NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 78, noviembre de 2011, páginas 157–168

De fósiles, fantasmas, y algunas cosas más

José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz (Club Matemático[1])

Resumen El Proceso de Resolución de Problemas aplicado a la búsqueda de números fósiles. Uso de tablas y esquemas de árbol en su resolución. Nuevos problemas a resolver y comentar, un par de ellos de abuelos.

Palabras clave Proceso Resolución Problemas. Números fósiles. Tablas, esquemas, árboles. Problemas de abuelos.

Abstract The Problem Solving Process applied to the search for fossil numbers. Use tree diagrams and tables in its resolution. New problems to solve and discuss a couple of them grandparents.

Keywords Problem Resolution Process. Numbers fossils. Tables, diagrams, trees. Problems grandparents.

¿Qué les pareció nuestra sorpresa del sitio web del Coro “Carpe Diem”? Pueden ustedes escuchar allí las canciones de sus dos discos editados hasta la fecha. Hay una buena versión coral, original, de la canción de Les Luthiers “El teorema de Thales”. Y muchas cosas más.

Al grano. Éstos son los problemas presentados en el número anterior de la revista. ¿Los han resuelto? Han tenido un verano por delante... Estamos seguros de que la mayoría de nuestros lectores sí los han resuelto. Comentaremos ahora sus correspondientes soluciones y, para ello, utilizaremos la que una buena lectora de nuestros artículos nos ha enviado.

El fósil de un número

(Procedencia: Fase provincial de Alicante de la XIX Olimpiada Matemática, 2008)

Dado un número natural N, se multiplican todas sus cifras. Se repite el proceso con el resultado obtenido, hasta obtener un número de una cifra únicamente; a ese número se le llama el fósil de N. Por ejemplo, el fósil de 327 es 8.

Hallar el mayor número natural, con todas sus cifras distintas, cuyo fósil sea impar.

[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón** y **Manuel García Déniz**, jubilados del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna) y del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife), respectivamente. jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com

P R O B L E M A S

Proceso de resolución

Esta primera propuesta era bastante sencilla. No fija cuál debe ser el fósil. Se trata de una propuesta más abierta y puede proponerse a los alumnos de Primaria sin ninguna dificultad.

Fase I. Comprender

En la fase de "Comprender", los alumnos han de llegar a la siguiente conclusión: ***Como buscamos un fósil impar, ninguna de las cifras del número que buscamos puede ser par.***

Y como consecuencia de ella, tenemos esta otra: ***Como todas sus cifras deben ser diferentes, para ser lo más grande posible deberíamos usar todas las cifras impares***.

Fase II. Pensar

La fase de "Pensar" debe decidirse por un ENSAYO Y ERROR dirigido, en forma de pequeña investigación a partir de las cifras 1, 3, 5, 7 y 9.

Fase III. Ejecutar

La fase de "Ejecutar" debe iniciarse, pues, con el producto de todas las cifras: 1 x 3 x 5 x 7 x 9 = 945, que tiene una cifra par, y con la consiguiente aplicación de la regla del juego tendríamos al final un fósil par.

Por tanto, tenemos que usar cuatro cifras. Quitar la más pequeña, el 1, no ayuda, pues el producto seguiría siendo el mismo.

Debemos entonces probar a quitar sucesivamente cada una de las otras cifras y formar un producto de cuatro. Naturalmente, como vamos a buscar el mayor número formado, empezaremos quitando la cifra a partir de la más pequeña.

Probamos a quitar el 3, obtenemos el producto 1 x 5 x 7 x 9 = 315, y como 3 x 5 = 15, y siendo 1 x 5 = 5, eso nos proporciona un fósil impar, el **5**.

Fase IV. Responder

Para la fase de "responder", ya sabemos que debemos usar los números 1, 5, 7 y 9, y para que sea lo mayor posible pondremos los mayores en las posiciones más a la izquierda.

El número buscado es, entonces, el 9751.

