo ver cuantos números me dan 8 y no es un número hasta mil sino un número infinito".

M logra extender la recta por ambos extremos, esto le permite cruzar otros cuadrantes y no quedarse en el primero.

E: "¿Qué representa esta recta?".
M: "Está es una recta de suma que me da igual a 8". Se muestra la recta trazada por M (Figura 5):

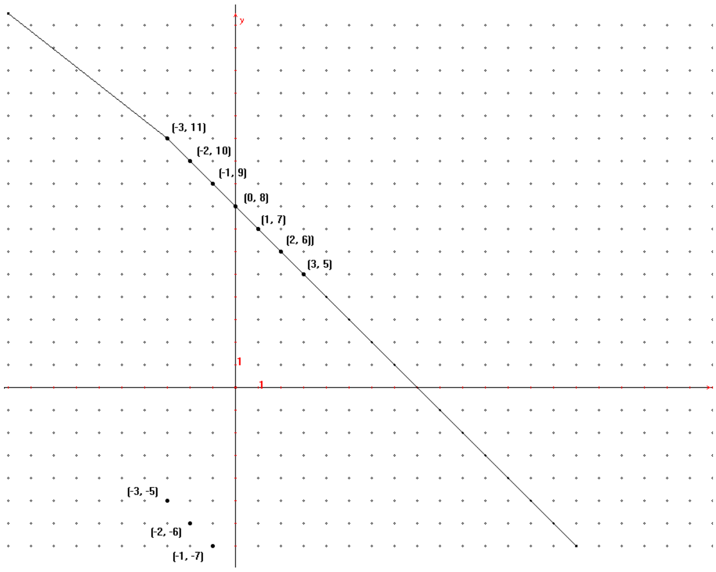


Figura 5. Respuesta de Erika en el Ejercicio 1

M ya se había percatado de que los puntos en el tercer cuadrante no estaban alineados con los del primero. Este hecho lo confirma al ver trazada la recta que une los puntos localizados en el primero, sabe que esa recta trazada representa la suma de las parejas de números (x, y), que al sumarse le dan como resultado 8.

E: "Vamos a comprobar estos puntos (señala los que localizó M en el tercer cuadrante), señala el punto (-1, -7), en tu tabla colocaste que "x" vale negativo 1, ¿cuánto debe valer "y"?"
M: "A lo mejor no es 7 negativo, sino 7 positivo".

Este hecho indica que M sabe que el punto (-1, -7) debe estar en el segundo cuadrante que es por donde pasa la recta trazada. Cambia el signo de la coordenada en "y". E le sugiere que localice el valor de "x" igual a -1 y encuentre el valor correspondiente a "y", M coloca la regla perpendicularmente sobre el eje de las abscisas en x = -1, observa la intersección de la regla y la recta. Retira la regla y cuenta desde la coordenada señalada con su dedo en "x" hacia arriba y dice:

M: "Nueve".

En este momento se da un tratamiento fenomenológico entre la operación adición y la recta trazada, es decir la suma x + y está organizando la recta x + y = 8. La recta le está ayudando a corregir los errores cometidos. Se observa una transición del principio de permanencia algebraico al geométrico-algebraico.

E cuestiona a M:

E: "Entonces cuando "x" es igual a negativo uno tú dices que "y" es 9 ¿estás segura que al sumarse esos dos números el resultado es 8?"
M: "Aja".
E: "¿Porqué?"

M abandona la gráfica y escribe en su hoja de trabajo -1 + 9= 8 "Porque éste es menos (señala -1) por más (señala + 9) da menos o sea sería nueve menos uno, da ocho". El razonamiento es erróneo, aunque el resultado es correcto dada la equivalencia sintáctica: -1+ 9 = 9 - 1= 8.

Observaciones al Ejercicio 1:

- La representación tabular fue un obstáculo, ya que M siguió un patrón numérico de arriba para abajo en la tabla, sin relacionar a “x” e “y”, con la suma de ambas, pues omitió la tercera columna x + y = 8. Si “x” es negativa también lo es “y”.

Ejercicio 2: En cada cuadrito en blanco colca un número (positivo, negativo o cero), para que se cumpla la igualdad. Puedes apoyarte en la gráfica anterior que trazaste.

A) $\boxed{12} + \boxed{}$ **= 8** **C)** $\boxed{-10} + \boxed{}$ **= 8**

B) $\boxed{} + \boxed{-5}$ **= 8** **D)** $\boxed{} + \boxed{20}$ **= 8**

E: “¿Cuánto va ahí?”, señala el cuadrito en blanco de la operación: 2A.
M: “Necesito ver el número que representa “y”, para saber si nos da igual a 8.

M cuenta 12 sobre el eje positivo de las abscisas a partir del origen, toma la regla y la coloca perpendicularmente al eje en este punto, observa la intersección con la recta x + y = 8, retira la regla y dice

M: “Entonces sería menos tres”.
E: “Bien. El que sigue” se refiere al ejercicio: 2B.
M: “Aquí nos están dando el resultado de “y” que es menos cinco, localizamos aquí está menos cinco”, (señala -5 sobre el eje de las ordenadas y sin ayuda de la regla se desplaza horizontalmente a partir de la coordenada y = -5 y dice: “Aquí me queda, podría ser a trece positivo”.
E: “bien, el que sigue” (ejercicio 2C).
M: “Aquí me están dando un número en “x” que es menos diez, tengo que buscar, “y” para que el resultado me dé a ocho”. M localiza la coordenada en x = -10 con su dedo, luego cuenta hacia arriba y dice: “Sería diez negativo coma más dieciseis”.

El entrevistador le pide que se auxilie con la regla para que verifique si el punto de coordenadas (-10, 16) pertenece a la recta x + y = 8 que trazó en el plano cartesiano anteriormente. M dice que sí pertenece, ya que si observamos la recta que ella trazó es incorrecta y la coordenada en “x” más cercana a esa recta trazada es 16.

