NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 79, marzo de 2012, páginas 71-80

El extraño caso de las variedades tetradimensionales

Rafael Andrés Alemañ Berenguer (Universidad Miguel Hernández. Elche. España)

Fecha de recepción: 1 de junio de 2011
Fecha de aceptación: 15 de septiembre de 2011

Resumen Entre las utilidades más interesantes de las variedades diferenciables, se halla su aplicabilidad a la física. Pero en el caso más importante, el de dimensión 4, carecemos de un criterio que establezca la unicidad de las estructuras diferenciables definibles sobre ellas.

Palabras clave Variedades, análisis, diferenciabilidad, tetradimensional, física matemática.

Abstract Among the various features of differentiable manifolds, its applicability to physics is one of the most interesting. But for the most important issue, when dimensionality is 4, we have no criterion to establish the uniqueness of the differentiable structures that are possible to define on those manifolds.

Keywords Manifolds, analysis, differentiability, four-dimensional, mathematical physics.

1. Introducción

Desde su invención en el siglo XVII, nadie duda del papel insustituible desempeñado por el cálculo infinitesimal –en sus dos vertientes, integral y diferencial– ya sea en el campo de la matemática pura, o en su aplicación a la física como herramienta óptima para formalizar el comportamiento dinámico de la naturaleza. Sin embargo, no son tan conocidos los escollos con que tropiezan los intentos de aquilatar las condiciones de diferenciabilidad de los espacios, o más rigurosamente "las variedades", cuya dimensionalidad resulta más interesante en la descripción del mundo físico. Quizás por ello convenga una exposición general de la situación, que cabe esperar revista interés para los profesionales cuyas áreas de trabajo se encuentren más alejadas de este asunto.

Consideraremos por simplicidad como punto de partida la estructura topológica de una variedad diferenciable M. Una variedad *n*-dimensional es un conjunto cualquiera que localmente se asemeja al conjunto también *n*-dimensional de los números reales $\mathbf{R}^n$. Por ejemplo, la esfera, S^2, es una variedad bidimensional que localmente (en un entorno muy reducido alrededor de cualquier punto) comparte las propiedades del plano $\mathbf{R}^2$. Esto nos permite asociar a cada punto una colección de *n* números reales llamados "coordenadas" que lo identifican.

Un mapa plano de un área de la superficie terrestre curva, nos permite orientarnos en un entorno local a pesar de que las propiedades globales pueden diferir considerablemente. De hecho, $\mathbf{R}^2$ es plano, no compacto e infinito, mientras que $\mathbf{S}^2$ es curvo, compacto y de superficie finita. Por ello nuestro sistema de coordenadas no aspira a ser globalmente válido. No podemos construir un mapa plano de una superficie esférica que represente correctamente todas sus propiedades en todos sus puntos a la vez, pues aparecerán puntos singulares –donde alguna de nuestras coordenadas no estará definida– generalmente en los polos. En tal caso la solución consiste sencillamente en cambiar de sistema de coordenadas cerca del punto singular. Así, disponiendo de una colección de sistemas de coordenadas superponibles, no hay impedimento para cubrir toda nuestra variedad[1]. Al tratar con variedades curvas es más cómodo definir espacios vectoriales tangentes en cada punto *p*.

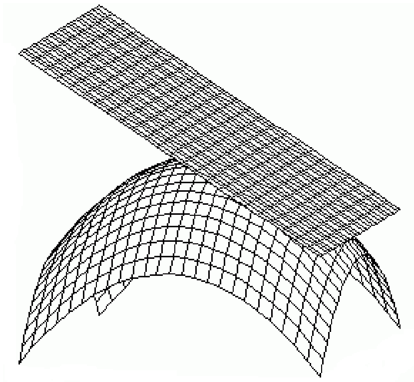

Figura 1. En cada punto de una superficie curva podemos definir un plano tangente a ella.

La topología nos proporciona la idea de “proximidad” entre dos puntos (no de “distancia”), y sus magnitudes invariantes son aquellas que permanecen sin cambios bajo transformaciones bicontinuas arbitrarias, una de las clases más generales de transformaciones aplicables. En primera aproximación M corresponde a la variedad continua y amorfa que parecen presuponer los estudios de Adolf Grünbaum (1973). Esta variedad consistiría en una colección continua y homogénea de puntos sobre la que es posible definir una dimensionalidad, coordenadas y diversas funciones diferenciables.