El fantasma de un número

Otra versión del mismo (Procedencia: **15° Olimpíada de Mayo, Olimpiada Matemática Argentina,** 9 de Mayo de 2009, Nivel: **3^er^ Ciclo Primaria –1^er^ Ciclo Secundaria**)

(Web: http://www.oma.org.ar/enunciados/index.htm#omn)

A cada número natural de dos cifras se le asigna un dígito de la siguiente manera: Se multiplican sus cifras. Si el resultado es un dígito, éste es el dígito asignado. Si el resultado es un número de dos cifras se multiplican estas dos cifras, y si el resultado es un dígito, éste es el dígito asignado. En caso contrario, se repite la operación. Por ejemplo el dígito asignado a 32 es el 6 pues 3×2 = 6; el dígito asignado a 93 es el 4 pues 9 × 3 = 27, 2 × 7 = 14, 1 × 4 = 4.

Halla todos los números de dos cifras a los que se les asigna el 8.

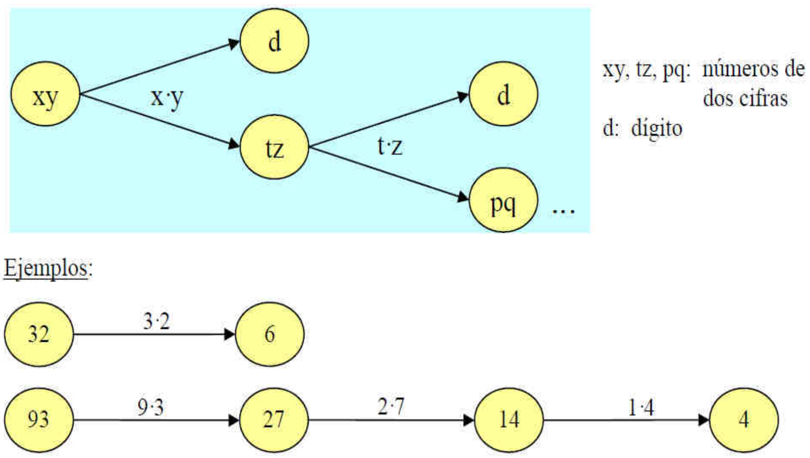
Para la solución de este problema hemos tomado la que, gentilmente, nos ha cedido la profesora Sonia Fernández, de La Laguna (Tenerife), miembro también del Seminario Newton de Resolución de Problemas, el mismo al que pertenece y coordina nuestro conocido Alexander Hernández, bajo la tutela de la Sociedad Canaria “Isaac Newton” de Profesores de Matemáticas.

Proceso de resolución

Fase I. Comprender

Datos	Objetivo	Relación
- El dígito 8. - Número de dos cifras.	Encontrar los números a los que se les asigna el dígito 8.	Que cada dígito se obtiene por la multiplicación de las cifras de un número o por las sucesivas multiplicaciones de las cifras del producto hasta que se consiga sólo un dígito.

DIAGRAMA: (A través de un diagrama de árbol binario, de dos ramas.)



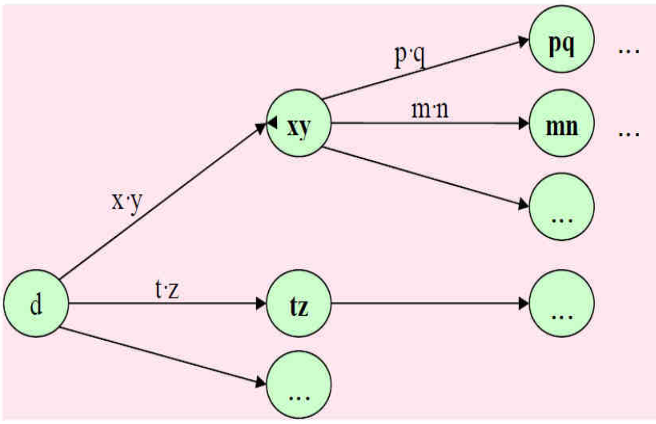
Fase II. Pensar

1. Estrategia (específica) EMPEZAR UN PROBLEMA DESDE ATRÁS

Se conoce el final (cuál es el dígito asignado, 8) y se quiere conocer el comienzo (a qué números se les asigna el dígito 8).