E: “Bien, por último tienes éste” dice el entrevistador refiriendose a 2D.
M: “Aquí me están dando un 20 positivo y tengo que buscar el valor de “x”, entonces voy a localizar 20 positivo en la recta para ver cuál de los puntos me da 8”, M cuenta 20 sobre el eje de las abscisas, coloca su dedo y se dezplaza hacia abajo en forma vertical y dice: “Aquí…y aquí me da un resultado de menos diez”.

M ya no hace uso de la regla, no prolongó más la recta trazada y encuentra esta coordenada en y = -10 apoyándose únicamente en su vista, es decir, hace una prolongación de la recta mental y afirma que es ahí donde se da la intersección con la recta x + y = 8.

Observaciones al Ejercicio 2.

- Aunque comete errores de localización, podemos afirmar el uso fenomenológico que hace entre la recta y la operación adición, ya que advierte que en esta operación intervienen numeros negativos y positivos, denotados como relativos (“trece positivo”). Sin embargo, cuando coloca su respuesta en el cuadrito en blanco los considera como números naturales.

- M está totalmente centrada en lo que ha obtenido en la gráfica y no se cuestiona que tiene dos resultados erróneos en un mismo primer sumando a saber: -10 + 16 = 8 y -10 + 20 = 8.

Ejercicio 3: ¿Existen parejas de números negativos que sumados den como resultado 8? ¿Por qué?

M: Señala con el dedo el semieje negativo de las abscisas y el semieje negativo de las ordenadas, “-x” y “-y”,respectivamente. Menciona: “No, mi gráfica queda encima, al ver mi gráfica, yo me estoy dando cuenta que hay más números positivos (cubre con su mano el primer cuadrante), bueno, hay un número de combinaciones positivo con negativo y me da 8” (se extiende al segundo cuadrante).

Observaciones al Ejercicio 3:

- M logra dar una justificación a través de un principio de permanencia geométrico, al observar que la recta trazada cruza otros cuadrantes y no sólo el primero.

- Cuando señala con su dedo los semiejes negativos de las abscisas y ordenadas, su pasado unidimensional de la recta numérica se hace presente y cuando cubre con su mano la región del primer cuadrante y se extiende con la misma al interior del segundo cuadrante, se observa la transición a la riqueza visual de lo bidimensional.

- Observamos una manipulación geométrica espontánea, es decir, la estudiante realizó acciones físicas y verbales, inducidas por la recta y el desplazamiento de sus manos y dedos en el plano.

Ejercicio 4: ¿Cuántos pares de números diferentes crees que existan de modo que al sumarse obtengas como resultado 8?

M: “Un número infinito”.
E: ¿Por qué?”
M: “Porque nosotros no podemos saber hasta donde llega ese número infinito y pueden salir muchas sumas, qué obtengamos como resultado de 8”.
E: “¿Cómo lo puedes comprobar?”
M: “Con la recta…porque podemos extenderla por un lado y otro, así no podemos llegar a un número exacto, porque hay un número infinito”.

Observaciones al Ejercicio 4:

- Advertimos una transición del principio de permanencia algebraico al geométrico-algebraico cuando observa que la recta trazada la puede prolongar por ambos extremos.

Ejercicio 5: Representa la recta x - y = -10 en el plano cartesiano

M: "Primero vamos a buscar los números de "x" que serían igual, del positivo sería, del 1 al 3 y negativo del 1 al 3".

Nótese en esta verbalización la presencia de negativos como números aislados; M elabora la tabla de dos columnas "x" e "y", mostrada a continuación:

x	**y**
1	9
2	10
3	11
0	10
-1	-9
-2	-10
-3	-11

M: "Voy a localizar "y" para que me de un resultado de menos diez, entonces aquí podría ser uno más nueve, a lo mejor me podría dar menos diez, entonces ahora voy a ver en la recta cuál número "y" me puede dar menos diez". M cuenta nueve sobre el semieje negativo en "y", hace una breve pausa (está señalando sobre el semieje negativo de las ordenadas y = -9), recorre su dedo hacia abajo un número más (señalando con su dedo y = -10) y dice: "Aquí me podría dar diez" (nótese que ignoró el signo negativo de -10).
E: "¿1 - 10, te da diez?
M: "No, menos diez".
E: "A ver, ¿porqué no haces la operación aquí? (señala una hoja en blanco).
M:(Escribe en la hoja 1 - 10 = 9) "aquí sería uno menos diez…a nueve, entonces lo voy a localizar".

Se observa la presencia del negativo como sustractivo.

E: "Bien, entonces ya conoces el primer punto".
M: " (Coloca el 9 en la tabla de dos columnas que ya había elaborado) aquí podría ser 2 coma 10 y aquí 3 coma 11, y aquí sería cero coma 10; y aquí sería menos 9, menos diez y menos 11 (correspondientes a los números en la columna de "x" -1, -2, -3, respectivamente).

La estudiante abandona la operación centrándose en un patrón numérico y sólo cambian los signos de las coordenadas en "y" de positivos a negativos.

E: "Bien, ¿qué vas a hacer?".
M: "Lo voy a graficar en el plano".

M localiza los puntos correspondientes a la tabla que elaboró, trazando las rectas siguientes (Figura 6):

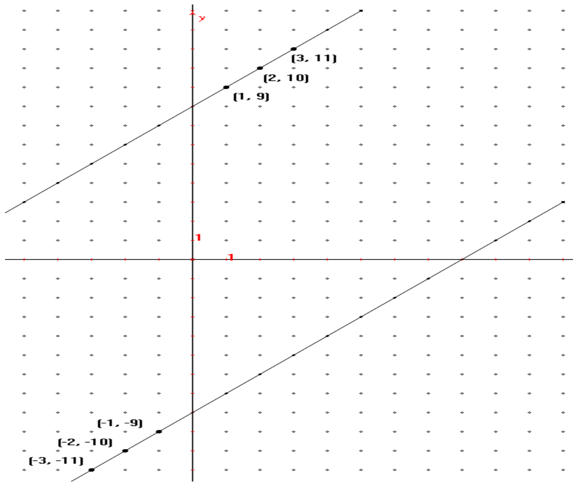


Figura 6. Respuesta de Erika en el Ejercicio 5

Observaciones al Ejercicio 5:

- M tiene dificultades con la operación x - y = -10, debido a que la representación tabular constituye un obstáculo para ella.