El espacio topológico debe satisfacer ciertas exigencias para sernos útil, como la posibilidad de separar dos sucesos cualesquiera en entornos disjuntos. Esta propiedad permite demostrar el teorema de la función inversa, piedra angular del análisis matemático clásico, que a su vez es un ingrediente indispensable en la física teórica (si el espacio topológico no fuese separable, la misma noción de sucesos espacio-temporales distintos resultaría ambigua).

Por la relevancia que tendrá en relación con sus aplicaciones a la naturaleza, supondremos que cabe representar el espacio-tiempo físico mediante un espacio separable de Haussdorff[2]. Pero si el universo físico estuviese constituido por partes enteramente desligadas entre sí, no existiría modo de intercambiar información entre ellas. Y hasta donde nos es dado conocer, no encontramos fronteras en el espacio tiempo, salvo quizás en puntos aislados o singularidades (lo que tampoco implica una extensión infinita para el cosmos, como nos muestra el ejemplo de la esfera, sin bordes ni fronteras pero con volumen finito). Esa es la razón de postular que nuestro modelo matemático del espacio-tiempo sea también conexo y sin fronteras. Aun así, por su interés físico necesitamos manejar ciertas magnitudes calculables con integrales múltiples. Entonces, las series que definen a estas integrales deben converger, lo cual requiere que nuestra variedad topológica sea de la clase denominada *paracompacta.* En resumen, incluso en este nivel tan simple, elaborar un modelo matemático del espacio-tiempo supone admitir que se trata de una variedad topológica separable de Hausdorff, paracompacta, conexa y sin fronteras (Kirby y Siebenmann, 1977).

[1] Si bien no hay generalmente un recubrimiento único, lo que es fuente de insoslayables problemas en las reformulaciones matemáticas de la gravedad dentro de la teoría cuántica de campos.

[2] En homenaje a Felix Hausdorff (1868-1942), quien primero introdujo este axioma de separabilidad en los espacios topológicos. Dada su condición de judío en la Alemania nazi, se vio obligado al suicidio junto con su esposa y su cuñada para evitar la deportación.

2. Variedades "suaves" y diferenciabilidad

La estructura adicional más importante en una variedad es la "diferenciabilidad". Como su mismo nombre indica, tal estructura nos garantiza la posibilidad de extender el cálculo diferencial e integral a las funciones definidas sobre nuestra variedad. Según la definición de variedad topológica, debe ser posible asignar a cada punto un sistema euclídeo de coordenadas válido en un cierto entorno de dicho punto. Técnicamente se diría que el entorno de cada punto es homeomorfo a un conjunto abierto en el espacio euclídeo $\mathbf{R}^n$ (cualquiera que sea el valor de n). La palabra "homeomorfismo" denota una aplicación continua, biyectiva y con inversa continua (o "mapa", según el vocabulario al uso) entre conjuntos que establece la equivalencia topológica de éstos. En otras palabras, afirmar que dos espacios son homeomorfos es otro modo de decir que son topológicamente iguales: podemos convertir uno en el otro mediante deformaciones continuas, sin rasgar ni pegar parte alguna de ellos.

En el análisis matemático ordinario con una sola variable, las funciones diferenciables deben ser "suaves" (*smooth* en inglés), es decir, su gráfica debe carecer de huecos o puntas afiladas. Así pues, una expresión equivalente de "función diferenciable" es "función suave". Dada una de tales funciones vamos a suponer que existen sus derivadas de todos los órdenes, y diremos entonces que la función pertenece a la clase C^∞, o que es infinitamente diferenciable. La misma terminología se utiliza en las variedades donde las funciones que relacionan sistemas de coordenadas en entornos parcialmente superpuestos poseen las propiedades adecuadas de diferenciabilidad. Por ello, las variedades diferenciables se conocen también como variedades suaves.