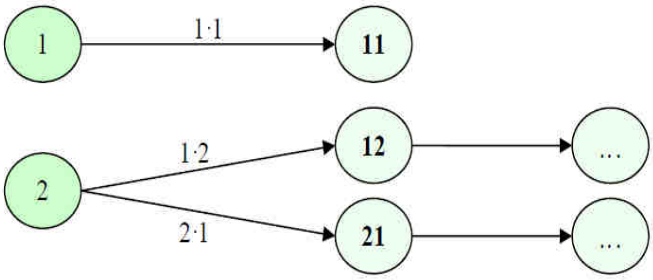
Hay que elaborar el diagrama inverso, teniendo en cuenta que en las multiplicaciones de dos factores diferentes importa el orden en que las cifras se coloquen: 2·3 = 1·6 = 6 y 1·2→ 12, 2·1→ 21

Para ello, utilizamos un diagrama de árbol más amplio



Posibles soluciones: **xy**, **tz**, **pq**, **mn**…

Ejemplos:



Esquema 1.

Aspectos a tener en cuenta:

Al plantear la resolución del problema por la estrategia "empezar un problema desde atrás", se deben realizar las operaciones inversas a como indica el problema para llegar a la solución. En este caso, como el problema plantea multiplicaciones, entonces se deben efectuar divisiones y más concretamente divisiones exactas.

En definitiva, se trata de obtener todos los divisores de los números que van apareciendo y seleccionar aquellos, de una sola cifra, con los que se consiga una multiplicación con otro divisor también de una sola cifra que dé como producto dicho número.

Luego, se plantea la cuestión de cómo obtener todos los divisores de un número de una forma fácil y amena, para lo cual se propone hacer uso de la siguiente tabla (web "El Tinglado"):

http://www.tinglado.net/?id=averiguar-todos-los-divisores-de-un-numero&page=1

Número de dos cifras	**Potencias de los números primos**
Potencias de los restantes números primos	**Divisores** (multiplicando fila × columna)

Sólo es necesario disponer de la descomposición factorial de los números de los que se pretende obtener los divisores. En la primera fila se colocan las potencias del primer factor primo (tantas como tenga en su descomposición el número). En las filas sucesivas se va multiplicando por el resto de los factores primos y sus potencias. Los divisores serán todos los que aparecen desde la 2ª columna hasta la última. Por ejemplo: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

60	1	2	4
×3	3	6	12
	5	10	20
×5	15	30	60

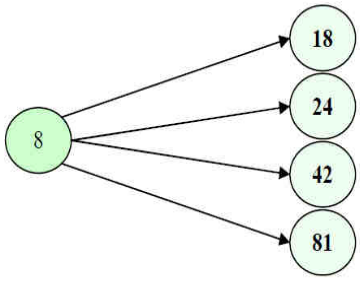
2. Estrategia (básica) ORGANIZAR LA INFORMACIÓN

Es importante organizar los números que se vayan obteniendo en la estructura de árbol para luego poder hacer las comprobaciones más rápidamente.

$8 = 2^3$

8	1	2	4	8
-	-	-	-	-

$8 = 1 \cdot 8 = 8 \cdot 1 = 2 \cdot 4 = 4 \cdot 2$



Esquema 2. Organización

Fase III. Ejecutar

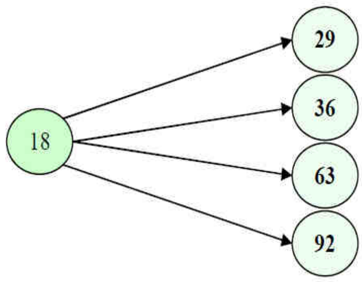
Ahora llega el momento de realizar las operaciones:

