NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 79, marzo de 2012, páginas 101-126

Propuesta Educativa para enseñar nociones de Teoría de Juegos en Educación Secundaria[1]

Ana Teresa Antequera Guerra (Centro de Enseñanza Obligatoria Juan XXIII, Tazacorte. España)

Fecha de recepción: 28 de noviembre de 2011
Fecha de aceptación: 7 de enero de 2012

Resumen Esta investigación desarrolla material curricular para la implementación de algunas cuestiones de Teoría de Juegos en la Educación Secundaria en el ámbito de la Matemática Discreta. Para ello se diseñan actividades de carácter formativo que potencien valores de justicia, cooperación, negociación y convivencia democrática. Se trata de dar a conocer algunos modelos estratégicos que se pueden convertir en herramientas útiles para la resolución de conflictos en la vida cotidiana y, así, desarrollar las amplias posibilidades que aporta esta rama de las Matemáticas.

Palabras clave Teoría de Juegos, Resolución de Problemas, Modelización, Competencia Matemática, Educación Secundaria.

Abstract We provide an overview of the research conducted in the doctoral thesis "Society, Justice and Democracy: Mathematical Educational Proposal", directed by Dr. M. Espinel Candelaria Febles. This research aims to develop, in the field of Discrete Mathematics, curriculum material for the implementation of several Game Theory problems in Secondary School Education. To this aim, we have designed formative activities in such a way that students empower values of justice, cooperation, negotiation and democratic coexistence. Our intention is to show several strategic models which can become useful tools for the resolution of conflicts in everyday life and thus, develop the wide range of possibilities offered by this branch of Mathematics.

Keywords Game Theory, Problem Solving, Modeling, Mathematic Literacy, Secondary Education.

1. Introducción

El principal objetivo de la investigación es diseñar y validar material que sirva para desarrollar contenidos de carácter formativo, utilizando para ello conceptos propios de la Teoría de Juegos en el ámbito de la Matemática Discreta. La implementación de este tipo de contenidos permite, entre otros logros, que las matemáticas curriculares participen de una manera más activa en la consecución de las Competencias Básicas que un alumno ha de adquirir antes de que abandone el sistema educativo (MEC, 2006; Consejería de Educación, Cultura y Deporte de Canarias, 2007). Además de la competencia matemática, se promueven contenidos que permiten el desarrollo de las competencias de tratamiento de la información y competencia digital, de aprender a aprender y la de autonomía e

[1] Síntesis de la investigación realizada en la Tesis Doctoral *Sociedad, Justicia y Democracia. Propuesta Educativa desde las Matemáticas*, realizada por Ana teresa Antequera Guerra, dirigida por la Dra. M. Candelaria Espinel Febles, en la Universidad de La Laguna.

iniciativa personal, y también de otras que no suelen estar tan relacionadas con la materia, como es la competencia social y ciudadana.

La Teoría de Juegos como campo científico se ocupa de examinar el comportamiento estratégico de jugadores que interactúan motivados por el interés de maximizar sus beneficios sabiendo que todos son jugadores racionales y actúan de manera similar. El término *juego* puede llevar a confusión, pues se asocia normalmente al entretenimiento o a juegos de salón. Sin embargo, esta teoría, como rama de las matemáticas, estudia algo muy difícil de formalizar matemáticamente, como es el comportamiento racional en situaciones de conflicto (Binmore, 1996). En otras palabras, la Teoría de Juegos da expresión matemática a las estrategias de contrincantes y ofrece técnicas para escoger la mejor estrategia posible para resolver conflictos de la vida cotidiana, siendo su principal éxito que sirve de modelo en distintas y variadas ciencias, con consecuencias en el campo social, jurídico, político, económico y militar, entre otros.

Dentro de la Teoría de Juegos se distingue entre juegos no cooperativos y cooperativos. El enfoque no cooperativo trata de estudiar el comportamiento estratégico de los individuos, es decir, se centra en los detalles del proceso y las reglas que definen la situación; los compromisos acordados no se pueden hacer cumplir. El segundo enfoque, el de los juegos cooperativos, estudia y analiza las opciones que son accesibles a los grupos, es decir, se centra en los aspectos más generales que especifican qué puede conseguir una coalición pero sin especificar cómo lo consigue; es un tipo de situación donde los compromisos son totalmente vinculantes y se pueden hacer cumplir.

De los temas de Teoría de Juegos no cooperativos, tienen especial interés la idea del Teorema del Maximin de Von Neumann y el concepto de equilibrio de Nash, en la resolución de situaciones de conflicto. Estos dos resultados son especialmente significativos puesto que marcan, en cierto sentido, el punto de partida para el desarrollo de esta teoría. La publicación en 1944 del libro *Theory of game and economical behaviour* (*Teoría de juegos y comportamiento económico*) por parte de John von Neumann y Oscar Morgenstern, se toma como fecha de inicio de esta nueva rama de las matemáticas. La idea de Von Neumann va más allá de la teoría del equilibrio económico, y pretende un proceso de formalización de la toma de decisiones con aplicación en el contexto industrial, militar y político, y en las técnicas de gestión y administración, con lo que las implicaciones de esta teoría abarcan un amplio marco socio-económico. El concepto de equilibrio desarrollado por John Nash, supuso que se le concediera el premio Nobel de Economía en 1999, compartido con otros investigadores en Teoría de Juegos, John C. Harsonayi y Reinhart Selten.

Uno de los paradigmas más conocidos en juegos no cooperativos es el Dilema del Prisionero. En este dilema, si los jugadores optan por sus mejores estrategias individuales, el resultado los lleva a una solución en equilibrio que es peor que la que hubiesen conseguido al colaborar entre ellos. Este dilema ha sido extensamente tratado por numerosos investigadores desde la época de la Guerra Fría, con el enfrentamiento de las dos superpotencias, hasta la actualidad, en la que su aplicación a las redes sociales ha permitido constatar que los jugadores defraudadores tienden a quedarse aislados. (Poundstone, 1995).

Entre los temas que se abordan desde los juegos cooperativos destaca la idea de índices de poder para el estudio y diseño de sistemas de representación justos. La importancia de la distribución del poder de decisión a través de estos índices se puede constatar al estudiar la composición de distintos foros internacionales. Es el caso del Fondo Monetario Internacional o el Consejo de Seguridad de la ONU y la relevancia que tienen los países miembros con derecho a veto en este último organismo (Espinel, 1999), o el Consejo Europeo de Ministros, con la redistribución del poder a consecuencia de las sucesivas ampliaciones de la Unión Europea. Una descripción asequible de los índices de poder se puede encontrar en Taylor (1995), mientras que con carácter divulgativo se puede encontrar en Bilbao (2004).

Otros temas propios de juegos cooperativos son los problemas de Bancarrota, que surgen cuando hay escasez de recursos en el reparto de bienes. Este tipo de problemas han tomado especial vigencia a causa de la actual crisis económica y sus inevitables consecuencias. Se intenta dar respuestas a diferentes maneras de realizar el reparto proporcional (Espinel, 2007). Dentro de este campo de estudio de la Teoría de Juegos, el matemático Robert J. Aumann (Aumann y Maschler, 1985) fue galardonado con el Nobel de Economía en 2005, por haber ampliado la comprensión de conflicto y cooperación en esta teoría, premio que comparte con el economista Thomas Schelling.

Desde principios de los noventa, se viene haciendo notar que los contenidos relacionados con la Matemática Discreta pueden ofrecer una oportunidad de revitalizar la matemática escolar (Rivera-Marrero, 2007). El acento en los algoritmos discretos utilizados en los ordenadores ha dado lugar a un traslado de énfasis de la Matemática actual hacia la Matemática Discreta. Esta traslación del foco de investigación en las Matemáticas, así como el hecho de que algunas cuestiones de la Matemática Discreta y, en concreto, de la Teoría de Juegos, sean suficientemente elementales como para poder formar parte con éxito de un programa inicial de Matemáticas, han traído como consecuencias diferentes intentos por introducir elementos de esta rama en la enseñanza no universitaria.

En particular, algunos contenidos de Teoría de Juegos proporcionan un marco apropiado para llevar al aula situaciones reales y de actualidad, cuyo estudio implica el uso de diversos y variados conceptos matemáticos presentes en el currículo de Secundaria, como son el diagrama de árbol, el uso de tablas y matrices, la resolución de problemas y la búsqueda de estrategias óptimas. Al tiempo que se incorporan contenidos que fomentan el desarrollo de la capacidad crítica, del razonamiento, la resolución de conflictos mediante la cooperación, la capacidad de argumentar, de aprender a negociar y de saber ponerse en el lugar del otro.

La investigación recogida en la tesis doctoral muestra la descripción y resultados de la experiencia para la implementación de algunos conceptos de Teoría de Juegos en el currículo de Matemáticas de Secundaria, especialmente para alumnos de Ciencias Sociales. Los principales contenidos matemáticos que se necesitan, presentes en el currículo de secundaria, son: tablas, matrices, reparto proporcional, fracciones, combinatoria, media aritmética y representaciones en árbol. El propósito a largo plazo es que, a través del material diseñado, se potencie en los estudiantes valores de justicia, predisposición a la cooperación y convivencia democrática.

En este artículo, resumen de la tesis *Sociedad, Justicia y Democracia. Propuesta Educativa desde las Matemáticas*, se presenta primero un esquema del marco teórico utilizado en la investigación, al que le siguen los objetivos y un esbozo de la metodología empleada que incluye una descripción somera de las diez actividades llevadas al aula y que dan lugar a las distintas experiencias. En la descripción de cada una de las experiencias se recoge una pequeña presentación y además, a modo de ejemplo, se detalla una de ellas, que corresponde al concepto de índices de poder. Se finaliza con algunas conclusiones del trabajo realizado.

2. Marco Conceptual

El estudio plantea una adaptación curricular de algunos contenidos propios de la Teoría de Juegos, rama de las matemáticas que por sus aplicaciones se encuentra más cerca de las ciencias económicas y de las ciencias sociales, y se trata de indagar su implementación en la etapa educativa de Secundaria. Para esta investigación se tiene en cuenta varias componentes procedentes de distintos marcos teóricos y, por ello, se recurre al marco conceptual como marco de investigación. Se realiza una transposición didáctica en la que, partiendo de conceptos teóricos de Teoría de Juegos, se realiza una modificación del conocimiento para hacer más fácil la enseñanza de los mismos a alumnos de educación secundaria. Se siguen pautas de la Matemática Realista puesto que se parte de problemas contextualizados en el entorno y, también, porque se tienen presentes en el diseño de las fases o trayectorias seguidas al planificar y mejorar la propuesta curricular, lo que conecta con las investigaciones realizadas principalmente desde el Instituto Freudhental (Gravemeijer, 2004). Para la experimentación en el aula de estos contenidos propios de Teoría de Juegos, se plantean actividades de resolución de problemas, ya que este bloque de los currículos actuales de matemáticas es el que mejor admite el desarrollo de las mismas y que, además, es aceptado y acogido por el profesorado de secundaria.