Para efectuar en la práctica las operaciones de diferenciación sobre las funciones definidas en una variedad cualquiera, necesitamos un método que transfiera los conceptos del cálculo en $\mathbf{R}^n$ a espacios topológicos más generales. Y es ahí donde intervienen las nociones de "vectores tangentes" y "espacios tangentes". Podemos empezar imaginando el espacio tangente a una variedad en un punto como la mejor aproximación lineal a esa variedad en dicho punto. Por analogía con los casos de curvas y superficies, este espacio tangente debería ser un espacio n-dimensional "plano". Pero eso es exactamente la naturaleza de $\mathbf{R}^n$; por tanto, necesitamos un medio para asociar a cada punto p de una variedad M un espacio lineal tangente n-dimensional.

El espacio tangente a M en el punto p, simbolizado como T(M, p), no es más que el conjunto de todos los posibles vectores tangentes a todas las posibles curvas en M que pasan por p. Un elemento de T(M, p) puede servir, por consiguiente, como instrumento para especificar tanto una dirección en M como el ritmo de cambio de alguna magnitud a lo largo de esa dirección; esto es justamente una derivada direccional. Estas características de los elementos del espacio tangente son las que nos permiten definir la operación diferenciación sobre M.

Consideremos una función $f(x)$ definida sobre M que asigne un número real a cada punto $p \in$ M. Se dice que $f(x)$ es un "mapa" de M en $\mathbf{R}$. Supongamos a continuación que a cada punto p le asociamos un vector v_p perteneciente a T(M, p), configurando con ello un "campo vectorial". En consecuencia, podemos tomar v_p como si fuese una regla para asignar un número real $v_p(f)$ a cada punto p. En lenguaje técnico v se denomina una "1-forma contravariante".

El espacio tangente T(M, p) posee una estructura algebraica porque cualquier par de vectores suyos puede sumarse para dar otro vector también tangente, y cualquier vector tangente es susceptible de multiplicarse por un "escalar" (en nuestro caso, un número real) con el resultado de otro vector tangente. Esta clase de estructura algebraica se denomina *espacio vectorial*. Es muy natural considerar los elementos de T(M, p) como vectores tangentes a M en p. Pero, ¿qué es un vector realmente?

En el caso de T(M, p), un vector es una derivada direccional cuya expresión en cualquier sistema de coordenadas se realiza a través de las usuales reglas del análisis matemático. En abstracto, un vector es simplemente cualquier objeto de un sistema algebraico que satisfaga los axiomas de un espacio vectorial. Resulta entonces que todos los espacios vectoriales n-dimensionales con n finito son esencialmente similares: meras copias de $\mathbf{R}^n$ consistentes en n-tuplas de números reales. El caso 1-dimensional es una línea, el 2-dimensional es un plano, el 3-dimensional es el espacio ordinario, etc.

En su condición de espacio vectorial real, T(M, p) tiene lo que se conoce como "producto interno" o "producto escalar" (de hecho, cabe definir muchos tipos de tales productos). Se trata de una regla para multiplicar dos vectores y obtener un escalar. Si u y v son dos elementos de T(M, p), su producto interno se escribe $u \cdot v$, o $(u \cdot v)_p$ para subrayar el hecho de que se calcula específicamente en el punto $p \in$ M. Representados mediante sus componentes $(u_1, ..., u_n)$ y $(v_1, ..., v_n)$ respecto de una base ortonormal (vectores unitarios y mutumamente ortogonales), $u \cdot v = u_1 v_1 + ... + u_n v_n$, o en una notación más compacta[3], $u_i v_i$.

Dado que el producto interno –al definirse específicamente en cada $p \in$ M– puede elegirse arbitrariamente distinto en cada punto por separado, depende de nuestra libre elección definirlo de modo que sea diferenciable al pasar de un punto p al inmediatamente vecino, p'. Cuando esto se cumple para todos los puntos de M, la variedad ha sido dotada con una estructura riemanniana, en homenaje a Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866), quien desarrolló buena parte de este género de ideas analíticas y geométricas. Gracias a tal estructura es posible estipular las nociones de distancia entre dos puntos, curvatura en un punto, o las de área y volumen mediante el cálculo integral[4].