- La estudiante localiza correctamente los puntos erróneos tabulados en el plano cartesiano y las rectas trazadas correspondientes a los valores de la tabla. Representa geometricamente los falsos puntos, vía dos rectas. No hubo un trato fenomenológico entre la expresión x -y = -10 y la recta que debió trazar.

Ejercicio 6: En cada cuadrito en blanco coloca un número (positivo, negativo o cero), para que se cumpla la igualdad. Puedes apoyarte en la gráfica anterior.

A) $\boxed{10} - \boxed{} = -10$ C) $\boxed{-8} - \boxed{} = -10$

B) $\boxed{} - \boxed{-5} = -10$ D) $\boxed{} - \boxed{3} = -10$

M: "Podría poner cero para que me dé menos diez", se refiere al ejercicio: 6A.
E: "El siguiente" se refiere a 6B.
M: "Y aquí me está dando el valor de "y" que es menos cinco y voy a localizar en la gráfica el valor de "x". Localiza -5 en el semieje negativo "x"señalándolo con el dedo, se detiene y se desliza hacia abajo hasta que su dedo índice se intersecta con la recta trazada en el tercer cuadrante, señalando el punto de coordenadas (-4, -11) una vez ubicada ahí, recorre con el mismo dedo hacia la derecha hasta intersectarse con el semieje negativo "y", se desplaza hacia arriba contando en voz baja y **M** dice: "Aquí podría ser once. De acuerdo a la gráfica sería menos once, menos cinco igual a menos diez". La estudiante coloca en el cuadrito en blanco -11.
M:"El valor de "x" (se refiere a la operación 6C), es menos ocho, sería…(cuenta ocho a partir del origen hacia la izquierda desplazándose con el índice sobre el semieje negativo "x" encuentra x= -8,

de ahí se desplaza hacia abajo contando en voz baja hasta que su dedo se intersecta con la recta del tercer cuadrante en el punto de coordenadas (-8,-15))…aquí sería un valor de quince para que me de menos diez, sería menos quince”. Coloca en el cuadrito en blanco el número -15 y continua diciendo: “Y aquí me están dando un número en “y” positivo (refiriendose a 6D), lo voy a localizar en la recta y lo voy a desplazar aquí, sería once coma tres,…sería menos diez”.

Obsérvese que para resolver el ejercicio 6D, M acude a la gráfica del ejericio 5 y localiza con el índice en el semieje positivo de “x”, x = 3, se desplaza con el mismo dedo hacia arriba contando en voz baja hasta que inersecta con la recta trazada en el primer cuadrante. Se detiene en el punto de coordenadas (3, 11) un punto que ya tenía localizado y marcado desde que tabuló, luego coloca en el cuadrito en blanco el número 11.

E: “¿Encontraste números que se están sumando o restando?
M: “Que al restarse te de un número de menos diez”.
E: “Entonces ¿qué operaciónes resolviste?
M: “Restas”.

M no olvidó que se trataba de la operación sustracción al observar constantemente los ejercicios planteados. Se da la transferencia del plano a las expresiones con los cuadritos en blanco.

Observaciones al Ejercicio 6:

- Recurre a la gráfica, donde realiza manipulaciones geométricas de los números negativos. Les asigna dos categorías como sustractivo y signado, realizando acciones físicas y verbales en el plano.

- Pasa de la identificación de los números negativos ubicados sólo en los semiejes “x” e “y” a internarse en las regiones de los cuadrantes.

Ejercicio 7: ¿Existen parejas de números negativos que al restarse se obtiene como resultado -10? ¿Por qué?

M: “En el plano cartesiano me está dando un resultado de menos diez, o sea, sí se puede ver qué números negativos se pueden restar y nos da un resultado de diez”.
E: “En tu plano cartesiano se observan dos rectas trazadas, ¿cuál de ellas te indica que existen dos números negativos que al restarse te da un resultado igual a negativo diez?”
M: “Esta”, señala la recta que cruza por los cuadrantes primero, tercero y cuarto del plano cartesiano.

Observaciones al Ejercicio 7:

- M está conforme con los puntos erróneos localizados en el plano cartesiano y con las dos rectas trazadas en él.

- Se observa una doble centración en el plano, por un lado, le ayuda y se siente confiada al validar sus propias respuestas aunque éstas sean erróneas y por el otro, el plano se vuelve un obstáculo que no le permite relacionar la expresión algebraica con la gráfica trazada.

Ejercicio 8: ¿Cuántos pares de números diferentes crees que existan de modo que al restarse obtengas como resultado -10?

M: "Un número infinito".
E: "¿Por qué?"
M: "Porque, o sea, aquí me están demostrando que hay muchos puntos…cómo localizarlos (señala la recta que pasa por los cuadrantes primero, tercero y cuarto), pero no hay un número exacto".

Observaciones al Ejercicio 8:

- La estudiante ignora la recta que trazó en el ejercicio 7 y cruza los cuadrantes primero, segundo y tercero. La respuesta es correcta (debido a que tiene un concepto intuitivo de infinito). Se puede observar que ignoró la sustracción, se basa solamente en la recta que cruza por los cuadrantes primero, tercero y cuarto. Muestra una visión bidimensional del plano construida a partir de la adición (ejercicio1).

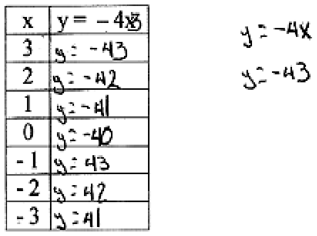
- M no logra establecer una descripción geométrico-algebraica entre la recta trazada y la operación que la describe.