La idea de ser competente en matemáticas que propone PISA (Programme for International Student Assessment) se adapta a esta investigación en muchos sentidos. Las siete competencias matemáticas específicas de PISA no son ajenas a las actividades y los seis niveles de evaluación sirven de orientación para evaluar muchas de las preguntas de las actividades diseñadas en esta investigación. Para la enseñanza se sigue un proceso de modelización orientado en el diseño de la mayoría de las actividades. En esta adaptación curricular intervienen conceptos de Matemática Discreta, resaltando siempre la parte aplicada del contenido que se introduce.

En resumen en esta memoria se utilizan cinco componentes, tanto en el diseño como en el análisis de la investigación: Resolución de Problemas, Modelización Matemática, Competencia Matemática, Matemática Realista y Matemática Discreta (Figura 1), que se describen brevemente a continuación.

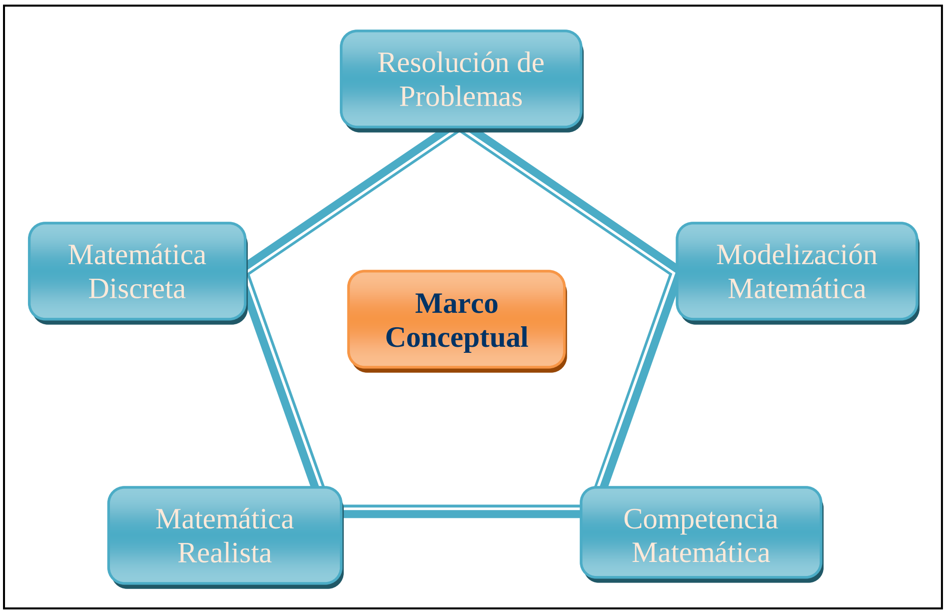

Figura 1. Marco conceptual

2.1. Resolución de Problemas

La enseñanza a través de la resolución de problemas ha sido uno de los métodos más utilizados para poner en práctica el principio general del aprendizaje activo. Con ello se persigue, en lo posible, trasmitir de una manera sistemática los procesos de pensamiento eficaces en la resolución de verdaderos problemas.

La resolución de problemas se puede entender como un desafío, siendo uno de los principales objetivos, el diseño de buenas tareas, en el sentido de que sean originales, no rutinarias y nuevas para los estudiantes. También se entiende la resolución de problemas como una herramienta para pensar matemáticamente. Ello supone formar individuos con capacidad autónoma para pensar, siendo críticos y reflexivos con las soluciones (Schoenfeld, 1992). Los alumnos deben comprender e interpretar la información disponible y reconocer los elementos importantes que representan y conectan con las situaciones del mundo real (Doorman, Drijvers, Dekker, Van den Heuvel-Panhuizen, De Lange y Wijers, 2007).

La importancia de la resolución de problemas se ve reflejada en su inclusión en los currículos oficiales desde la década de los noventa y, más recientemente, en la serie de actividades que conforman las pruebas de PISA de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). Siguiendo la pauta que distingue varias fases en la resolución de problemas (Polya, 1945), los responsables del estudio PISA en matemáticas también caracterizan la actividad de hacer matemáticas mediante cinco fases:

- Comenzar con un problema situado en la realidad.
- Organizarlo de acuerdo con conceptos matemáticos.
- Despegarse progresivamente de la realidad mediante procesos tales como hacer suposiciones sobre los datos del problema, generalizar y formalizar.
- Resolver el problema.
- Proporcionar sentido a la solución, en términos de la situación inicial.

La evaluación en PISA se centra en cómo los estudiantes pueden utilizar lo que han aprendido en situaciones usuales de la vida cotidiana y no sólo en conocer qué contenidos del currículo han aprendido. Se apuesta por entender las matemáticas como un conjunto de procesos que proporcionan respuesta a problemas, lo que implica que las matemáticas escolares deben priorizar las tareas de encontrar, sobre las de probar.

2.2. Modelización Matemática

Íntimamente relacionada con la resolución de problemas está la modelización matemática, considerada como un medio para conectar la resolución de problemas al mundo real. Trabajar en clase situaciones de la vida real es la tendencia u objetivo de los modelos y la modelización para aprender tanto matemáticas como resolución de problemas.

El estudiante debe conocer el mundo que le rodea y para ello se puede aprovechar el potencial que tienen los problemas del entorno para construir conocimientos matemáticos y modelizar situaciones. La idea subyacente es la de usar la modelización para resolver problemas reales, implicando a los estudiantes en sólo algunas de las fases de las tareas de modelización (Stillman, Brown, Galbraith y Edwards, 2007) (Figura 2). Las fases del proceso de modelización son un factor que se ha tenido en cuenta para la redacción de las actividades de esta investigación y a la hora de realizar las experiencias de aula. Las adaptaciones de estas fases se pueden convertir en estrategias de aprendizaje de conceptos matemáticos, propiciando la integración de la matemática con otras áreas de conocimiento, el interés de la matemática de cara a su aplicabilidad, la creatividad en la formulación y resolución de problemas. Además, el conocimiento del esquema de la Figura 2 por parte del profesorado cuando trabaja con modelos, le permite identificar las actividades específicas en las que el alumno necesita ser competente y, así, aplicar su conocimiento matemático y tecnológico en la resolución exitosa de problemas. De esta forma, el profesor puede identificar y prever posibles bloqueos e incorporar esta información a su práctica de la enseñanza.

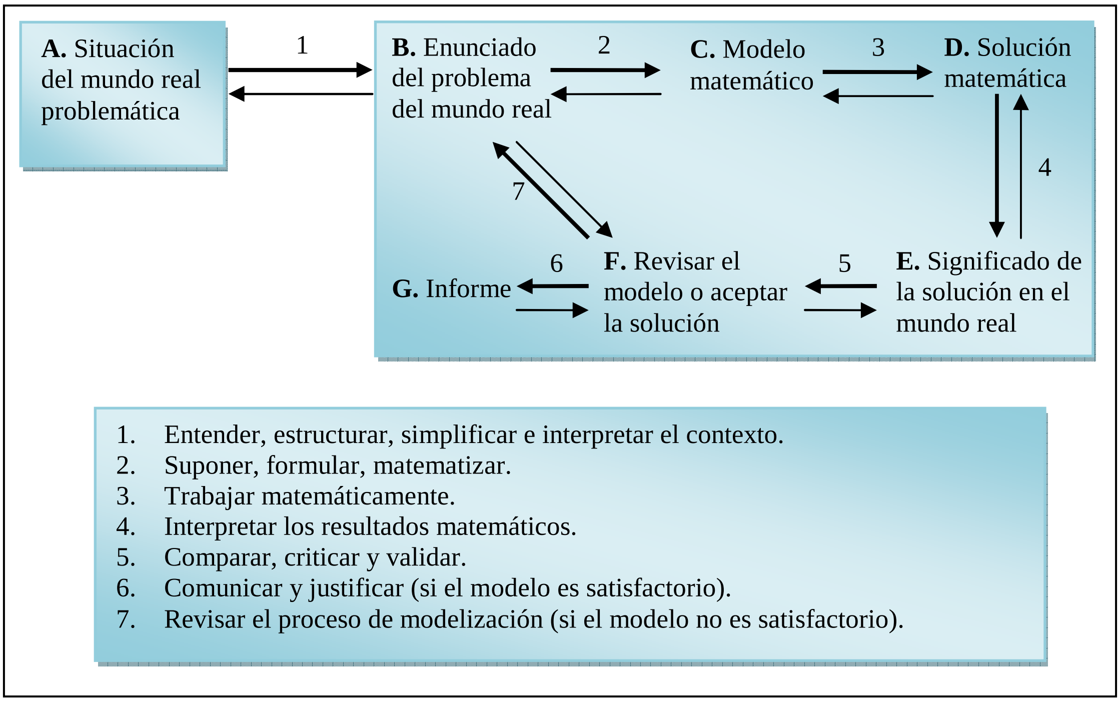

Figura 2. Fases del proceso de modelización

2.3. Competencia Matemática

Durante los últimos años, se ha introducido en la enseñanza en general y en las matemáticas en particular, el desarrollo de competencias, lo que ha hecho necesario concentrarse en introducir una forma de enseñar matemáticas que vaya más allá de la aplicación de los procedimientos para responder a ejercicios estándar (Niss, 2004). Si se desea formar individuos capaces de resolver los problemas y retos de su vida privada o profesional, la educación que se les imparta desde las escuelas debe seguir una metodología flexible que permita la introducción del pensamiento crítico, desde el trabajo con tareas abiertas a diferentes interpretaciones y soluciones. Se hace necesario utilizar estrategias flexibles y desarrollar habilidades de resolución de problemas para hacer frente a la ingente cantidad de información que llega a través de medios cada vez más variados (OCDE, 2006).

Desde distintos estamentos internacionales se ha venido promoviendo esta nueva visión en la educación y que se ha visto reflejada en los estudios que realiza la OCDE sobre el aprovechamiento de los estudiantes en matemáticas, caso de los proyectos o estudios de PISA 2003 y PISA 2007.