Este punto merece algunos comentarios adicionales. Para establecer una estructura globalmente diferenciable mediante sistemas de coordenadas locales, la intersección entre los mapas locales debe ser susceptible de diferenciación como las funciones en un espacio euclídeo. En otras palabras, donde los mapas se solapen las coordenadas definidas por cada mapa han de ser diferenciables con respecto a las coordenadas definidas por cada mapa en el *atlas* (el conjunto de todos los mapas definidos sobre la variedad). A su vez, los mapas que relacionan las coordenadas definidas por los diversos mapas, unas con otras, se denominan *mapas de transición*.

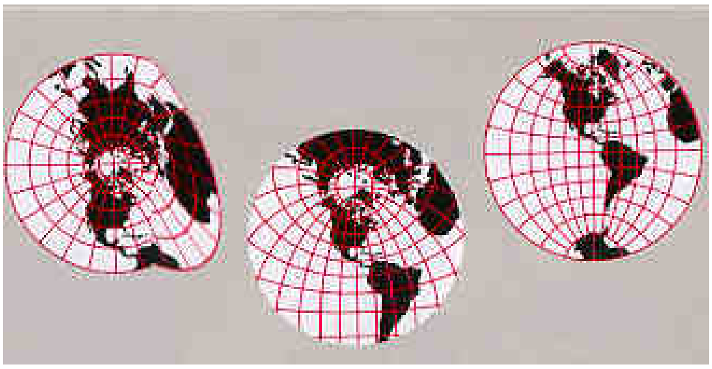

Figura 2. Atlas no diferenciables de mapas del globo terráqueo. En las figuras del centro y la derecha el Trópico de Cáncer es una línea suave, pero en la de la izquierda está quebrada.

[3] Como ya sabemos, de acuerdo con el convenio de Einstein de suma sobre índices repetidos, se suele omitir el signo del sumatorio, y se escribe sencillamente $u \cdot v = u_i v_i$.

[4] Todo ello es posible porque se supone que M es una variedad diferenciable; si tan solo fuese un espacio topológico no podríamos definir el espacio tangente, la estructura de Riemann, la curvatura y la distancia.

De construir semejante estructura diferenciable cabrá extender la definición de diferenciabilidad a espacios sin sistemas de coordenadas globales. En concreto, la posesión de una estructura diferenciable permite definir un espacio tangente globalmente diferenciable, funciones diferenciables, así como campos vectoriales y tensoriales también diferenciables. Salta a la vista de inmediato la importancia de las variedades diferenciables en la física. Tipos específicos de variedades diferenciables constituyen la base de grandes formalismos físicos, como la mecánica clásica, las teorías de Yang-Mills o las relatividades especial y general.

Lo cierto es que aunque una variedad diferenciable puede equiparse con una gran diversidad de estructuras riemannianas distintas, en la práctica es una sola la que se escoge. Cuando la variedad M se halla, digamos, "sumergida" en un espacio euclídeo por medio de alguna relación algebraica entre sus coordenadas (igual que $\mathbf{S}^2$ está inmerso en $\mathbf{R}^3$), entonces M se considera una subvariedad del espacio euclídeo y con ello "hereda" el producto escalar típico de dicho espacio. Como consecuencia, se tienen también especificadas unas nociones naturales de distancia y de curvatura, pues según el teorema de inmersión de Whitney, para $n > 1$ toda variedad diferenciable n-dimensional puede sumergirse en un espacio euclídeo de dimensión $2n - 1$ (Whitney, 1936; Cohem, 1985). La teoría concerniente a la estructura algebraica del producto interno de Riemann y las ideas de él derivadas (longitud, curvatura, volumen, etc.), se llama "geometría de Riemann".

3. El caso 4-dimensional

Dada la utilidad de la noción de variedad diferenciable, cabe preguntarse si de hecho toda variedad es susceptible de equiparse con una estructura diferenciable, y en su caso, si dicha estructura es única. En la década de 1950 este interrogante fue respondido afirmativamente para variedades de dimensionalidad igual o menor que tres: tales variedades siempre poseen estructuras diferenciables únicas (salvo difeomorfismos).