Ejercicio 9: Completa la siguiente tabla. Después dibuja en el plano cartesiano los puntos de coordenadas (x,y) correspondientes a esta tabla.

x	**y = - 4x**
3	
2	
1	
0	
-1	
-2	
-3	

M: "Tengo que buscar los números de "y" y luego los tengo que localizar en el plano para ver si me da menos cuatro equis".
E: "¿Menos cuatro equis será alguna operación?
M: "A lo mejor podría ser una operación".
E: "¿Qué operación?".
M: " Una resta".
E: "Entre el negativo cuatro y la equis ¿qué operación se está realizando?".
M: "No puedo saber porque no me están dando otro número, o sea, ésta (señala la equis) se toma como una letra más".
E: "El primer valor de la "x" es tres, si ese valor lo sustituyes en tu expresión y = -4x, ¿qué valor obtendrás que corresponderá a la "ye"?"
M: "En la "y". (M coloca en su hoja de trabajo y=-43)…cuarenta y tres".

M sólo cambió la "x" por el primer número de su tabla: el tres. De esta manera continua llenando su tabla (Figura 7)



x	y = −4x
3	y = −43
2	y = −42
1	y = −41
0	y = −40
-1	y = 43
-2	y = 42
-3	y = 41

Figura 7. Respuesta de Erika en el Ejercicio 9

Pero cuando “x” toma el valor de -1 dice: “Y aquí sería…como son números negativos y el 4 es número negativo, puedo multiplicar menos por menos da más y me da un resultado de 43”.

Nótese que no cambió el valor de la x = -1, sino que al realizar la multiplicación de los signos señala el menos de -1 y lo multiplica por el menos de la expresión y = -4x que tiene en la parte superior de la tabla y se le quedó fijo mentalmente el número 43, luego siguiendo el patrón de la tabla la completa con los números 42 y 41.

E: “Ya completaste la tabla, ahora ¿qué vas a hacer?”
M: “Que los puntos los vea en el plano cartesiano, como me están dando números mayores, lo puedo dividir a la mitad (realiza subdivisiones sobre el semieje positivo de “x”)”.

M contó sobre el semieje positivo de las “x”, de dos en dos, hasta que sumó 42 y colocando su dedo se desplaza hacia abajo hasta -2, señalando con su otro índice en el semieje negativo de las ordenadas, marcando el punto de coordenadas (11, -2), de la misma forma localiza los puntos quinto y séptimo de la tabla que completó, obteniendo la gráfica que se observa a continuación (Figura 8):

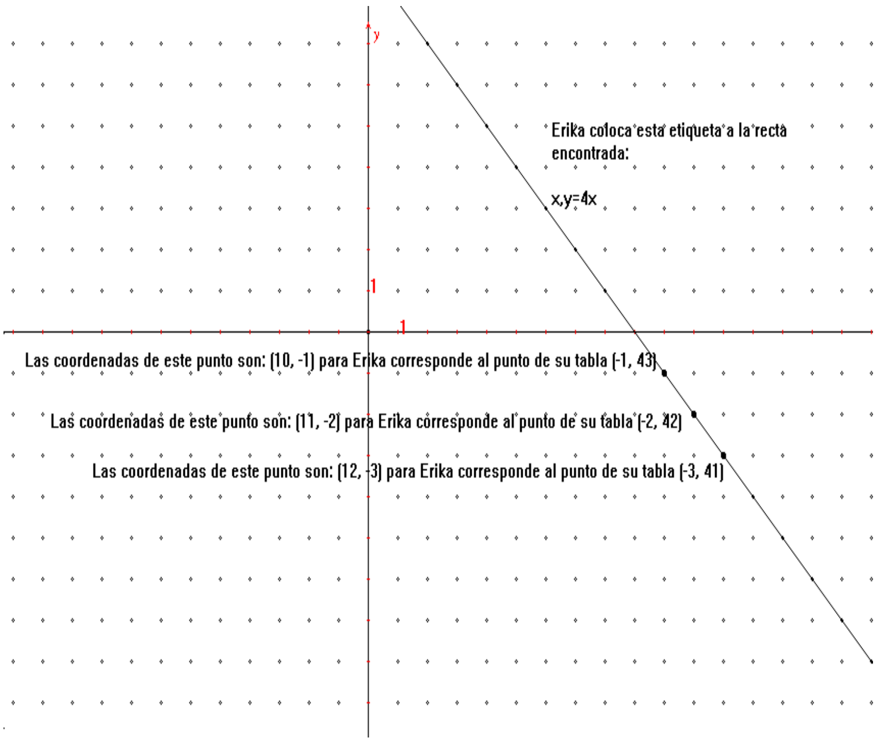


Figura 8. Respuesta de Erika en el Ejercicio 9

E: "Y esa recta ¿qué operación representa?"
M: " Una suma".
E: "¿Segura?"
M: Sí, juntamos lo que es 4 y los números, en este caso juntamos 4 y 3 que nos da menos 43".

Observaciones al Ejercicio 9:

- En la expresión y = -4x, M sustituye los valores de "x" recurriendo al sistema de numeración posicional y lo interpreta como una suma, ya que junta los valores que toma "x" con el -4.

- No consigue justificar la operación a través de la descripción algebraica de la recta y sus relaciones geométricas. Para M la "x" es sólo una literal agregada como etiqueta y no puede ver la expresión -4x como una multiplicación.

Ejercicio 10: Completa la siguiente tabla. Después dibuja en el plano cartesiano los puntos de coordenadas (x,y) correspondientes a esta tabla.

x	**y =** $\frac{x}{4}$
12	
8	
4	
0	
-4	
-8	
-12	

M:"Aquí me están diciendo que voy a dividir".
E: "¿Qué vas a dividir?"
M: "La "ye" igual a equis entre cuatro, entonces como no sabemos el valor de "x" aquí me están dando x = 12 y es a dos".
E: "¿Por qué dos?"
M: "Doce entre cuatro es a dos".
E: "Bien, el que sigue".
M: "Ocho entre cuatro a una y aquí cuatro entre cuatro a cero, aquí me da como resultado a cuatro (se refiere a cero entre cuatro) y aquí es menos cuatro igual a cero (en vez de decir menos cuatro entre cuatro igual a cero), luego menos ocho igual a menos uno (no verbaliza menos ocho entre 4 igual a -1) y doce igual a menos dos".