En los estudios PISA se entiende por competencia matemática la capacidad individual para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados, utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas, y satisfacer las necesidades de la vida personal como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo. En definitiva, se desea que los alumnos, cuando terminen la etapa de educación obligatoria, sean competentes matemáticamente, es decir, sean capaces de pensar matemáticamente, formular y resolver problemas matemáticos, construir y utilizar modelos matemáticos, razonar matemáticamente, representar entes matemáticos, manejar símbolos y fórmulas matemáticas, comunicarse en, con y sobre matemáticas, y, por último, hacer uso de herramientas y recursos (Niss, 2004).

2.4. Matemática Realista

Las situaciones tomadas del mundo real han sido el origen y el punto de partida para el desarrollo de los conceptos matemáticos que se han promovido desde el Instituto Freudhental de la Universidad de Utrecht, en Holanda, y que igualmente interesan en esta investigación. El punto de partida para la educación matemática es que los contenidos matemáticos puedan conectarse con el mundo real. De acuerdo con esto, los contenidos han de estar organizados de forma que su estructura manifieste los principios de la educación realista. Esto remite a los dos principios básicos de la Educación Matemática Realista (Doorman et al., 2007):

- La matemática debe ser vista como una actividad humana.
- La matemática debe estar conectada con el mundo real.

La matemática desde un enfoque realista es un "proceso-reinventado", en el que las actividades principales son construir, reflexionar, anticipar e integrar. Este punto de vista sobre el proceso de aprendizaje indica que se debe ayudar a los alumnos a dar significado a las matemáticas.

2.5. Matemática Discreta

Distintos investigadores en Educación Matemática consideran la Matemática Discreta como una oportunidad para revitalizar la matemática en la escuela. La perciben como una posibilidad para la innovación y una oportunidad para descubrir problemas no rutinarios. Se alude a cómo la Matemática Discreta se utiliza para resolver problemas prácticos y proporcionar amplias oportunidades para que los estudiantes investiguen problemas de la vida cotidiana. Por otro lado, esta rama puede proporcionar un nuevo punto de partida en la relación alumno – profesor, permitiendo a los estudiantes plantear un amplio rango de oportunidades para situaciones de investigación y descubrimiento en matemáticas, fuera de cualquier actividad rutinaria (DeBellis y Rosenstein, 2004; Goldin, 2004).

La integración de la Matemática Discreta en los currículos de secundaria podría traer consigo el alcanzar metas muy importantes, primero porque se daría una imagen de las matemáticas como un área dinámica e interesante pero, también, porque permitiría a los profesores el desarrollar estrategias innovadoras y a los alumnos el tomar contacto con contenidos matemáticos no estandarizados, pudiendo así resolver problemas del mundo real (Rivera-Marrero, 2007).

La implementación de actividades de Matemática Discreta en ambientes cotidianos da la oportunidad al alumno para ser constructivo y reflexivo. Distintos investigadores reconocen la necesidad de diseñar material curricular a partir de contenidos propios de la Matemática Discreta (Rosenstein Franzblau y Robert, 1997). Los problemas de Matemática Discreta recogen un amplio rango de aplicaciones, siendo de especial interés los problemas de votación, reparto y asignación, y distintas estrategias de optimización (Malaespina, 2007). En el caso de la Teoría de Juegos, son de especial interés actualmente, los temas de toma de decisiones, repartos justos y elección social, como los que aparecen en el libro *Las matemáticas en la vida cotidiana* (COMAP, 1999), que es un proyecto que muestra las conexiones de la matemática con la sociedad, y cuya publicación y contenido se renueva de forma periódica.

3. Objetivos

El propósito fundamental de esta investigación consiste en desarrollar contenidos de carácter formativo que potencien valores de justicia, cooperación, negociación,…, fomentando que los alumnos perciban la cooperación como solución al conflicto, al tiempo que se favorece el desarrollo curricular por competencias.

En este sentido, los objetivos generales que se persiguen son los siguientes:

1. Diseñar un material curricular empleando conceptos propios de la Teoría de Juegos y que tiene como fines:
   a. Fomentar la interdisciplinariedad, observando cómo el lenguaje matemático resulta necesario para aclarar la dependencia existente entre distintas áreas.
   b. Incentivar el carácter utilitario de las matemáticas, como herramienta para la resolución de problemas sociales.
   c. Establecer habilidades basadas en el diálogo y la cooperación para la resolución de conflictos, de manera que los alumnos adquieran valores y principios propios de las sociedades democráticas.
   d. Reforzar contenidos característicos de las matemáticas, útiles en ciencias sociales, como son el uso de representaciones en árbol, las tablas y las matrices, la resolución de problemas y la búsqueda de estrategias.
   e. Aportar un sistema de herramientas propias de la Teoría de Juegos, que permita desarrollar el pensamiento estratégico y la toma decisiones.
   f. Adquirir la capacidad de ponerse en el lugar del otro en situaciones de conflicto, de manera que se tengan referencias de todos los puntos de vista.
2. Observar el comportamiento y rendimiento de los alumnos en la resolución de las actividades propuestas en el material diseñado y el grado de comprensión de los nuevos contenidos.
3. Evaluar el material curricular a través de los éxitos y dificultades que se observen en las producciones de los alumnos, para adaptar y mejorar dicho material.

4. Metodología

Esta investigación centra su interés en las aportaciones que pudieran hacer los alumnos de la educación secundaria, tanto obligatoria como postobligatoria, sobre nuevos contenidos relacionados con la Teoría de Juegos en el ámbito de la Matemática Discreta, distintos de los tradicionales, pero sobre la base de una herramienta conocida y presente en el currículo actual.

Participan alumnos de Educación Secundaria Obligatoria, de Bachillerato y del grupo de alumnos de Secundaria del programa ESTALMAT (programa de detección y estimulación precoz del talento matemático) que denominaremos Grupo de Talentosos de Tenerife. Las edades de los alumnos están comprendidas entre los 13 y los 18 años. Los alumnos talentosos son estudiantes con aptitudes especiales para las matemáticas que reciben refuerzo en formación matemática fuera del horario escolar (Hernández y Sánchez, 2008; Reyes-Santande y Karg, 2009).

No se realiza ninguna selección previa de los alumnos que toman parte en las distintas experiencias y tampoco se les da ningún tipo de instrucción previa sobre los contenidos que se iban a desarrollar en las actividades, salvo la que ya tuvieran del desarrollo normalizado de las clases en secundaria.

Participan en la experiencia ocho profesores y 457 alumnos procedentes de siete centros de educación secundaria de la Comunidad Autónoma de Canarias. Para la elección de los niveles que participan en estas experiencias, se intenta dar preferencia a los alumnos pertenecientes al segundo ciclo de la ESO (3º y 4º) y al primer año del bachillerato, puesto que en niveles los alumnos presentan la madurez en el desarrollo de las capacidades matemáticas necesaria para afrontar con éxito la resolución de las actividades presentadas. Aún así, se han obtenido resultados interesantes cuando se ha podido comparar niveles.

4.1. Instrumentos para la recogida de información

La base sobre la que se desarrolla esta investigación es la elaboración de un dossier de actividades sobre contenidos propios de la Matemática Discreta y la Teoría de Juegos. Este dossier, denominado *Matemáticas para el desarrollo del pensamiento estratégico y de cooperación en alumnos de Secundaria*, consta de diez actividades a las que se puede acceder, tal como se les presentó a los alumnos, a través de enlaces web en la Figura 3. El dossier de actividades, como apoyo para los profesores de los distintos centros que participan en la experiencia, lleva una introducción a modo de justificación y las soluciones a las cuestiones de las actividades.

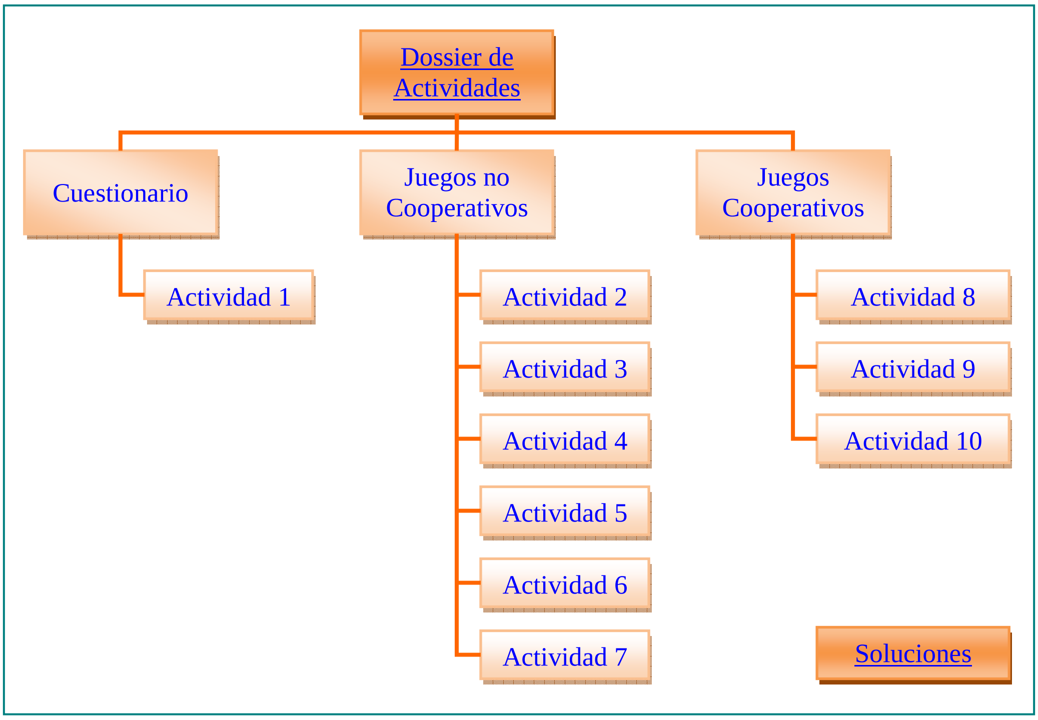

Figura 3. Estructura del dossier de actividades con enlaces web

El árbol que constituye la Figura 3 consta de tres nodos principales que representan los tres bloques en los que se divide el dossier de actividades. El primero es un cuestionario previo sobre el uso y aplicación de tablas de doble entrada y diagramas de árbol como herramientas de la Matemática Discreta, mientras que en los otros dos se muestran los bloques de actividades sobre juegos no cooperativos y juegos cooperativos.