PRIMER NIVEL

$18 = 2 \cdot 3^2$

18	1	2
×3	3	6
×9	9	18

$18 = 2 \cdot 9 = 9 \cdot 2 = 3 \cdot 6 = 6 \cdot 3$



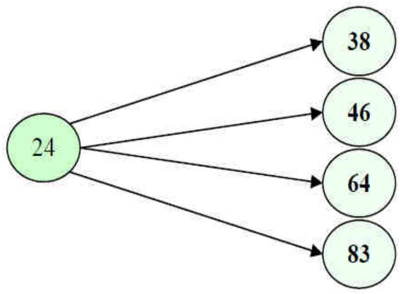
Esquema 3. Número 18

SEGUNDO NIVEL

$24 = 2^3 \cdot 3$

24	1	2	4	8
×3	3	6	12	24

$24 = 3 \cdot 8 = 8 \cdot 3 = 4 \cdot 6 = 6 \cdot 4$



Esquema 4. Número 24

Y tendríamos esquemas semejantes para los números 42 y 81.

Antes de pasar al tercer nivel, veamos cómo va quedando el árbol de posibles soluciones:

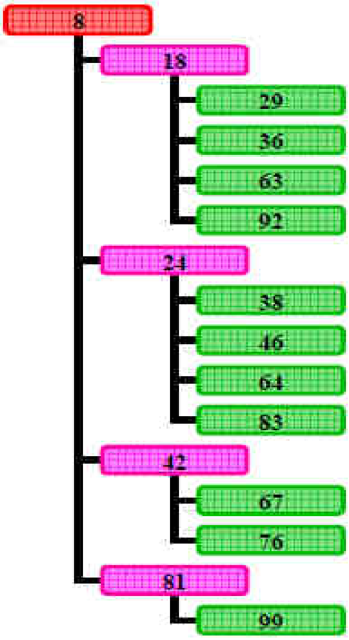
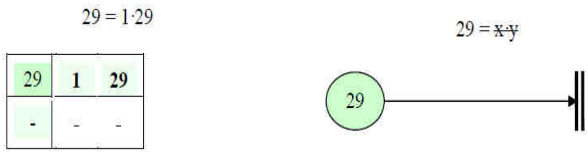
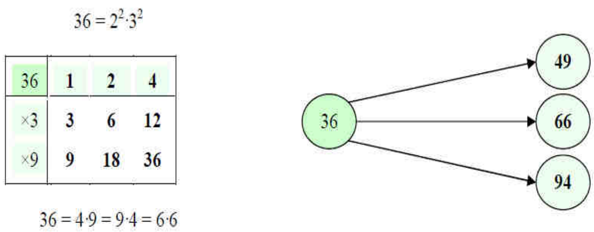


Figura 1. Árbol de posibles soluciones

TERCER NIVEL



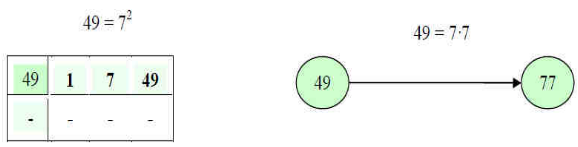
Esquema 5. Número 29



Esquema 6. Número 36

Análogamente, se elaboran los esquemas para los números 63, 92, 38, 46, 64, 83, 67, 76 y 99.

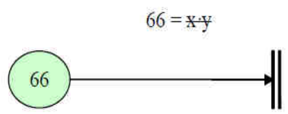
CUARTO NIVEL



Esquema 7. Número 49

$66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$

66	1	2
×3	3	6
	11	22
×11	33	66



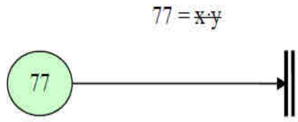
Esquema 8. Número 66

Los esquemas para los valores 94, 79, 97 y 88 completarían los casos factibles en este nivel.