Nótese que comete errores al efectuar las divisiones y posteriormente la representación tabular constituye un obstáculo, ya que al seguir una secuencia ordenada completa la tabla sin recurrir a operar, esto lo podemos observar a partir de que la "x" toma el valor de -4. A continuación se muestra la tabla con los valores que M llenó:

x	**y =** $\frac{x}{4}$
12	2
8	1
4	0
0	4
-4	0
-8	-1
-12	-2

E: “Bien, ahora, ¿qué vas a hacer?”
M: “Voy a localizar en el plano cartesiano”.

A continuación se muestra la gráfica trazada por **M:**

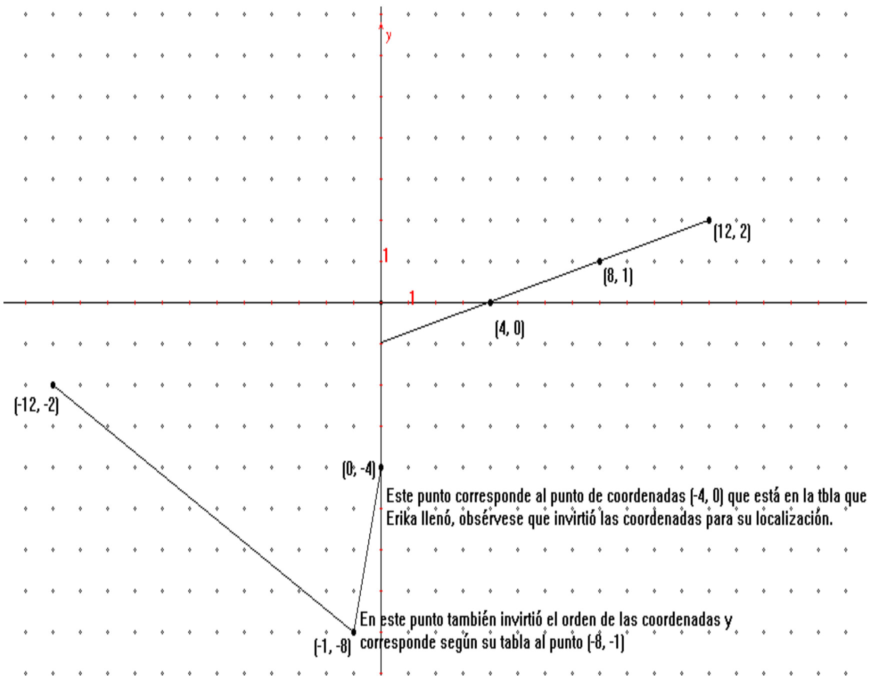


Figura 9. Respuesta de Erika en el Ejercicio 10

Observaciones al Ejercicio 10:

- M identifica la operación en el segundo miembro de la expresión y = $\frac{x}{4}$ como una división.

- No logra justificar la operación a través de la descripción algebraica de la recta y sus relaciones geométricas.

- Nuevamente la representación tabular constituye un obstáculo para M.

4. Entrevista de Diego

Se muestran algunos de los diálogos de la entrevista realizada a Diego (Damián, 2009), que presentó un alto desempeño en toda la ruta de investigación, se le hicieron las mismas preguntas que a M. El entrevistador se identifica con la letra E y al informante con la letra D. Sólo se exhiben los diálogos de los ejercicios 5, 6 y 9 que merecen análisis de los procesos realizados por el estudiante. El resto de los ejercicios fueron contestados correctamente por Diego.

Ejercicio 5: Representa la recta x - y = -10 en el plano cartesiano.

D elabora una tabla de tres columnas (Figura 10).

X	Y	X-Y
2	-12	-10
-5	-5	
0	-10	
4	-14	

Figura 10. Respuesta de Diego en el Ejercicio 5

Como se puede observar, los resultados que corresponden a la columna y son incorrectos.

E: "Vamos a revisar los primeros valores que escribiste (se refiere a x = 2 e y = -12).

D escribe**:** 2 - 12.

E: "¿Qué operación vas a resolver?".
D: "La resta".
E: "Este signo (se refiere al signo negativo de -12) ¿de qué es?".
D: Escribe 2 **-** (-12).
E: "Bien y el resultado de esa operación ¿a qué es igual?".
D: "A menos diez" (D hace un uso del negativo como sustractivo).

Se observa que el estudiante aun no está resolviendo la sustracción.

D le pide al entrevistador un plano cartesiano, localiza los puntos de coordenadas (2, -12) y (-5, -5), y dice: "Éste último no va a dar".

E: "¿Por qué?".
D: "Da igual a cero".

En este momento el alumno se percata de que tiene errores.

E: "¿Qué pasa si yo te propongo una tabla con los siguientes valores y tú la completas?"

El entrevistador escribe:

x	y	x-y
3		
2		
1		
0		
-1		
-2		
-3		

E: " ¿Recuerdas en las clases anteriores que teníamos alguna manera de comprobar las operaciones con números positivos y negativos?"
D: "El método chino".
E: " Entonces vamos a comprobarla" se refiere a 2 - (-12) = -10.
D representa al minuendo en el modelo chino con dos fichas blancas.
E: "¿Ahora, qué vas a hacer?"
D: "Agregarle ceros" (agrega doce ceros representados cada uno con un círculo blanco y otro negro).
E: "¿Y ahora?"
D: "Voy a quitar doce negativos" (el estudiante cruza con una línea los doce círculos negros).