Sin embargo, pronto se advirtió que la situación era muy distinta en dimensiones superiores a tres. John Milnor encontró, en 1956, que la 7-esfera $\mathbf{S}^7$ podía dotarse de exactamente 15 estructuras diferenciables no equivalentes, 28 si se considera la orientación (que define una base ordenada en cada espacio tangente a la variedad). Se tenía la estructura típica heredada de la inmersión natural de $\mathbf{S}^7$ en $\mathbf{R}^8$, además de otras 27 estructuras exóticas (Milnor, 1956). Y lo que era todavía más sorprendente, había variedades de dimensión superior a cuatro que carecían por completo de estructuras diferenciables. En este aspecto, se hallaron medios para distinguir con bastante facilidad variedades sin diferenciabilidad siempre que sus dimensiones fuesen iguales o superiores a cinco.

Todo ello dejó la cuestión de las variedades 4-dimensionales en una situación harto curiosa: las variedades de dimensión menor tenían siempre una única estructura diferenciable, salvo difeomorfismos, mientras que las de dimensionalidad superior podían clasificarse según fuesen, o no, diferenciables. No tardó en demostrarse que, en efecto, existían tanto variedades 4-dimensionales diferenciables como no diferenciables. Por tanto, se planteaba una nueva pregunta: ¿era única la estructura diferenciable, cuando existía, de una variedad 4-dimensional? La respuesta consistía ahora en que la unicidad no estaba asegurada; la variedad 4-dimensional más simple, $\mathbf{R}^4$, era susceptible de poseer estructuras diferenciables atípicas. Este notable resultado se debe a Simon Donaldson, quien lo obtuvo mediante técnicas basadas en ideas físicas, como las ecuaciones de Yang-Mills (pertenecientes a una teoría gauge no abeliana) y un tipo especial de solución de las mismas llamada "instantón" (Donaldson, 1990; Donaldson y Kronheimer, 1990).

Si bien la perplejidad causada por esta conclusión ya era muy profunda, lo más asombroso es que $\mathbf{R}^4$ podía poseer infinitas estructuras diferenciables no equivalentes (en concreto, una cantidad infinita no numerable de ellas). El mérito de este descubrimiento se le adjudicó unos años más tarde a Clifford Taubes, notable matemático de Harvard (Taubes, 2000).

Figura 3. Simon Donaldson

Parece lógico suponer que nuestras ideas físicas deben jugar algún papel en la exploración de la diferenciabilidad de $\mathbf{R}^4$; al fin y al cabo se trata del espacio-tiempo que acoge la realidad física tal como la conocemos. Pese a todo, es francamente desconcertante hallar que no solo carece de unicidad el concepto de diferenciación en esta variedad, sino que incluso hay infinitas posibilidades distintas (Kreck, 1984).

¿Qué es lo que hace tan especiales las variedades de 4 dimensiones? Nadie lo sabe con certeza; tal vez sea una casualidad, o quizás una propiedad trascendente aún desconocida para nosotros. Sea como fuere, lo cierto es que el grupo de las rotaciones en $\mathbf{R}^4$ presenta una característica de la que carecen tales grupos en cualquier otro $\mathbf{R}^n$. El grupo de rotaciones en $\mathbf{R}^4$ no es simple; o en otras palabras, el grupo de giros en R^4 es producto de dos copias del grupo de las rotaciones en $\mathbf{R}^3$, lo que, a su vez, surge de la existencia en 4 dimensiones del álgebra no conmutativa correspondiente a unos peculiares números complejos llamados “cuaterniones”, descubiertos en el siglo XIX por el matemático y físico irlandés William Rowan Hamilton (1805 – 1865).

Una vez dicho todo esto es inevitable preguntarse si la estructura diferenciable natural en $\mathbf{R}^4$ es la que de hecho se usa en la física. Parece poco probable que no sea así, pues todas las estructuras diferenciables atípicas resultan más bien artificiosas y poco naturales. Por otro lado, no cabe negar que los esbozos de la gravitación cuántica sugieren que en una escala de distancias ultramicroscópica el espacio-tiempo ha de poseer unas propiedades geométricas y topológicas muy poco usuales, y probablemente no sea analíticamente suave en absoluto (Sładkowski, 1996).