El dossier comienza con el cuestionario previo ya señalado, que se recoge como Actividad 1. Esta actividad está formada por cinco tareas que han sido adaptadas de las empleadas en la evaluación de PISA 2003, con alguna ampliación y modificación de acuerdo al interés de la investigación. Con estas tareas se pretende evaluar la capacidad de los alumnos para trabajar con dos de las herramientas de más utilidad en Matemática Discreta como son las tablas de doble entrada y los diagramas de árbol.

En el siguiente nodo del árbol de la Figura 3, constituido por las actividades 2, 3, 4, 5, 6 y 7 del dossier, se presentan distintos contextos en los que se adaptan preguntas de la teoría de juegos no cooperativos, como son las representaciones de juegos en forma de matriz de pago y árbol de decisión, o los métodos de resolución, como el estudio de estrategias y el cálculo de valores maximin y minimax.

El último nodo del árbol de la Figura 3 está formado por las actividades dedicadas a presentar ideas propias de la teoría de juegos cooperativos. Esta últimas tres actividades (actividades 8, 9 y 10) introducen situaciones en las que se desarrollan conceptos como los sistemas de votación ponderada, los índices de poder y los problemas de bancarrota.

Estas diez actividades, agrupadas como se observa en la Figura 3, conforman la herramienta fundamental para la recogida de datos necesaria en esta investigación. Las producciones escritas de los alumnos cuando resuelven las distintas actividades, constituyen la fuente de información principal de la que se ha obtenido los informes necesarios para el análisis posterior de cada una de ellas. Se presentaron a los alumnos como parte complementaria a su formación académica. Y es por eso que, en la mayoría de las experiencias, los alumnos sólo tienen una sesión de clase para acometer y resolver los problemas que se les presenta.

4.2. Análisis de Datos

Para estudiar las producciones de los alumnos, principalmente, se realiza un análisis cuantitativo de las respuestas de los mismos dadas en cada una de las cuestiones de las distintas tareas, con objeto de medir el grado de éxito alcanzado. Esta cuantificación no se hace siempre de manera dicotómica (bien o mal), sino que se trata de graduar la evaluación las aportaciones de los alumnos matizando los distintos grados de consecución del objeto propuesto. Si bien es cierto que no siempre se pueden utilizar los mismos criterios de graduación en todas las actividades.

El análisis de las respuestas escritas y justificaciones de los alumnos permite la detección de errores en la comprensión de los enunciados, en la ejecución de procedimientos y en los razonamientos de las respuestas dadas. Muchos de estos errores tienen su origen en la adquisición deficiente de conceptos y procedimientos básicos en matemáticas. Este análisis cualitativo realizado sobre las respuestas escritas dadas por los alumnos ha permitido hacer hincapié, no sólo en el cuánto, sino en cómo han contestado los alumnos a las cuestiones.

Por último, se destaca por significativamente distinto, el análisis utilizado en la primera actividad del dossier y cuya metodología y resultados se encuentran publicados en Antequera y Espinel (2009b; 2011b). Esta actividad, al ser un cuestionario previo a las otras experiencias, presenta un número de participantes más elevado que el resto de las actividades, lo que permite un análisis de los muchos ítems respuesta más exhaustivo. En ella se clasifica y ordena los ítems relacionados con el uso de tablas según la dificultad. Para ello, primero se estudia la analogía o semejanza que presentan mediante un análisis de conglomerados, y luego mediante el modelo de Rasch (Callingham y Bond, 2006) se observa la resistencia o dificultad de cada uno de los ítems en comparación con los niveles de estos mismos en PISA.

4.3. Trayectoria de la experiencia

Cuando se decide la elaboración del dossier de actividades con objeto de diseñar un material novedoso sobre contenidos propios de Teoría de Juegos que utilice herramientas propias de la Matemática Discreta, se piensa en una situación didáctica basada en un experimento que pase por distintas fases: *diseño preliminar*, *experimento de enseñanza* y *análisis retrospectivo* (Gravemeijer, 2004). Se ha de tener en cuenta que la trayectoria hipotética para el aprendizaje se adapta gradualmente y de manera cíclica: se corrige, se refina, basándose en la información recibida de los estudiantes y se evalúa su comprensión en ese momento, con cada una de las actividades. El objetivo de esta situación es doble: por una parte la intervención razonada en las situaciones didácticas; y por otra parte, producir un conocimiento sobre la forma en la que se construyen y comunican estos nuevos conceptos de matemáticas en los alumnos de secundaria.

Como consecuencia de este proceso, se diseña y revisa el material didáctico elaborado y se llevan a cabo varios cambios en la mayoría de las actividades. Una de las primeras razones por la que se introducen cambios fue la necesidad de simplificar los enunciados, reduciendo los conceptos teóricos abstractos a los estrictamente necesarios y planteando los problemas descritos dentro de un proceso guiado de resolución. La primera experimentación muestra, como una de las consecuencias más significativas, que los alumnos no son capaces de afrontar tareas excesivamente abiertas.

La otra razón que lleva a la modificación de las actividades está en la escasez de tiempo para realizarlas de manera efectiva. Por un lado, las propias actividades, en sus primeras versiones, son demasiado extensas para que los alumnos puedan resolverlas en un periodo de tiempo que no les resulte especialmente largo. Y por otro lado, aparece la necesidad de adecuar la ejecución de la experiencia con el horario escolar de cualquier centro. Por eso, se reducen las actividades hasta adecuarlas a un periodo de una hora y, en algunos casos, se les da la oportunidad a los alumnos de seguir trabajando en sus casas y recoger las actividades en la siguiente sesión.

5. Experiencias

A continuación se resumen las experiencias realizadas con las actividades que conforman el dossier que se describe en la Figura 3. Cada una de ellas tiene un título doble, que primero alude al objetivo de la actividad, y luego hace referencia al contexto utilizado en el enunciado de la actividad. Para detallar la experiencia realizada con cada actividad, se recoge la metodología seguida y los resultados obtenidos en ella, así como las referencias donde han sido publicados.

5.1. Actividad 1. Razonamiento estratégico

La Actividad 1 está constituida por cuatro tareas adaptadas del programa PISA 2003 y se considera como una prueba previa al resto de experiencias de aula para conocer el dominio que poseen los estudiantes sobre el uso y aplicación de las tablas, árboles y otros conocimientos de propios de la Matemática Discreta.

Participaron en la experiencia de esta actividad 72 alumnos de de tercero y cuarto de secundaria obligatoria que tienen entre 15 y 16 años, los cuales resuelven las cuatro tareas durante cuatro sesiones de clase ordinaria en el curso escolar 2008-09. Se realizan dos análisis basados en la experiencia con esta Actividad 1. El primero análisis se dedica a la capacidad que los alumnos poseen en el uso y manejo de tablas. Los resultados obtenidos con el modelo de Rasch como instrumento evaluador, publicados en Antequera y Espinel (2009b), permiten aceptar la idoneidad de las tareas en relación a los objetivos generales de la investigación, así como observar que los alumnos superan al menos la puntuación media y, por tanto, están capacitados para realizar las nuevas actividades en las que se utilicen tablas de doble entrada. El segundo estudio, publicado en Espinel y Antequera (2008) y en Antequera y Espinel (2011b), se centra en una de las tareas, *El Mejor Coche*, que conforman la Actividad 1 y que se toma de las actividades de PISA 2003, donde figura con este mismo título. Se desea observar la diferencia y dificultad entre los ítems que conforman la actividad, destacando como ítem más difícil el que consistente en asignar pesos a una función lineal para alcanzar un objetivo concreto. Además, se comparan los resultados obtenidos con los de PISA, tanto para España como para la media de la OCDE, observándose, de manera general, los mismos resultados y dificultades.

5.2. Actividad 2. Buscar el equilibrio. Una guerra de comidas

La Actividad 2, *Busca el equilibrio*, trabaja un contexto de competencia entre dos restaurantes que plantean diferentes ofertas en sus menús para atraer a la clientela. El estudio de las estrategias que tienen los dos empresarios en esta situación, les lleva siempre a unas elecciones de las que no les conviene desviarse, es decir, a una solución en equilibrio. En *Una guerra de comidas* se presenta una situación de conflicto puro entre dos jugadores, los empresarios, en la que los beneficios de uno se corresponden con las pérdidas del otro, es decir, un juego bipersonal de suma nula con solución en equilibrio. La actividad trabaja con la información recogida en tablas de doble entrada, matrices de pago, donde los alumnos tienen que seguir primero un pensamiento secuencial en busca de la mejor respuesta para ambos jugadores. Para luego, buscar sobre la matriz de las diferencias de pagos las estrategias maximin y minimax, y encontrar la solución en equilibrio del juego. En resumen, la actividad muestra una situación de conflicto puro en la que se aplica el Teorema del Maximin con el objeto de buscar la solución en equilibrio de juego.

Los resultados alcanzados con esta experiencia aparecen en Antequera y Espinel (2003a) y en la Tesina defendida en 2003 (Antequera, 2003). Se observa que muchos alumnos tienen dificultades para leer en una matriz o tabla de doble entrada.

5.3. Actividad 3. Jugar a engañar. Juegos cotidianos

La Actividad 3, *Jugar a engañar*, está constituida por cuatro tareas cortas y presenta situaciones basadas en *Juegos cotidianos*, como son: Pares y nones, Piedra, papel y tijera, Un juego de contienda y Hacer parejas con monedas. Estos cuatro juegos, presentan como principal estrategia para ganar, el intentar ocultar la propia estrategia al contrincante, y así intentar sorprenderle. Se utiliza como principal herramienta para representar los juegos, las tablas de doble entrada o matrices de pago. Se representan conflictos puros entre dos jugadores, juegos bipersonales de suma nula, y que no tienen necesariamente por qué tener solución en equilibrio. Partiendo del enunciado de las tareas, los alumnos han de construir las correspondientes matrices de pago e intentar encontrar la mejor estrategia para cada jugador. No todas las tareas presentan un mismo grado de concreción. En resumen, la relación entre los juegos de mesa y los juegos matemáticos es la idea de esta Actividad 3. Se plantea, partiendo de las matrices de pago de algunos juegos conocidos, la idea de estrategia mixta y se trata, como es normal en los juegos de mesa, de ganar engañando al contrario, de ahí el título de la misma.

Esta actividad se experimenta con un total de 40 alumnos en la investigación realizada para la Tesis, aunque también se trabaja en la Tesina (Antequera, 2003), y los resultados muestran que los alumnos no presentan grandes dificultades para trabajar con las matrices, posiblemente por ser matrices 2x2. Parece que no tienen problemas en leer las estrategias de las situaciones que se les presenta. Algunos resultados se muestran al mismo tiempo que se analiza la Actividad 7, puesto que se trabaja con los mismos cuatro juegos de mesa. En esta actividad se trata la construcción de las matrices de pago de cuatro juegos, mientras que en la Actividad 7, se trabajan construyendo el árbol de estrategia de cada uno de los juegos.