Nótese la verbalización del estudiante (doce negativos) haciendo un uso del negativo como relativo. A continuación, se muestra como D representó la operación en el módelo chino (Figura 11):

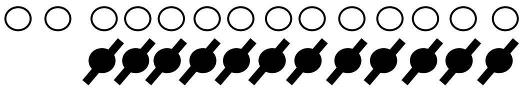


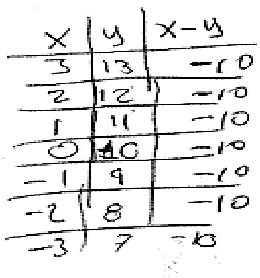
Figura 11. Respuesta de Diego en el Ejercicio 5

E: "¿Cuál es el resultado?"
D: "Catorce positivo" (esta verbalización refuerza al negativo como relativo).
E: "¿Y que pasó con el otro resultado?" (se refiere a -10).
D: "Estaba mal".
E: "Ahora trata de resolver y completar los valores de la tabla".

D representa el primer valor de la tabla x = 3 en el modelo chino con tres círculos en blanco, luego agrega diez ceros y posteriormente tacha con una línea 13 círculos blancos.

E: "¿El resultado es?".
D: "Menos diez" (verbalización del negativo como sustractivo).

D coloca 13 en la columna de "y". A partir de este momento el estudiante abandona el modelo chino y completa la tabla propuesta por E correctamente (Figura 12).



x	y	x-y
3	13	-10
2	12	-10
1	11	-10
0	10	-10
-1	9	-10
-2	8	-10
-3	7	-10

Figura 12. Respuesta de Diego en el Ejercicio 5

E: "¿Cómo puedes comprobar que los resultados de la tabla son corectos?".
D: "Con el plano".

Mostramos la gráfica realizada por D en la Figura 13.

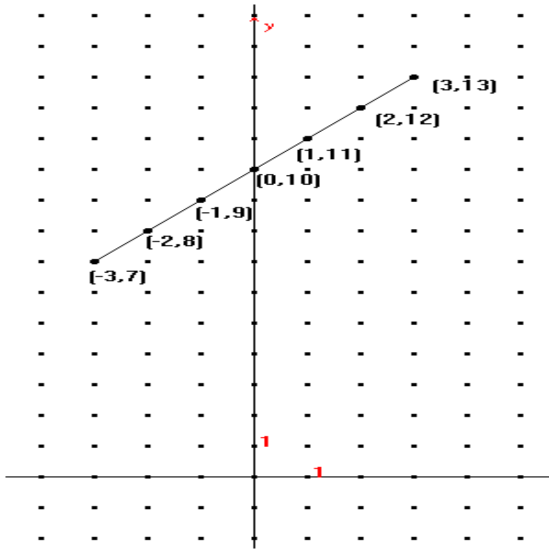


Figura 13. Respuesta de Diego en el Ejercicio 5

Observaciones al Ejercicio 5:

- La utilización del modelo chino, ayudó a D a resolver las sustracciones con positivos y negativos.

- Valida sus resultados a través de la recta, vinculando ésta con la operación de sustracción.

Ejercicio 6: En cada cuadrito en blanco coloca un número (positivo, negativo o cero), para que se cumpla la igualdad. Puedes apoyarte en la gráfica anterior.

A) $\boxed{10} - \boxed{} = -10$ C) $\boxed{-8} - \boxed{} = -10$

B) $\boxed{} - \boxed{-5} = -10$ D) $\boxed{} - \boxed{3} = -10$

D contesta el resultado que debe ir en el cuadrito en blanco en la operación 6A, diciendo:

D: "Veinte".
E : "¿Seguro, cómo sabes qué estás en lo correcto?" y responde
D: "Localizando los puntos en el plano".

Nótese la necesidad que se ha creado para validar los puntos. Se está dando un tratamiento fenomenológico entre la operación y la recta trazada, ya que la operación resuelta ha funcionado como medio de organización para la recta x -y = -10.

D toma el plano cartesiano y partiendo del origen cuenta en voz alta sobre el semieje positivo de las "x" hasta diez, señalando cada dezplazamiento con su bolígrafo, una vez ubicado en x = 10 se mueve sin despegar el bolígrafo hacia arriba contando en voz alta hasta 20 y marca el punto de coordenadas (10, 20), luego con la regla alinea correctamente los puntos que ya tenía trazados y prolonga la recta hasta el punto antes mencionado. D sigue el mismo proceso para encontrar los números que faltan en los cuadritos vacíos.

Observaciones al Ejercicio 6:

- D es competente para extender la recta por otros cuadrantes del plano cartesiano y no quedarse sólo en el primero.

- Se observa la transición del principio de permanencia algebraico al geométrico-algebraico, cuando se incorpora la geometría para validar y comprobar los resultados de la operación x - y = -10.

Ejercicio 9: Completa la siguiente tabla. Después dibuja en el plano cartesiano los puntos de coordenadas (x,y) correspondientes a esta tabla.

x	**y = - 4x**
3	
2	
1	
0	
-1	
-2	
-3	

E: "¿Qué operación es?". Señala la expresión y = -4x.
D: "Resta"(el estudiante ve a -4x como x - 4).
E: "¿Qué operación es? (el entrevistador vuelve a señalar con el dedo la expresión y = -4x).
D: "Una suma"(D visualiza la expresión -4x como -4 + x).
E: "Veamos… si tú tienes la expresión (el entrevistador escribe2( ) = 6) ¿qué número debe ir en el paréntesis para que el resultado sea igual a seis?".
D: "Cuatro".
E: "Si tienes un número y enseguida un paréntesis, y entre ellos no hay nada, representa una operación, ¿cúal es esa operación?.
D: "Dos por tres igual a seis".
E: "Bien, entonces qué operación es y = -4x".
D: "Una multiplicación".
E: "¿Una multiplicación de qué?.
D: "De números".
E: "¿Qué números?".
D: "De menos cuatro y equis".

El estudiante D es capaz de visualizar a la literal “x” como un número.

E: “La equis ¿cuánto vale?
D: “Tres”(D está observando la tabla de dos columnas y por ello dice que es tres refiriendóse al primer valor).
E: “Entonces cuánto vale “ye””.
D: “Menos doce”.