QUINTO NIVEL

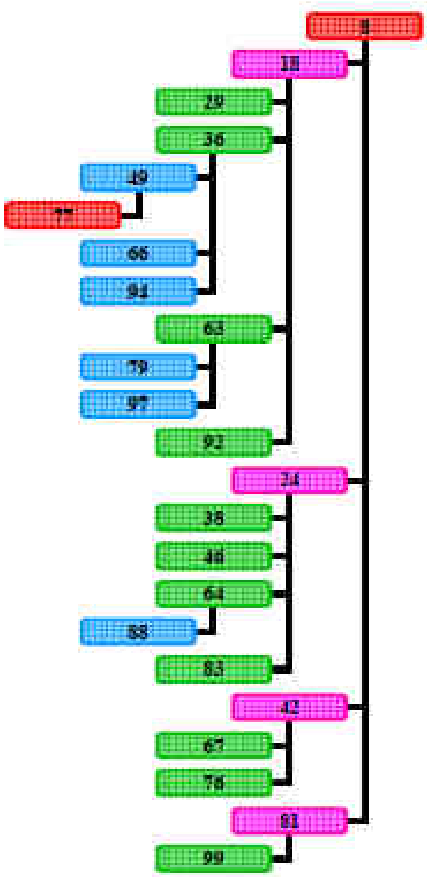
$77 = 7 \cdot 11$

77	1	7
×11	11	77



Esquema 9. Número 77

Luego, el árbol de posibles soluciones quedaría así:



18	8			
29	18	8		
36	18	8		
49	36	18	8	
77	49	36	18	8
66	36	18	8	
94	36	18	8	
63	18	8		
79	63	18	8	
97	63	18	8	
92	18	8		
24	8			
38	24	8		
46	24	8		
64	24	8		
88	64	24	8	
83	24	8		
42	8			
67	42	8		
76	42	8		
81	8			
99	81	8		

Figura 2. Árbol de posibles soluciones y tabla de comprobación

Fase IV. Responder

COMPROBACIÓN

En este apartado se debe comprobar la solución obtenida. Así que se invierte el diagrama de árbol, comprobando que cada ramificación da como producto final 8 (Figura 2).

Y se escribe la solución.

Los números a los que se les asigna el 8 como dígito son:

18 – 24 – 29 – 36 – 38 – 42 – 46 – 49 – 63 – 64 – 66 – 67 – 76
77 – 79 – 81 – 83 – 88 – 92 – 94 – 97 – 99

ANÁLISIS

Además, se debe verificar la relación de la solución obtenida con la realidad que expone el problema.

Por otro lado, se podría SIMPLIFICAR el problema planteando con otro número como dígito asignado, según la dificultad, como el 1, el 3, el 7, el 9 ó el 5.

Incluso se podría GENERALIZAR el problema hallando los números a los que se les asigna como dígito cualquiera de los números del 0 al 9. En este caso, se debería contemplar inicialmente las multiplicaciones que dan como resultado un dígito de 0 a 9, reflejadas en la tabla 1, adjunta, y si es factible representarlas como un número de dos cifras.

No se pueden tener en cuenta las multiplicaciones 0·n, pues daría lugar a números de una cifra y no de 2 cifras como pide el problema.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
~~0·1~~	1·1	1·2	1·3	1·4	1·5	1·6	1·7	1·8	1·9
1·0		2·1	3·1	4·1	5·1	6·1	7·1	8·1	9·1
~~0·2~~				2·2		2·3		2·4	3·3
2·0						3·2		4·2	
~~0·3~~									
3·0									
~~0·4~~									
4·0									
~~0·5~~									
5·0									
~~0·6~~									
6·0									
~~0·7~~									
7·0									
~~0·8~~									
8·0									
~~0·9~~									
9·0									

Tabla 1. Generalización

A continuación se presentan otros comentarios realizados por los compañeros del Seminario.

Utilizando la estrategia de ENSAYO Y ERROR se conseguirían todos los dígitos asignados a todos los números de dos cifras, colocando en la primera columna de una tabla el producto de sus cifras, en la segunda el producto de las cifras del resultado obtenido en la primera columna, etc. tal como se muestra en la tabla 2.