5.4. Actividad 4. Cooperar siempre. El dilema del prisionero

El eje conductor de la Actividad 4, *Cooperar siempre*, es una de las situaciones más paradigmáticas dentro de la Teoría de Juegos, el *Dilema del Prisionero*. La sencillez de enunciado de este dilema permite realizar adaptaciones de carácter divulgativo e intentar adaptarlo a niveles de educación secundaria, como es el caso de la propuesta recogida en http://www.iescarrus.com/edumat/taller/dilema/dilema.htm.

Las situaciones descritas en la actividad, *Cooperar siempre*, presentan la característica de que la elección de las mejores estrategias de una manera estrictamente racional y egoísta, llevan a una situación en equilibrio que es insatisfactoria si se compara con otras posibles. Mientras que optar por una actuación altruista (cooperativa) por parte de ambos jugadores, lleva a un mejor resultado, pero en un equilibrio inestable. Se quiere que los alumnos construyan las matrices de pago asociadas a dos tareas y analicen las mejores opciones para los jugadores. La idea que se pretende trasmitir es la de que en las decisiones que se toman en la vida se obtienen mejores resultados si se coopera, incluso con el enemigo.

La actividad se experimentó y desarrolló en la Tesina (Antequera, 2003) y a partir de estos resultados se realizan algunos cambios, como actualizar su enunciado o reducir su tamaño, a la vez que se mejora la redacción. Si bien el tiempo transcurrido ha permitido observar que hay suficiente material en la red para experimentar con el paradigma del Dilema del Prisionero, y por ello se ha preparado una WebQuest (Antequera, 2010, disponible en http://www.ceojuan23.com/mates.html), y se encuentra en fase de experimentación, ya que recientemente se ha colocado en la red para su libre uso.

5.5. Actividad 5. Decidir con árboles. Máquinas de refrescos

La Actividad 5, *Decidir con árboles*, emplea un diagrama de árbol para representar todas las acciones posibles de dos empresarios, que lo utilizan para tomar una decisión. En la actividad, *Máquina de refrescos*, dos empresarios deben decir dónde colocar una máquina de refrescos y otra de dulces en un centro educativo, de forma que los beneficios para ambos sean los mejores posibles teniendo en cuenta las elecciones del otro.

Esta actividad que comienza con una situación de toma de decisiones individual, describe en Teoría de Juegos una situación de conflicto puro entre dos jugadores, juego bipersonal con solución en equilibrio, sustentada en el diagrama de árbol como herramienta para presentar la información necesaria. Se desea comprobar que los alumnos son capaces de leer el árbol, de moverse por él, y de emplear la inducción hacia atrás para encontrar la mejor respuesta para ambos jugadores, en este caso, los dos empresarios. La idea que se pretende fomentar es la de conseguir un modo de pensamiento estratégico, a través del uso de los árboles de decisión, en los que se muestran todas las posibilidades de una situación, que están disponibles para el decisor, el cual ha de elegir para obtener los mejores beneficios posibles.

Esta actividad se desarrolló y experimentó en la Tesina (Antequera, 2003) y se ha mantenido igual a lo largo de la trayectoria de la experiencia. Únicamente se han eliminado algunos árboles de las tareas adicionales para acortar la actividad y que se pueda trabajar en una hora de clase. Los resultados que aparecen publicados en Antequera y Espinel (2003b), muestran que muchos alumnos confunden los árboles de decisión con los árboles como medio de conteo de la combinatoria. Parece que la mayoría de los alumnos son capaces de leer un árbol, incluso hay alumnos que, aun cuando no construyen explícitamente el otro árbol que se les pide, responden como si lo tuvieran en mente. Sólo a muy largo plazo se podrá saber si los árboles de decisión se convierten en una herramienta a la que los estudiantes acudan cuando tengan que tomar decisiones en su vida cotidiana, que es el principal objetivo de esta actividad.

5.6. Actividad 6. Optimizar con árboles. El juego del palo

Se presenta en la Actividad 6, *Optimizar con árboles*, una situación de enfrentamiento basada en el juego tradicional del *Juego del Palo* canario, en la que dos deportistas se enfrentan intentando ser el primero en golpear a su contrincante. La información se recoge primero en un árbol de decisión con las distintas opciones y resultados del juego, para luego reorganizarla en una tabla de doble entrada o matriz. En esta actividad se presentan dos métodos para la búsqueda de la solución óptima de este ejemplo de juego bipersonal de suma nula. El primer método se basa en el estudio de la existencia de estrategias dominadas y dominantes para los distintos jugadores, centrando la atención en las estrategias generales de los individuos implicados. En el segundo método se presenta una versión simplificada del Teorema del Maximin de John von Neumann, punto de partida y base del desarrollo de la Teoría de Juegos.

Participan en la experiencia 16 alumnos que cursan la materia Matemáticas A de 4º ESO que está orientada hacia las Ciencias Sociales. En los resultados presentados en Antequera y Espinel (2007), se muestra que la mayoría de los alumnos comprende la situación planteada, que distinguen estrategias dominantes y dominadas, llegan a la solución del juego. Varios alumnos calculan el valor del juego usando el maximin y minimax y la mayoría son capaces de trasladar información de un árbol a una matriz. Con este tipo de actividad, se hace uso de herramientas como tablas y árboles, para la resolución de problemas que se pueden presentar en la sociedad. Además, se promueve el carácter utilitario de las matemáticas y con ello se ayuda a conseguir actuaciones racionales y de pensamiento estratégico, resultados que sólo son observables a largo plazo.

5.7. Actividad 7. Jugar con árboles. Árbol para decidir

La idea de la Actividad 7, *Jugar con árboles*, es mostrar que la vida puede ser considerada como un juego en la que también hay que tomar decisiones, de ahí el título, *Árbol para decidir*. Algunos juegos de estrategia, que son conocidos y populares, se utilizan para incentivar el desarrollo del pensamiento estratégico en alumnos de secundaria obligatoria. En esta actividad se retoman los juegos planteados en la Actividad 3, Pares y nones, Piedra, papel y tijera, Un juego de contienda y Hacer parejas con monedas, y se añade uno nuevo, Sumando números. En esta variante de la actividad se muestran todas las posibilidades que tienen los jugadores a través del diagrama de árbol. Dicha representación permite el estudio de todas las contingencias posibles y es también una técnica para escoger la mejor estrategia posible. La idea a transmitir es cómo la representación en árbol supone una ayuda en la vida diaria para analizar el comportamiento humano en situaciones de conflicto de intereses.

En la experiencia participan un total de 52 alumnos de dos institutos de secundaria. Son estudiantes que tienen edades entre 13 y 16 años. El estudio recogido en Antequera y Espinel (2011c), indica que los alumnos de secundaria han sido capaces de dibujar el árbol de decisión de un juego y que sus construcciones son más correctas y precisas según aumenta el nivel o la edad de los estudiantes. Además, en sus producciones se observa una fuerte influencia de sus conocimientos previos de los diagramas de árbol en combinatoria y probabilidad. Las principales deficiencias se observan cuando los alumnos intentan asignar pagos a las distintas estrategias de los jugadores, que en parte se pueden entender como un intento de ahorro en el uso de ostensivos en sus producciones.

5.8. Actividad 8. Asociarse para ganar. El consejo escolar

En la Actividad 8, *Asociarse para ganar*, se presenta una situación en la que un colectivo debe buscar alianzas y llegar a un acuerdo para ejercer el control en un consejo. Es decir, se trata de un juego cooperativo. La idea que se quiere trasmitir es que el pacto entre grupos supone una interacción social que ayuda a que todos salgan ganando. El ánimo de esta experiencia está en valorar la importancia de asociarse para lograr mayorías. En esta actividad guiada de aplicación de los juegos cooperativos y del índice de poder se utiliza el contexto de la composición de *El consejo escolar* de un centro educativo, situación que es cercana a los alumnos. Los cuatro grupos que lo forman, profesores, padres, alumnos y personal no docente, tienen el número de representantes que se muestran en la Tabla 1.

Grupo	**Profesores A**	**Padres B**	**Alumnos C**	**No docentes D**
Votos	7	3	3	2

Tabla 1. Distribución del Consejo Escolar en la Actividad 8

A través de esta experiencia se desea indagar el grado de comprensión de la actividad por parte de los alumnos y observar su capacidad para apreciar que los sistemas de justicia están asociados a la capacidad para negociar más que a la cantidad de votos. Además que esta diferencia entre votos e índice se debe a que hay que tener en cuenta las coaliciones, por el beneficio que se adquiere, y que, además, la asignación justa de beneficios obtenidos por la cooperación, sólo se consigue si se dispone de votos suficientes para poder negociar.

El análisis y los resultados de la experiencia realizada con esta actividad se presentan ampliamente en el apartado 6 de este artículo.

5.9. Actividad 9. Poder contra porcentajes. El poder de los accionistas

La Actividad 9, *Poder contra porcentajes*, presenta una situación de elección social poniendo el acento en marcar la diferencia entre el porcentaje de votos y el poder real que posee cualquier individuo o colectivo dentro de un consejo, ya sea político, empresarial o social. La idea expuesta es la de observar cómo el poder no respeta la proporcionalidad de los votos. El contexto empleado en esta actividad es el reparto de *El poder de los accionistas* en una empresa. Se muestran varios escenarios posibles que revelan cómo la influencia de los accionistas puede variar de manera significativa, ya que ésta depende del reparto de acciones. Se trabaja con el índice de poder de Shapley-Shubik, basado en el poder decisorio de un jugador (pivote) cuando se consideran todas las permutaciones posibles de los miembros del consejo.

En esta actividad se trabaja el concepto de índice de poder, igual que en la Actividad 8 que se analiza en el siguiente apartado. La experimentación que se realiza de esta Actividad 9, con alumnos de primero de bachillerato y de cuarto ESO de Ciencias Sociales, con un total de 31 alumnos, no aporta más consecuencias de las ya observadas por otros estudios. Los resultados obtenidos con las otras dos actividades, 8 y 10, que también tratan de juegos cooperativos, fueron tan productivos, que al compararlos con los resultados preliminares de esta actividad, permiten soslayarla ya que se tiene suficiente información sobre la cuestión para la investigación general. Además, existe material análogo sobre porcentajes e índices de poder.