Los métodos usados para llegar a esta conclusión se basan en una idea sencilla y a la vez poderosa: las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales pueden interpretarse como la descripción condensada de ciertas clases de estructuras geométricas asociadas con las variedades diferenciables. Estas estructuras se caracterizan fácilmente con el lenguaje de los haces fibrados, como en el caso de las ecuaciones de Yang-Mills, provenientes de la teoría de campos gauge no abelianos usada en la física de partículas elementales.

Figura 4. Clifford Taubes

La topología algebraica clásica proporciona ciertos invariantes de gran importancia vinculados a los espacios topológicos, como son los grupos de homología y homotopía. Estos invariantes hacen honor a su nombre en el sentido de ser los mismos para todos los espacios topológicos equivalentes (variedades topológicas homeomorfas y variedades diferenciables difeomorfas). Pero desgraciadamente su poder de discriminación no alcanza a distinguir entre variedades que no son difeomorfas aunque sí sean homeomorfas –tengamos en cuenta que las variedades equivalentes poseen los mismos invariantes, si bien compartir los mismos invariantes no garantiza absolutamente la equivalencia. Gracias a todo un nuevo género de invariantes deducidos a partir de las ecuaciones de Yang-Mills (los "espacios modulares", definidos en términos de ciertos fibrados asociados con las 4-variedades) fue posible lograr una discriminación de finura suficiente entre los casos anteriores. Los espacios modulares son espacios topológicos, generalmente no compactos, que no alcanzan la condición de variedades al tener singularidades –orificios y fisuras– de modo que no son diferenciables en todas partes, aunque, como cualquier espacio topológico, presenten una dimensionalidad finita bien definida lejos de las singularidades.

Las soluciones de las ecuaciones de Yang-Mills con interés físico son conocidas como *instantones*. Sus propiedades son similares a las de los solitones, paquetes de ondas que son solución de ciertas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, cuya anchura –a diferencia de los grupos de ondas ordinarias– no se expande con el tiempo. Los instantones se caracterizan por su extensión finita tanto en el espacio como en el tiempo, de manera que pueden concebirse como la "conexión" de un cierto haz fibrado sobre la 4-variedad. Los espacios modulares mencionados previamente consisten en clases de equivalencia de instantones con respecto a transformaciones de gauge. Pese a que los instantones fueron examinados para estudiar las propiedades del espacio-tiempo físico, pronto se vio que las conclusiones obtenidas gracias a ellos podían ampliarse hasta incluir la topología diferencial de 4-variedades mucho más generales.

Todas estas complicadas ideas se concretan mediante un polinomio –el polinomio de Donaldson– que es un invariante diferencial (no topológico) de una variedad y puede calcularse explícitamente. Disponiendo de esta herramienta, es posible construir 4-variedades topológicamente equivalentes con distintos invariantes polinómicos, y por ello con distintas estructuras diferenciables no equivalentes. Estos invariantes de las 4-variedades se incluyen entre los denominados invariantes enumerativos, definidos mediante el recuento de las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales: la ecuación del instantón de Yang-Mills (en las etapas iniciales de la teoría) o la ecuación de Seiberg-Witten (en la mayoría de los desarrollos realizados desde 1994).

4. La conjetura suave de Poincaré para 4 dimensiones

Originalmente, la conjetura –o mejor dicho, "teorema"– de Poincaré cocernía a espacios que localmente se comportaban como el espacio tridimensional euclídeo ordinario, pero bajo la condición de ser conexo, de tamaño finito y sin fronteras (una 3-variedad cerrada). La conjetura de Poincaré afirmaba que si tales espacios poseían además la propiedad adicional de que cada lazo establecido en su interior podía contraerse continuamente hasta un punto, entonces la 3-variedad era idéntica a una 3-esfera. Tras casi un siglo de esfuerzos matemáticos, el ruso Grigori Perelman publicó la demostración definitiva en una serie de artículos que vieron la luz entre 2002 y 2003.