Cada columna corresponde a un nivel:

Números	1º Nivel	2º Nivel	3º Nivel	4º Nivel
10	0			
11	1			
12	2			
13	3			
14	4			
15	5			
16	6			
17	7			
18	8			
19	9			
20	0			
21	2			
22	4			
23	6			
24	8			
25	10	0		
26	12	2		
27	14	4		
28	16	6		
29	18	8		
30	0			
31	3			
32	6			
33	9			
34	12	2		
35	15	5		
36	18	8		
37	21	2		
38	24	8		
39	27	14	4	
40	0			
41	4			
42	8			
43	12	2		
44	16	6		
45	20	0		
46	24	8		
47	28	16	6	
48	32	6		
49	36	18	8	
50	0			
51	5			
52	10	0		
53	15	5		
54	20	0		

Números	1º Nivel	2º Nivel	3º Nivel	4º Nivel
55	25	10	0	
56	30	0		
57	35	15	5	
58	40	0		
59	45	20	0	
60	0			
61	6			
62	12	2		
63	18	8		
64	24	8		
65	30	0		
66	36	18	8	
67	42	8		
68	48	32	6	
69	54	20	0	
70	0			
71	7			
72	14	4		
73	21	2		
74	28	16	6	
75	35	15	5	
76	42	8		
77	49	36	18	8
78	56	30	0	
79	63	18	8	
80	0			
81	8			
82	16	6		
83	24	8		
84	32	6		
85	40	0		
86	48	32	6	
87	56	30	0	
88	64	24	8	
89	72	14	4	
90	0			
91	9			
92	18	8		
93	27	14	4	
94	36	18	8	
95	45	20	0	
96	54	20	0	
97	63	18	8	
98	72	14	4	
99	81	8		

Tabla 2.

A través de una hoja de Excel se pueden hallar los valores, utilizando las funciones de la hoja de cálculo.

De esta forma se tendrían todos los números de dos cifras asociados a los dígitos.

En la tabla 3, de la derecha, se procedería de forma inversa a la tabla anterior: en la primera columna el producto final (0), en la segunda (1º nivel) el número de dos cifras más sencillo que da ese resultado (10), en la tercera el número superior a este, que al multiplicar sus cifras da el escrito en esa columna, y así se van contemplando todos los casos posibles, columna a columna y fila a fila.

Dígito	1º Nivel	2º Nivel	3º Nivel	4º Nivel
0	10	25	55	
0	10	25		
0	10	52		
0	10			
0	20	45	59	
0	20	45	95	
0	20	45		
0	20	54	69	
0	20	54	96	
0	20	54		
0	20			
0	30	56	78	
0	30	56	87	
0	30	56		
0	30	65		
0	30			
0	40	58		
0	40	85		
0	40			
0	50			
0	60			
0	70			
0	80			
0	90			
1	11			
2	12	26		
2	12	34		
2	12	43		
2	12	62		
2	12			
2	21	37		
2	21	73		
2	21			
3	13			
3	31			
4	14	27	39	
4	14	27	93	
4	14	27		
4	14	72	89	
4	14	72	98	
4	14	72		
4	14			
4	22			
4	41			
5	15	35	57	
5	15	35	75	
5	15	35		
5	15	53		
5	15			
5	51			
6	16	28	47	
6	16	28	74	
6	16	28		
6	16	44		
6	16	82		
6	16			
6	23			
6	32	48	68	
6	32	48	86	
6	32	48		
6	32	84		
6	32			
6	61			
7	17			
7	71			
8	18	29		
8	18	36	49	77
8	18	36	49	
8	18	36	66	
8	18	36	94	
8	18	36		
8	18	63	79	
8	18	63	97	
8	18	63		
8	18	92		
8	18			
8	24	38		
8	24	46		
8	24	64	88	
8	24	64		
8	24	83		
8	24			
8	42	67		
8	42	76		
8	42			
8	81	99		
8	81			
9	19			
9	33			
9	91			

Tabla 3.

Como nota final:

Tener en cuenta que dado un número se pueden encontrar divisores de una cifra cuyo producto sea dicho número si el número en cuestión se encuentra en las tablas de multiplicar del 0 al 9.

¡Fantástico! ¿No?

Y ahora nuestra propuesta de resolución para las próximas semanas. Provienen del 18º Rally Matemático Transalpino, Prueba Final, mayo-junio de 2010.