Como ejemplo de sitio web en el que encontrar descripciones con carácter divulgativo de los índices de poder utilizados en las actividades 8 y 9, se propone www.iescarrus.com/edumat/taller/poder/poder_02.htm.

5.10. Actividad 10. Bancarrota. El reparto de la miseria

En la Actividad 10, *Bancarrota*, tres empresarias, tras ver fracasar su empresa, deben repartirse el capital que les queda, que es insuficiente para cubrir la inversión hecha en un principio. La quiebra de una empresa lleva emparejado una situación de bancarrota en la que no hay suficientes bienes para pagar a los acreedores y, aún así, estos bienes se deben repartir aunque no se cubran las demandas de los acreedores, *El reparto de la miseria*. Los antecedentes didácticos que llevan a formular este estudio, surgen por un lado, en el excesivo uso que se hace de la "regla de tres" para el reparto proporcional en los currículos actuales y, por otro, para observar la actuación de los estudiantes ante distintas formas de reparto. Las situaciones de bancarrota son siempre difíciles, ya que, dicho de forma coloquial, "no hay suficiente pastel para todos los que quieren una parte". Sin embargo, existen formas de reparto, que llegado el caso, pueden considerarse más justas que otras. En esta actividad se realiza una adaptación de algunas de estas reglas de reparto propias de los problemas de bancarrota. En la web http://www.eumed.net/ce/2006/fjss.htm se puede encontrar un resumen teórico de los principales conceptos sobre los juegos de bancarrota, así como varios ejemplos que ilustran este tipo de situaciones.

En el estudio participan en total 74 alumnos que cursan tercero y cuarto de secundaria obligatoria, de entre 15 y 16 años, y primero de bachillerato, que tienen entre 16 y 17 años. Los resultados publicados en Antequera y Espinel (2011a), muestran que existen alumnos que presentan dificultades con el reparto proporcional, cometiendo errores en el procedimiento de cálculo. Esta dificultad se ha detectado en otros momentos de esta investigación, resultando preocupante que alumnos de los últimos años de la educación secundaria cometan errores en un cálculo básico de situaciones de la vida cotidiana. Hay alumnos que tienden a repartir más cantidad de la disponible, o incluso asignan a los acreedores más de lo que solicitan. Esta circunstancia, no se debe a la ejecución incorrecta de la regla propuesta, sino a que algunos alumnos no terminan de leer los enunciados donde se les aclaran los casos particulares. Aceptan las distintas reglas de reparto, llegándolas a considerar como justas. Sin embargo, siguen considerando el reparto proporcional como el más adecuado para realizar repartos. Hay que señalar que en esta actividad los alumnos de altas capacidades o talentosos captan mejor la naturaleza del problema y llegan a aportar soluciones novedosas que, además, justifican adecuadamente.

6. Análisis de la experiencia con la Actividad 8. Asociarse para ganar. El consejo escolar

En este apartado se describe la experiencia con la Actividad 8, *Asociarse para ganar. El consejo escolar*, como ejemplo y síntesis de la investigación realizada con el resto de actividades.

6.1. Conceptos teóricos sobre el Índice de Poder

Considere una mesa de negociación formada por tres grupos políticos distintos, A, B y C. La mesa está constituida de forma que el grupo A tiene 4 representantes o votos, el grupo B tiene 3 representantes o votos, y el grupo C tiene un solo representante o voto, siendo 8 el número total de votos que se pueden emitir. Los tres grupos tienen que negociar para formar coaliciones que les den mayorías.

Este tipo de situaciones, en Teoría de Juegos, se denominan juegos de votación ponderada. La representación formal de los mismos es $[q; w_1, w_2, \ldots, w_n]$, donde los w_i son los votos que posee cada grupo, y q es la cuota para alcanzar la mayoría, que de manera usual se considera como la mitad más uno de la suma de todos los votos ($q = \frac{\sum w_i}{2} + 1$). En el ejemplo, se tiene un juego de votación ponderada formado por tres grupos, considerados como jugadores, A, B y C, con una cuota de mayoría de 5, siendo la representación formal del juego [5; 4, 3, 1].

Se pretende medir la capacidad negociadora de cada jugador a la hora de formar coaliciones. Partiendo de juegos de votación ponderada, se define el concepto de índice de poder como los valores que se asignan a los jugadores y que proporcionan una medida de su poder o influencia. Existen varios índices de poder, pero de entre ellos los más conocidos son el índice de Shapley-Shubik, el de Banzhaf-Coleman y el de Deegan-Packel (Taylor, 1995). En el desarrollo de esta experiencia se emplea sólo este último índice, cuyo cálculo se muestra a continuación a través del ejemplo anterior.

El índice de Deegan-Packel toma en consideración las coaliciones ganadoras minimales, es decir, aquellas coaliciones que son ganadoras, al igualar o superar la cuota de mayoría, y que además en ellas todos los miembros son imprescindibles. En la Tabla 2 se recogen todas las coaliciones posibles en este juego. Se resaltan en negrita las coaliciones ganadoras y, de entre ellas, se colorean las coaliciones ganadoras minimales.

1 grupo	2 grupos	3 grupos
A B C	**A-B**; **A-C**; B-C	**A-B-C**

Tabla 2. Coaliciones posibles en el juego de votación ponderada

Luego, las coaliciones minimales son las formadas por el grupo A aliado con el grupo B o con el grupo C. En estas coaliciones el poder que le corresponde a cada grupo o jugador se reparte equitativamente, como se observa en la Tabla 3. Si se suma las aportaciones de cada coalición para cada jugador y este resultado se divide por la suma total de estas sumas parciales ($\Sigma = 4/2$), el valor que se obtiene para cada jugador es el valor del índice de poder. En este caso, al grupo o jugador A le corresponde 1/2, y al grupo B y al C 1/4 a cada uno, es decir, trasladando estos valores a porcentajes, a los grupos le corresponden el 50%, el 25%, y el 25%, respectivamente.

CGM	A	B	C	
A-B	1/2	1/2		
A-C	1/2		1/2	
Suma	2/2	1/2	1/2	$\Sigma = 4/2$
Índice	1/2	1/4	1/4	

Tabla 3. Cálculo del índice de poder

Si se compara el porcentaje de votos con los valores para cada índice (Tabla 4), la observación más significativa es que, aunque los grupos B y C poseen un número de votos diferente, sin embargo poseen el mismo poder o influencia real.

	A	B	C
Votos	50%	37,5%	12,5%
Índice	50%	25%	25%

Tabla 4. Comparación del porcentaje de votos y el del índice de poder

6.2. Resultados de la experiencia

El estudio se desarrolla con un total de 52 alumnos que tienen entre 15 a 17 años y que cursan el último año de secundaria obligatoria (4º ESO) o el bachillerato de Ciencias Sociales, distribuidos como se recoge en la Tabla 5.

Nivel	**Secundaria**	**4º ESO**	**1º BACH**	**2º BACH**
Alumnos	Total = 52	15	30	7

Tabla 5. Número de alumnos distribuidos por niveles

El hecho de que los alumnos sean de dos etapas educativas distintas permite hacer, además de un análisis cualitativo de sus respuestas, un estudio comparativo por nivel educativo. En el marco de análisis se ha tenido presente los niveles de modelización (Henning y Keune, 2005), en especial con respecto al conocimiento y comprensión del modelo, y a la ejecución de una modelización independiente por parte de los alumnos. Esta actividad está diseñada especialmente como un proceso de modelización guiada y por ello se tiene en cuenta para su análisis.

La situación del consejo escolar que plantea la actividad (Tabla 1) se puede resumir de manera formal en el siguiente juego de votación [8; 7, 3, 3, 2]. En una primera parte de la actividad se les muestra a los alumnos, de manera similar a la descrita en el ejemplo anterior, el procedimiento de cálculo del índice de Deegan-Packel, hasta llegar al resultado final recogido en la Tabla 6 que compara el porcentaje de votos y el del índice de poder.

	A	**B**	**C**	**D**
Votos	46,7%	20%	20%	13,3%
Índice	37,5%	20,8%	20,8%	20,8%

Tabla 6. Comparación del porcentaje de votos y el del índice de poder

En esta primera parte de la actividad, además de mostrar a los alumnos el proceso de cálculo del índice, se plantean cuestiones relativas al procedimiento necesario para este cálculo. Se pide a los alumnos que identifique los distintos tipos de coaliciones, utilizando el conocimiento que ya tienen sobre combinatoria para introducir la idea de coalición, término nuevo en matemáticas, para luego identificar y separar las coaliciones ganadoras, perdedoras y ganadoras minimales. El porcentaje de respuestas correctas de los alumnos, en cuanto a completar las distintas clases de coaliciones pedidas se recogen en la Tabla 7.

Coaliciones	**Ganadoras**	**Perdedora**	**Ganadoras Minimales**
Correctas	80,8%	59,6%	77%

Tabla 7. Porcentajes de respuestas correctas dadas por los alumnos

La mayor dificultad se presenta en la detección de las coaliciones perdedoras, como se observa en el porcentaje de acierto mostrado en la Tabla 7. Esta circunstancia se debe, principalmente, a que los alumnos sólo consideran las coaliciones formadas por dos jugadores o no consideran como coalición, y en este caso como coalición perdedora, a aquéllas formadas por un solo individuo, lo que les lleva a dar una respuesta parcial a esta cuestión. En estas preguntas, al comparar los resultados por niveles educativos se observa que éstos son similares con independencia del nivel al que pertenezca el alumno.

La comparación entre porcentajes de los votos y del índice de poder, tal como se recoge en la Tabla 6, ilustra como jugadores de distinto peso tienen el mismo poder. Así, la diferencia en votos de tres grupos (Padres, Alumnos y No Docentes) desaparece al considerar el índice y se observa como los Profesores no tienen tanto poder como podría indicar su número de votos. En este sentido, cuando se pide a los alumnos que comparen el porcentaje de votos y el índice, ahora sí se detectan diferencias en las respuestas dadas por los alumnos según el nivel educativo. Mientras los alumnos de ESO en su mayoría no contestan y dejan en blanco esta cuestión, los alumnos de bachillerato, salvo tres, lo hacen bien y de manera razonada.

La segunda parte de la actividad consta de dos tareas semejantes a la que se presenta como modelo, en las que se da al alumno la oportunidad para que reproduzca el proceso de modelización anterior y trabaje de forma análoga pero más autónoma.