El estudiante anotó y = -4 ( ) y escribió -12 en la tabla en la columna correspondiente a la expresión y = -4x. D completa la tabla como se ve a continuación (Figura 15)

x	y = −4x
3	− 12
2	− 8
1	− 4
0	0
- 1	4
- 2	8
- 3	12
5	- 20

Figura 14. Respuesta de Diego en el Ejercicio 9

Después D dibuja los puntos obtenidos en la tabla anterior (Figura 15).

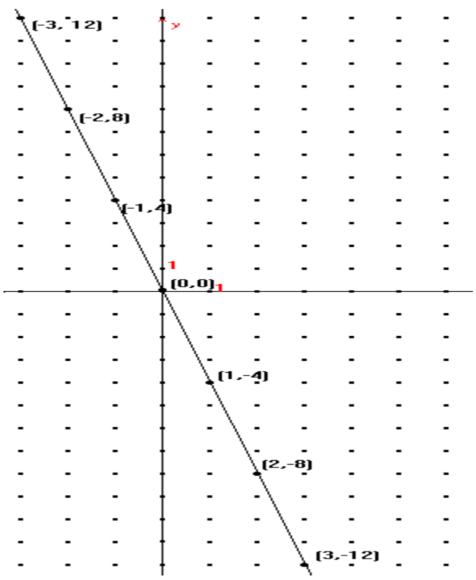


Figura 15. Respuesta de Diego en el Ejercicio 9

E: “¿Qué operación te representa la recta trazada?
D: “Una multiplicación”. Durante la fase de enseñanza se manejó la operación multiplicación bajo el concepto de múltiplos de un número. Por tal motivo, el entrevistador pretende que D concluya que encontró una recta que representa los múltiplos de -4.
E: “Entonces, todos los valores que toma “x” están multiplicados por ¿cuánto?
D: “Por menos cuatro” (presencia del negativo como sustractivo).

E: "¿Entonces todos esos resultados, que son del -4".
D: "Multiplicadores".
E: "Si te digo que x = 5 ¿cuánto vale "y"?
D: "menos 20".
E: "Bien, anótalo en la tabla". D anota en la columna de "x" 5 y en la columna de y = -4x escribe -20.
E: "¿Puedes comprobar que el resultado es correcto?". D En silencio toma la regla, la coloca sobre la recta trazada y la prolonga hasta el punto (5, -20).
E: "¿Pertenece a la recta?"
D: "Sí".
E: "¿Por qué el resultado de multiplicar -4(5) no puede ser positivo 20?"
D: "Porque sería para arriba".
E: "¿Dónde quedaría?"
D: "Por aquí"(señala el primer cuadrante).
E: "¿Y pertenece a la recta?".
D: "No"
E: "Entonces porqué un número negativo por un negativo te da como resultado un número positivo".
D: "Por…la ley de los signos".
E: "¿Podríamos verificar esas leyes de los signos en el plano cartesiano? Si yo digo que éste no fuera -12, sino positivo 12" (se refiere al primer punto de la tabla de coordenadas (3, -12)). **D:** Localiza el punto en el plano y contesta "No está en la recta".
E: "Entonces ¿qué puedes afirmar en cuanto a la ley de los signos para este caso?"
D: "Que menos por más da menos".

Esta afirmación de D justifica la ley de los signos (-)(+) = - de manera gráfica, ya que si no fuera así, D dice "que no estaría en la recta". Podemos afirmar que la operación y = -4x y la recta encontrada le han brindado a D una fuente de significados para validar las leyes de los signos para la multiplicación.

Observaciones al Ejercicio 9:

- D presenta dificultades para descubrir la operación involucrada en la expresión y = -4x. Primero la visualiza como una resta: x - 4, después como una suma: 4 + x. El entrevistador le presenta la operación 2( ) = 6 y D sigue pensando que es suma visualizándola como 2 + 4 = 6. Finalmente D advierte que es una multiplicación.

- Logra pasar del principio de permanencia algebraico al geométrico-algebraico, cuando verifica que los valores asignados a "x" y multiplicados por -4 son los resultados correspondientes a "y" situados sobre la recta y = -4x.

---

5. Conclusiones

A partir de los resultados del cuestionario inicial, se pudo comprobar que la mayoría de los estudiantes sólo recurren al principio de permanencia algebraico cuando resuelven operaciones básicas con positivos y negativos, ya que sólo hacen una manipulación algebraica y no logran incorporar a la geometría para manejar e interpretar dichas operaciones (Damián, 2009, p.p. 78-79). Después de haber aplicado la propuesta de enseñanza al grupo escolar elegido, se manifiesta en concordancia con Freudenthal (ver página 2 de este artículo) el principio de permanencia geométrico-algebraico.

En esta investigación hemos seguido el camino de Freudenthal para introducir la enseñanza de las operaciones elementales de los números positivos y negativos, organizando familias de rectas en el plano. Esta ruta poco explorada o quizás nunca, utilizada con sujetos que se encuentran en la transición de la aritmética al álgebra, ha revelado la presencia de diferentes y contrastantes procesos de resolución a través de los diálogos de entrevistas video grabadas.

A continuación se muestran los hechos más reveladores del Estudio para los casos de los dos estudiantes extremos. Estos hechos pueden contribuir a una mayor comprensión de las operaciones elementales con números positivos y negativos a nivel de secundaria.

En el caso de Erika (estudiante de bajo rendimiento) la representación tabular constituye un obstáculo impidiéndole realizar operaciones con positivos y negativos ya que, recurre al seguimiento de patrones numéricos de arriba para abajo en la tabla. Se observó una doble centración del plano cartesiano. Por un lado, valida sus propias respuestas, aunque sean erróneas, y por el otro, el plano cartesiano se vuelve un obstáculo al no permitirle relacionar las expresiones algebraicas de las operaciones elementales y las familias de rectas trazadas en el plano.