Para alumnos de los primeros años de Primaria:

Los siete enanitos se pesan

Blancanieves ha regalado una balanza a los siete enanitos. Se colocan uno tras otro en la balanza y escriben su peso en una hoja de papel que dan a Blancanieves, sin poner sus nombres:

22 kilos, 14 kilos, 16 kilos, 11 kilos, 17 kilos, 24 kilos, 19 kilos

Para divertirse, suben de dos en dos en la balanza con excepción de Gruñón que no quiere jugar. Entonces dicen a Blancanieves que:

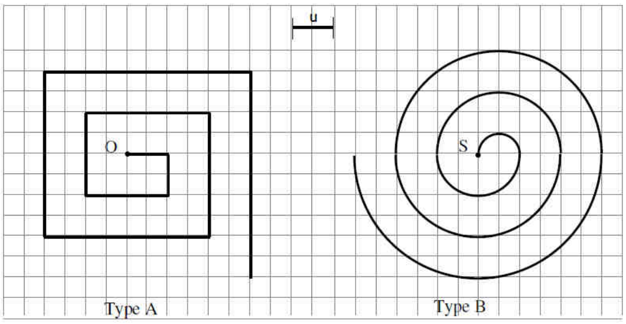
- Dormilón y Sabio estaban juntos en la balanza
- Tímido y Bonachón estaban juntos en la balanza
- Mudito y Tontín estaban juntos en la balanza y añadieron con sorpresa que la balanza indicaba cada vez el mismo peso.

Blancanieves dice: "No me digas más, ahora sé lo que pesa Gruñón".

¿Cuál es el peso de Gruñón?

Para alumnos de los últimos años de Primaria y primeros de Secundaria:

Espirales



En la cuadrícula están dibujadas dos espirales de distinto tipo, una obtenida uniendo segmentos, la otra uniendo semicircunferencias:

La espiral de la izquierda (tipo A) está construida a partir del punto O con 10 segmentos y tiene 30 unidades de largo.

La espiral de la derecha (tipo B) está construida a partir del punto S y está formada por 6 semicircunferencias.

¿Cuál es el mínimo número de segmentos necesarios para obtener una espiral del tipo A que sea más larga que una espiral del tipo B construida con 30 semicircunferencias?

Y ahora, algo que se está convirtiendo en una costumbre: **los problemas de los abuelos**

Dos abuelos y sus nietos en la librería

Dos abuelos, Garden y Zerepur, entran en una librería con sus nietos Lucía y Mario y compran libros. Cuando salen se dan cuenta de que cada uno ha pagado por cada uno de sus libros una cantidad de euros igual al número de libros que ha comprado. Cada familia, abuelo y nieto, o nieta, ha pagado 65 €. Garden ha comprado un libro más que Zerepur, y Lucía ha comprado solamente un libro.

¿Quién es el abuelo de Lucía?

Los abuelos plantean un problema

Al pagar en la librería, le dan a uno de los abuelos cuatro vales con una cantidad de puntos diferentes cada uno, que les servirán para un descuento en las próximas compras que hagan. Los abuelos quieren sacar provecho de esto y plantean a sus nietos la siguiente cuestión: selecciono tres vales cualesquiera y encuentro su media aritmética, que sumo con el valor del cuarto vale. Haciéndolo obtengo los números 29, 23, 21 y 17. El vale con más puntos será para Mario, el menor de los nietos:

¿Cuántos puntos hay en cada uno de los cuatro vales?

Y aquí, como hasta ahora ¡y ya van veintinueve!, quedamos hasta la próxima entrega (que será de la triple X). Pero insistimos, como siempre también: lean el artículo, resuelvan los problemas, úsenlos con sus alumnos, si es posible, aporten luego a nuestra revista sus comentarios, soluciones, propuestas o simplemente el rico anecdotario acerca del comportamiento de la clase al resolver uno de estos problemas o cualquier otro. Como ha hecho Sonia (¡gracias!).

Vamos, ¡**anímense**!

Como siempre, aguardamos sus noticias a la espera de la próxima edición de la revista.

NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas

Un saludo afectuoso del **Club Matemático.**