Con la primera de las tareas, Tarea 1, en el mismo contexto del consejo escolar de la etapa guiada, se pretende observar si ante un modelo totalmente análogo, los estudiantes captan el concepto de coalición y saben extraer del modelo la idea de perdedora y ganadora. Efectivamente, los resultados de las cuestiones de esta Tarea 1, muestran que el éxito es prácticamente total, tanto en ESO como en bachillerato. Si bien se observa cierta diferencia según los niveles de alumnos, ya que los de bachillerato justifican mejor y de una forma más amplia sus respuestas.

La segunda tarea, Tarea 2, utiliza un contexto político distinto a la primera relativo a la constitución de un ayuntamiento, y se continúa con el proceso análogo. Se plantea una nueva situación de votación ponderada, [6; 5, 4, 2], en la que los alumnos tienen que realizar el procedimiento de cálculo del índice de Deegan-Packel, contestando cuestiones que los orientan en el proceso. El fin último es que los alumnos completen una tabla con el porcentaje de votos y el del índice, como la Tabla 8.

	A	B	C
Votos	45,46%	36,36%	18,18%
Índice	33,33%	33,33%	33,33%

Tabla 8. Comparación del porcentaje de votos y el del índice en la Tarea 2

En los primeros apartados de esta tarea y de manera guiada, se pide a los alumnos que calculen el porcentaje de votos y que busquen los distintos tipos de coaliciones: ganadoras, perdedoras y ganadoras minimales. Los resultados muestran que los alumnos cometen los mismos errores que en la primera parte de la actividad, es decir, o bien consideran sólo las coaliciones formadas por dos jugadores, o bien no consideran como coalición las formadas por un solo jugador.

Las producciones escritas por los alumnos muestran como la primera parte de esta tarea la completan prácticamente todos los alumnos, sin encontrarse diferencias entre los alumnos de ESO y los de Bachillerato. Sin embargo, no ocurre lo mismo con los últimos apartados relativos al cálculo del índice de poder, donde se observan mejores resultados en los estudiantes de bachillerato que en los de cuarto de ESO.

En esta Tarea 2 destacan dos resultados principalmente. Por un lado, el cálculo de los porcentajes de los votos lo completan correctamente casi todos los alumnos, anotando como respuesta: 45,45%; 36,36%; 18,18%. Hay algunos alumnos que redondean su respuesta a: 45,5; 36,4; 18,1, que se puede aceptar como correcta, ya que suma 100. Otros alumnos dan: 0,45; 0,36; 0,18, pero posteriormente cuando lo vuelve a utilizar en el último apartado de esta actividad lo pasan a porcentaje. Algunos apuntan: 45%, 36%, 18%, sin observar que así no suma 100. Hay alumnos de Bachillerato que calculan el porcentaje utilizando como cuota 6, en lugar del total 11, por lo que colocan en la tabla: 83,3; 66,6; 33,3. Evidentemente, estos casos son los resultados más preocupantes, ya que son alumnos que no se dan cuenta de que obtienen porcentajes disparatados y que no suman 100. En la Tabla 9 se resumen las distintas respuestas. Si se consideran como respuestas aceptables las cuatro primeras filas de la Tabla 9, se tiene que un 85% de los alumnos responde correctamente.

A	B	C	Respuestas
45,45%	36,36%	18,18%.	76%
45,5%	36,4%	18,1%	3%
0,45	0,36	0,18	3%
45%	36%	18%	3%
83,3%	66,6%	33,3%	9%
Blanco	Blanco	Blanco	6%

Tabla 9. Respuestas de los estudiantes en el cálculo de porcentaje

El otro resultado remarcable se encuentra en el cálculo del índice, donde se espera que los alumnos realicen el proceso que se recoge en la Tabla 10.

CGM	A	B	C	
A-B	1/2	1/2		
A-C	1/2		1/2	
B-C		1/2	1/2	
Suma	2/2	2/2	2/2	Σ = 6/2
Índice	1/3	1/3	1/3	

Tabla 10. Cálculo del índice de poder en la Tarea 2

Los resultados recogidos en la Tabla 11 muestran que sólo realizan el proceso correctamente un 36,4% de los alumnos y lo dejan en blanco un 30,3%. El alto porcentaje de alumnos que no responden se debe al alto fracaso observado en los alumnos de ESO. Entre los alumnos de bachillerato los resultados son significativamente mejores, respondiendo correctamente el 55,5%, es decir, completan de forma correcta el cálculo del índice de poder. De estos sólo un alumno deja la pregunta en blanco y el resto comete distintos errores, principalmente al utilizar en el proceso más coaliciones de las minimales. En las preguntas sobre aportar alguna opinión sobre la comparación de porcentajes, aparecen frases como: "Que A y B salen perdiendo y C sale ganando"; "El más favorecido es el partido C, mientras que el más perjudicado es el A, seguido del B"; "Que todos van a dar lo mismo" y "33,33% todos son iguales", lo que sugiere que los alumnos que han llegado hasta el final de la tarea, captan la idea que se les pretende trasmitir.

	Bien	Mal	Blanco
Total	36,4%	33,3%	30,3%
Bachillerato	55,5%	41,8%	2,7%

Tabla 11. Comparación del porcentaje de acierto total y el de Bachillerato

6.3. Conclusiones de la experiencia sobre Índice de Poder

En síntesis, se puede afirmar que los resultados de esta experiencia muestran una comprensión aceptable de la actividad por parte de los estudiantes de secundaria, como se puede observar a partir de que:

- Todos los alumnos comienzan trabajando la actividad y ninguno la deja totalmente en blanco.
- Hacen uso de contenidos básicos de matemática como combinatoria, fracciones y porcentajes especialmente en el proceso guiado, si bien los alumnos más jóvenes tienen dificultades para transponer el proceso a otro contexto.
- En las respuestas de algunas preguntas hay una clara influencia del contexto, pues se observa como los alumnos aplican mejor la combinatoria en esta actividad que cuando se formulan problemas matemáticos en abstracto.
- También se encuentra un aceptable conocimiento semántico, ya que se observa que dominan el vocabulario del área relevante para el problema, utilizando términos como consorcio, afiliado, asociado, colega, accionista,… cuando justifican sus respuestas.
- Por sus respuestas se puede interpretar que los alumnos captan las ventajas de la cooperación y de formar alianzas entre los jugadores y, por tanto, se puede considerar que, al menos parcialmente, se consiguen algunos de los objetivos de esta experiencia.

Además, se considera que, con respecto a la competencia en modelización según los tres niveles propuestos por Henning y Keune (2005), todos los alumnos alcanzan el nivel 1, en el sentido de que reconocen y comprenden la modelización, puesto que entienden la notación utilizada. El nivel 2, sólo lo alcanzan los alumnos de bachillerato, ya que son los que trabajan con el modelo. En cuanto al nivel 3, ocurre que en la actividad no se puede apreciar una meta – reflexión, aunque hay alumnos que llegan a criticar el resultado, especialmente en la segunda tarea y parece que comprenden la modelización y su utilidad en la sociedad.

7. Conclusiones generales de la investigación

Esta investigación ha mostrado resultados de una vinculación de los contenidos propios de la Matemática Discreta con algunos de los objetivos que se promueven desde la Educación Secundaria. Se trata de fomentar una cultura integral en los alumnos, que es, al mismo tiempo, uno de los objetivos principales de la enseñanza en Secundaria, aunque también uno de los que se hace más difícil de alcanzar. El propósito fundamental que ha motivado este trabajo es emplear conceptos propios de la Teoría de Juegos, para desarrollar contenidos de carácter formativo que potencien valores de justicia, cooperación, negociación, convivencia democrática, etc., desde el ámbito de las matemáticas. Este propósito se desglosa en tres objetivos, diseñar material curricular, observar la compresión del mismo por parte de los alumnos y por último evaluarlo, y así como en seis fines que, a continuación, se retoman aportando las reflexiones que sobre ellos se han obtenido.

Con el diseño de material curricular empleando conceptos propios de la Teoría de Juegos, que constituye el primer objetivo de esta investigación, se promueve el carácter utilitario de las matemáticas y con ello se ayuda a conseguir actuaciones racionales, cuyos resultados sólo son observables a largo plazo. Al tiempo se hace uso de herramientas como tablas y árboles, para la resolución de problemas en la vida diaria, y se consigue divulgar conceptos propios de esta teoría, como son los árboles de decisión, las matrices de pago, las votaciones ponderadas, los índices de poder y el reparto justo.

En cuanto al segundo objetivo, consistente en observar el comportamiento y rendimiento de los alumnos en la resolución del material diseñado y el grado de comprensión de los contenidos, se han detectado en toda las experiencias, dificultades en la comprensión de los enunciados y de parte de la nueva terminología. Ello motivó las mejoras hechas en la redacción de las actividades a lo largo de la investigación. Se detectan, también, errores en el cálculo e interpretación de porcentajes por parte de alumnos de distintos niveles educativos. Esta circunstancia es significativa por tratarse de un concepto básico que se debe tener completamente interiorizado al finalizar la etapa de educación obligatoria y que, sin embargo, se encuentra que muchos alumnos no han alcanzado. Además, las respuestas de los alumnos están influenciadas por el contexto. Por un lado, sus aportaciones tienden a ser mejores en situaciones contextualizadas, que cuando se les presentan en forma de ejercicios teóricos. Y por otro lado, los alumnos tienen propensión a aportar soluciones que les parecen justas dentro de un contexto real, pero que en muchas ocasiones carecen de justificación matemática.

De manera general, se detecta en los alumnos capacidad para afrontar con éxito las tareas basadas en procedimientos rutinarios, siendo capaces de reconocer y comprender el modelo que se les plantea en cada actividad y aplicarlo directamente. Sin embargo, son pocos los alumnos que se desenvuelven de manera satisfactoria en aquellas tareas que requieren de perspicacia y originalidad, en aquellas en las que deben trabajar con el modelo planteado dando respuestas originales. Los alumnos que alcanzan este nivel pertenecen, en su mayoría, a los grupos de Bachillerato o a los de Talentosos.

Al evaluar el material curricular, tercer objetivo de la investigación, a través de los éxitos y dificultades que se observen en las producciones de los alumnos, para adaptar y mejorar dicho material, se observa principalmente que para el tipo de actividades y el tiempo de ejecución, un proceso con tareas abiertas y de interpretación más libre, provoca resultados poco satisfactorios en las mismas. Esta circunstancia trajo consigo la necesidad de modificar la redacción de las actividades hacia una modelización guiada, seguida de tareas análogas. Esta nueva estructura produjo una mejora significativa de las respuestas de los alumnos, tanto en la compresión de los conceptos descritos en las actividades, como en la calidad de las aportaciones hechas por ellos.