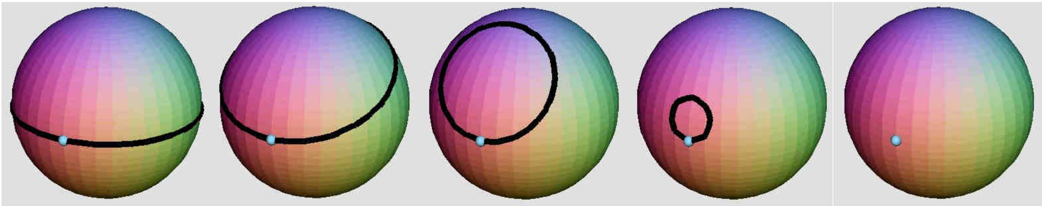

Figura 5. Contracción de un lazo hasta un punto, según la conjetura de Poincaré

Pero, ¿qué sucede con la conjetura de Poincaré generalizada a dimensiones distintas de tres? En 1961 Stephen Smale probó esta conjetura generalizada para dimensiones mayores que cuatro (Smale, 1961), aunque todavía quedaba la formidable tarea de clasificar las 4-variedades cerradas simplemente conexas. Ni más ni menos eso fue lo que logró Michael Freedman con su histórico artículo de 1982, "La topología de las variedades tetradimensionales" (Freedman, 1982). Galardonado por ello con la prestigiosa Medalla Fields, Freedman probó la conjetura de Poincaré en 4 dimensiones, dejando abierta la posibilidad de que hubiese una 4-variedad suave homeomorfa pero no difeomorfa a la 4-esfera. Esta es la denominada "conjetura suave de Poincaré", en dimensión 4, que permanece pendiente y se reputa extremadamente compleja.

Dicho con otras palabras, no se sabe cuántas estructuras diferenciables hay en una 4-esfera, dejando a un lado el hecho de que sabemos que al menos hay una. Acaso haya sólo una, o un número finito, o una cantidad infinita de ellas. La conjetura suave de Poincaré aventura que tan solo hay una, presunción rechazada por muchos especialistas, que suponen la existencia de múltiples estructuras diferenciables en la 4-esfera (Scorpan, 2005).

Figura 6. Michael Freedman

John Milnor, elogiando el trabajo de Freedman durante su alocución ante el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en 1986 en Berkely, adujo en honor de su colega (Milnor, 1987):

> Michael Freedman no sólo ha demostrado la hipótesis de Poincaré para variedades topológicas 4-dimensionales, caracterizando así la esfera S^4, sino que también nos ha proporcionado teoremas de clasificación, fáciles de enunciar y usar pero difíciles de probar, para 4-variedades mucho más generales. La naturaleza simple de sus resultados en el caso topológico debe ponerse en contraste con las extremas complicaciones que ahora sabemos se dan en el estudio de las 4-variedades diferenciables (…). … La demostración de Freedman en 1982 de la hipótesis de Poincaré fue una extraordinaria exhibición de fuerza. Sus métodos fueron tan certeros como para proporcionarnos en realidad una completa clasificación de todas las 4-variedades topológicas compactas simplemente conexas, suministrando muchos ejemplos previamente desconocidos de tales variedades, y numerosos ejemplos antes ignorados de homeomorfismos entre variedades conocidas.

5. Comentarios finales

En primer lugar hemos considerado las variedades del punto de vista topológico; esto es, las hemos examinado como espacios topológicos definidos por la condición de que los entornos de cualquier punto fuesen homeomorfos −topológicamente equivalentes– a entornos en $\mathbf{R}^n$ para un cierto n finito. Se llama *categoría* a una colección de conjuntos que poseen una cierta estructura y también alguna noción de equivalencia que preserve dicha estructura. Por ello, este primer planteamiento involucra la categoría de las variedades topológicas. Este es el significado implícito cuando nos referimos informalmente a la topología como la "geometría de la lámina elástica", porque conceptos como la distancia rígida entre dos puntos o el contorno inalterable de los objetos no son válidos aquí.

En una segunda aproximación hemos considerado las variedades topológicas con estructura diferenciable. La idea de equivalencia implica que la diferenciabilidad debe conservarse. Las aplicaciones que establecen la equivalencia entre variedades diferenciables se denominan *difeomorfismos*, y su categoría es la de las variedades diferenciables, o suaves[5]. La existencia y unicidad (salvo difeomorfismos) de estructura diferenciable sobre una variedad topológica está garantizada en dimensiones menores que 4. Para dimensiones mayores la situación es diferente. Se conocen ejemplos de variedades topológicas que no admiten estructura diferenciable y otras que poseen múltiples estructuras diferenciables, incluso una cantidad no numerable de ellas. En el caso de ser además la variedad n-dimensional compacta, $n>4$, se puede asegurar que sólo un número finito de ellas son distintas. Sin embargo, en dimensión cuatro se dan situaciones muy curiosas: no se sabe cuántas estructuras diferenciables posee la esfera S^4, que es una variedad compacta; y si bien sólo hay una estructura diferenciable (salvo difeomorfismo) sobre R^n, esta norma falla estrepitosamente en R^4 –singularmente el caso más importante para la física– que posee incontables estructuras diferenciables no equivalentes.