Erika manifiesta dificultades operativas que la conducen a asociar dos rectas a las representaciones geométricas de las expresiones algebraicas. No tiene consolidada la noción de variable. Utiliza dos categorías del número negativo, como signado al colocarlo en las representaciones tabulares y como relativo cuando se centra en las rectas trazadas en el plano cartesiano. Al trabajar en papel y lápiz, usa erróneamente la ley de los signos del dominio multiplicativo en situaciones aditivas, que la regresan al uso de los números naturales. A pesar del camino intrincado que recorre para resolver las tareas propuestas, resulta muy notable su avance hacía el reconocimiento del principio de permanencia geométrico-algebraico manifestado en los siguientes hechos entresacados de los diálogos que sostiene con el entrevistador: Surge un tratamiento fenomenológico entre las rectas trazadas y las operaciones elementales cuando concreta la idea de que en ellas intervienen números positivos y negativos. Así mismo, se advierte una transición del principio de permanencia algebraico al geométrico-algebraico cuando el concepto intuitivo de infinito que construye desde la operación adición, le permite extender por ambos lados las rectas trazadas en el plano, cruzando otros cuadrantes y no quedarse sólo en el primero. Realiza manipulaciones algebraicas con los positivos y negativos, conduciéndola en algunos casos a respuestas erróneas y en otros, sus resultados son correctos. De la misma manera observamos una manipulación geométrica, es decir, realizó acciones físicas y verbales, describiendo desplazamientos con sus manos y dedos sobre el plano cartesiano en forma espontánea. De hecho, ella inició el proceso de resolución señalando únicamente con su dedo los semiejes de las abscisas y ordenadas, haciéndose presente su pasado unidimensional de la recta numérica y al cubrir con su mano la región interior de los cuadrantes, se observa la transición a lo bidimensional. Finaliza identificando las operaciones elementales entre positivos y negativos así como estableciendo un puente aunque endeble entre los ámbitos geométrico y algebraico.

El caso de Diego (estudiante de alto desempeño) reveló que al representar la suma $x + y = 8$ en el plano cartesiano, logra la extrapolación del cero sin ninguna dificultad. Se observa el paso del principio algebraico al geométrico-algebraico cuando relaciona la expresión $x + y = 8$ con la recta trazada. También logra dar un tratamiento fenomenológico entre las expresiones planteadas en los ejercicios: 2A, 2B, 2C y 2D, donde se asigna un valor numérico a uno de los cuadritos y la recta encontrada en el plano cartesiano. Hace uso de los negativos como signados y relativos al recorrer correctamente con su bolígrafo en el plano cartesiano las ordenadas y abscisas respectivamente. Se observa la presencia del número negativo como sustractivo al restar las cantidades de las expresiones de los ejercicios: 2A, 2B, 2C y 2D, ignorando el signo (+) de la operación de adición. Se advierte claramente el paso del principio de permanencia algebraico al geométrico-algebraico.

Diego es capaz de justificar por qué dos números negativos al sumarse nunca van a dar como resultado un número positivo. La operación adición organiza la recta x + y = 8 suministrándole información para justificar que “la recta tiene un número infinito de puntos, y por lo tanto existe un número infinito de parejas que al sumarse dan 8 como resultado”. Realiza la prolongación de la recta por ambos extremos, cruzando otros cuadrantes y no quedándose sólo en el primero. La utilización del modelo chino lo ayudó a resolver las sustracciones, transitando de los números sustractivos a los relativos. Finalmente, validó espontáneamente sus resultados a través de la recta que trazó, justificando la operación de sustracción vía la descripción algebraica y la representación geométrica de la misma, identificando correctamente los cuadrantes que debía cruzar la recta. Presenta dificultades para descubrir qué operación representa la expresión y = -4x. Una vez que Diego advierte que se trata de una multiplicación resuelve correctamente las operaciones con positivos y negativos. Pasa del principio de permanencia algebraico al geométrico-algebraico cuando verifica que los valores asignados a “x” y multiplicados por -4 son los resultados correspondientes a “y”, situados sobre la recta y = -4x. En el caso de la división no presentó ninguna dificultad para llegar al principio de permanencia geométrico-algebraico. Las representaciones de las rectas y = – 4x, y = $\frac{x}{4}$, le permitieron a Diego, justificar las leyes de los signos de manera geométrica, ya que si no se cumplieran dichas leyes, los puntos no pertenecerían a las rectas encontradas. Logra el principio de permanencia geométrico-algebraico al ser Diego capaz de conjugar los dominios aditivo y multiplicativo, que aparecen desconectados en la mayoría de los modelos de enseñanza, exhibidos en el currículo escolar y la literatura de investigación al respecto.

Bibliografía

Cohen, L. y Manion, L. (1980). *Research Methods in Education* . London: Croom Helm.

Damián, E. (2009). *El Plano Cartesiano como un Organizador Fenomenológico en la Adición, Sustracción, Multiplicación y División de Números Enteros.*Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN. México.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of Mathematical Structures. *Negative Numbers and Directed magnitudes* (pp. 432- 460). Mathematics Education Library.

Gallardo, A. (1994). *El Estatus de los Números Negativos en la Resolución de Ecuaciones Algebraicas.* Tesis Doctoral. Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN. México.

Gallardo, A. (2002). The extensión of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 171-192.

Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática.* Madrid, Universidad Autónoma de Madrid/Gedisa.

Aurora Gallardo Cabello, nació en México D.F. Doctora en Ciencias, especialidad en Matemática Educativa. Investigadora titular del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N. Publicaciones en Recherches en Didáctiques des Mathématiques, Revista Educación Matemática, Proceding of the Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education (PME) Educational Studies in Mathematics, Procedings of the Annual Meeting, North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-NA).

Eleazar Damián Velázquez, nació en México D.F. Es Licenciado en Educación Media con especialidad en Matemáticas por la ENSM y Maestro en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa por el CINVESTAV-IPN. Actualmente se desempeña como Profesor de Matemáticas en una Escuela Secundaria en México D.F dependiente de la SEP.