No es de extrañar que las condiciones de diferenciabilidad de las variedades *n*-dimensionales sean una de las líneas más activas de investigación en la matemática fundamental. Y se comprende bien que sus resultados sean acogidos con enorme interés por los físicos que escudriñan las

[5] Podemos considerar variedades donde sólo exista un orden finito de diferenciabilidad, en tanto que "suave", implica siempre diferenciabilidad en todos los órdenes.

intimidades de nuestro espacio-tiempo (Asselmeyer-Maluga y Brans, 2007), una variedad 4-dimensional cuyas propiedades básicas a buen seguro que todavía nos deparan muchas sorpresas.

Bibliografía

Asselmeyer-Maluga, T., Brans, C. H. (2007). *Exotic Smoothness in Physics*. Singapore: World Scientific.

Cohen, R. L. (1985).The Immersion Conjecture for Differentiable Manifolds. *The Annals of Mathematics*, 122, 237–328.

Donaldson, S. K. (1990). Polynomial invariants for smooth four-manifolds. *Topology*, 29, 257-315.

Donaldson, S. K., Kronheimer, P.B. (1990). *The geometry of four-manifolds*. Oxford (U.K.): Clarendon Press.

Freedman, M. H. (1982). The topology of four-dimensional manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 17 (3), 357–453.

Grünbaum, A. (1973). Geometrodynamics and Ontology. *The Journal of Philosophy*, 70 (21), 775–800.

Kirby, R. C, Siebenmann, L. C. (1977). *Foundational Essays on Topological Manifolds. Smoothings, and Triangulations*. Princeton (New Jersey): Princeton University Press.

Kreck, M. (1984). Some closed 4-manifolds with exotic differentiable structure. En Madsen, I., Olover, B. (eds.) *Algebraic Topology Aarhus 1982* **(**Proceedings of a conference held in Aarhus, Denmark, August 1–7, 1982). Springer: Berlin-Heidelberg.

Milnor, J. W. (1956). On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Annals of Mathematics*, 64 (2), 399–405.

Milnor, J. W. (1987). The work of M H Freedman. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, 1986* (Providence, RI), 1, 13-15.

Scorpan, A. (2005). *The Wild World of 4-Manifolds*. Washington DC: American Mathematical Society.

Sładkowski, J. (1996). Exotic smoothness, noncommutative geometry, and particle physics. *International Journal of Theoretical Physics*, 35 (10), 2075-2083.

Smale, S. (1961). Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four. *Annals of Mathematics* (2nd Ser.), 74 (2), 391 – 406.

Taubes, C.H. (2000). *Seiberg-Witten and Gromov invariants for symplectic fourmanifolds*. Somerville (U.S.A.): International Press.

Whitney, H. (1936). Differentiable Manifolds. *Annals of Mathematics*, 37, 645–680.

Rafael Andrés Alemañ Berenguer (Alicante, 1966). Dpto. CC. Materiales, Óptica y Tecnología Electrónica (Despacho A. Fimia) – Edif. Torrevaillo, Universidad Miguel Hernández de Elche, Avda. Universidad, s/n. – Elche (Alicante) – 03202. Licenciado en Química (Bioquímica) por la Universidad de Valencia y en Física (Fundamental) por la UNED, investigador colaborador y doctorando en Ciencia y Tecnología de los Materiales, en la Universidad Miguel Hernández. Autor de diversos artículos y libros de divulgación, entre ellos *Tras los secretos del Universo*, *Ciencia y Apocalipsis*, *Relatividad para todos*, *Física para todos* y *Evolución o Diseño*. Más datos en http://raalbe.jimdo.com