En cuanto a los fines que se plantean en esta investigación, éstos tienen un carácter más general y su consecución va más allá de los resultados obtenidos en estas experiencias, es decir, se espera que con actividades de este tipo se puedan alcanzar a más largo plazo. Se presentan a continuación unas reflexiones sobre los fines que se pretenden con esta experiencia.

- Para fomentar la interdisciplinariedad, considerando el lenguaje matemático como hilo conductor entre distintas áreas. Se cree que este tipo de material curricular puede dar una visión de las matemáticas en conexión con diferentes ámbitos disciplinarios. Se favorece la adquisición de las competencias básicas planteadas en el currículo oficial a través de actividades en contextos de interés para los alumnos, como son las competiciones deportivas, los juegos cotidianos…
- El carácter utilitario de las matemáticas, como herramienta para la resolución de problemas sociales. Se detecta en la introducción de nuevos contenidos de utilidad directa para el alumnado, así como en la aplicación de contenidos curriculares que ya conocen en situaciones novedosas. Se muestra, así, la gran importancia que está adquiriendo las matemáticas en profesiones no científicas en el ámbito de las Ciencias Sociales.
- Las habilidades basadas en el diálogo y la cooperación para la resolución de conflictos, así como la adquisición de valores y principios propios de las sociedades democráticas, obtienen una justificación desde las matemáticas. Además, la cooperación social se presenta como actividad escolar en las clases de matemáticas y ligada a comportamientos estratégicos y racionales.

- Los contenidos característicos de las matemáticas, muy útiles en ciencias sociales, como son el uso de representaciones en árbol, las tablas y las matrices, la resolución de problemas y la búsqueda de estrategias, se refuerzan a lo largo de todas las actividades que conforman este material curricular en su aplicación en contextos no estandarizados que favorecen su compresión y asimilación por parte del alumnado.
- Se aporta un sistema de herramientas propias de la Teoría de Juegos, que permite desarrollar el pensamiento estratégico y la toma decisiones. Esto facilita la presentación de modelos para la toma de decisiones y el pensamiento racional y el dominio de la parte emocional del problema en la búsqueda de soluciones mejores o más justas.
- La adquisición de la capacidad de ponerse en el lugar del otro en situaciones de conflicto, de manera que se tengan referencias de todos los puntos de vista, permite que los alumnos alcancen una visión global de las situaciones de conflicto y asimilen que estas no tiene porqué encontrarse necesariamente en un contexto bélico, sino que aparece de manera continua en todas las relaciones se establecen entre los miembros de la sociedad.

Se ha demostrado que este tipo de material resulta de gran utilidad para el desarrollo integral de los alumnos como medio para la adquisición de las Competencias Básicas necesarias para la vida adulta. El tipo de actividades que se plantean son totalmente asimilables por parte del alumnado al que están dirigidas, puesto que, con los conocimientos adquiridos en la escuela, no tienen dificultades a la hora de enfrentar los nuevos contenidos que se les presentan.

Nuestra investigación tiene un carácter novedoso en Educación Matemática en España, puesto que se ha preparado, experimentado y analizado material educativo adaptado a Educación Secundaria sobre conceptos como la Matemática Discreta y, en concreto, la Teoría de Juegos, de una manera que hasta ahora no se había realizado. Además, este material ha evolucionado durante todo el proceso y seguirá evolucionando como respuesta a las nuevas demandas que plantea la sociedad actual. Con esta investigación se ha querido plantear la factibilidad de introducción de nociones propias de la Teoría de Juegos en el currículo de secundaria. Se sigue la línea abierta por otros investigadores en este sentido, de los que destacamos las investigaciones recogidas en los libros *Insighs into Game Theory. An Alternative Mathematical Esperience* (2008) de Gura y Maschler en el plano internacional, y *Recursos para el estímulo del talento precoz en Matemáticas* (2006) de Acosta, Cutillas, Falcón y Freaza sobre el Programa Estalmat realizado con los alumnos talentosos en Canarias.

El proceso de la investigación, que comenzó con la defensa de la tesina de licenciatura *Matemáticas para el desarrollo del pensamiento estratégico y de cooperación en alumnos de Secundaría*, se ha hecho un esfuerzo divulgativo tanto del material curricular, como de los resultados obtenidos en las distintas experiencias. Se han realizado comunicaciones en jornadas de profesores, a nivel autonómico en las jornadas de la Sociedad Isaac Newton (Antequera y Espinel, 2007), y nacional en las JAEM (Antequera y Espinel, 2003b, 2009a), y se ha participado en congresos de carácter científico en Educación Matemática, a nivel nacional (Antequera y Espinel, 2003c, 2008a, 2008b, 2009b) e internacional (Antequera y Espinel, 2010; Espinel y Antequera, 2008). Y además se han publicado resultados de la investigación en revistas de ámbito nacional (Antequera y Espinel, 2003a) e internacional (Antequera y Espinel, 2011a, 2011b, 2011c).

Bibliografía

Antequera, A. T. (2003). Matemáticas para el desarrollo del pensamiento estratégico y de cooperación en alumnos de Secundaría. *Tesina de Licenciatura*. Facultad de Matemáticas de la Universidad de La Laguna.

Antequera, A. (2010). Cooperar siempre. Dilema del prisionero. *WebQuest*. Recuperado el 12 de agosto de 2011, de http://www.ceojuan23.com/mates.html.

Antequera, A. T., & Espinel, M. C. (2003a). Decisiones estratégicas y de cooperación desde las Matemáticas. *Números*, Revista de la S.C.P.M. Isaac Newton, 53, 15-26.

Antequera, A. T.;Espinel, M. C. (2003b). Árboles de decisión: Desarrollo del pensamiento estratégico en secundaria. Comunicación en XI Jornadas Nacionales de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas. *Actas de las XI JAEM*, Puerto la Cruz. Tenerife.

Antequera, A. T.; Espinel, M. C. (2003c). Matemáticas para el desarrollo del pensamiento estratégico y de cooperación en estudiantes de Secundaria. Comunicación en Sexta Reunión Interuniversitaria sobre formación del profesorado e investigación en Educación Matemática, Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, V, 25-46.

Antequera, A. T.; Espinel, M. C. (2007). Busca tu mejor estrategia. Comunicación XXVI Jornadas de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton", Facultad de Matemáticas, Universidad de La Laguna.

Antequera, A. T.; Espinel, M. C. (2008a). El mejor coche. Comunicación en Décima reunión interuniversitaria sobre formación del profesorado e investigación en educación matemática, Facultad de Matemáticas de la Universidad de La Laguna. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, IX, 9-25. Recuperado el 12 de agosto de 2011, de www.anamat.ull.es/didactica/

Antequera, A. T.; Espinel, M. C. (2008b). Combinatoria y deportes: Un ejemplo de tarea matemática analizada utilizando técnicas estadísticas y Rasch. Comunicación en III Workshop sobre Rasch. Publicación en *IUDE Documento de Trabajo*. Serie Estudios N 2008/75. Instituto Universitario de la Empresa. Universidad de La Laguna, Canarias. Recuperado el 12 de agosto de 2011, de http://webpages.ull.es/users/iude/investigacion/publicaciones/pdf_docs_trabajo/200875.pdf

Antequera, A.; Espinel, M. C. (2009a). Diagramas de árbol como destrezas cotidianas de estudiantes de Secundaria. *Actas XIV JAEM* (Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas), Girona. Recuperado el 12 de agosto de 2011, de http://xivjaem.org/index.php

Antequera, A.; Espinel, M. C. (2009b). Un estudio sobre la competencia de los alumnos en el manejo de tablas para resolver situaciones cotidianas. Comunicación al XIII Simposio de la SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática), Santander. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.) *Actas de Investigación en Educación Matemática XIII*, 227-236.

Antequera, A.; Espinel, M. C. (2010). Statistical Education and a Fairer Society. ICOT8, Slovenia. Recuperado el 12 de agosto de 2011, de http://icots8.org/notices/Guidelines%20for%20Preparation%20of%20Posters.pdf

Antequera, A.; Espinel, M. C. (2011a). Analysis of a teaching experiment on fair distribution with secondary school students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42: 2*, 213-228.

Antequera, A., & Espinel, M. C. (2011b). Rules for rational decision making: An experiment with 15- and 16-year-old students. *Investigations in Mathematics Learning, Winter Edition, 2011, 4, 2*, 25-41.

Antequera, A.; Espinel, M. C. (2011c). Juegos cotidianos y árboles de decisión: aportaciones de alumnos de secundaria. *Educación Matemática, 23, 2,* 33-63.

Aumann, R. J.; Maschler, M. (1985). Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud. *Journal of Economic Theory*, Elsevier, 36(2), 195-213. Disponible en: http://ideas.repec.org/e/pau21.html

Bilbao, J. M. (2004). *El reparto del poder en la Constitución europea*. Real Instituto Elcano de Estudios Internacionales y Estratégicos. Recuperado el 12 de agosto de 2011, de http://www.realinstitutoelcano.org/analisis/554/Bilbaopdf.pdf

Binmore, K. (1996). *Teoría de Juegos*. Madrid: McGraw-Hill.

Callingham, R.; Bond, T. (2006). Research in Mathematics Educations and Rasch Measurement. *Mathematics Educations Research Journal*, 18, 2, 1-10.

COMAP (1999). *Las matemáticas en la vida cotidiana*. Madrid: Addison – Wesley / Universidad Autónoma.

Consejería de Educación, Cultura y Deporte de Canarias (2007). BOC: 910. Decreto 127/2007, de 24 de mayo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Canarias.

Debellis, V. A.; Rosenstein, J. G. (2004). Discrete Mathematics in Primary and Secondary Schools in the United States. *ZDM* (Zentralblatt für Didacktik der Mathematik), 36 (2), 46-55.

Doorman, M., Drijvers, P., Dekker, T., Van Den Heuvel-Panhuizen, M, De Lange, J., & Wijers, M. (2007). Problem solving as a challenge for mathematic education in The Netherlands. *ZDM Mathematics Education*, 39, 405-418.

Espinel, M. C. (1999). El poder y las coaliciones. *Suma* (Revista sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas), 31, 109-117.

Espinel, M. C. (2007). El reparto de lo escaso, *UNIÓN*, 10, 95-108. Disponible en: http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php?id=27#indice

Goldin, G. A. (2004). Problem Solving Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics. *ZDM* (Zentralblatt für Didacktik der Mathematik), 36, 2, 56-60.

Espinel, M. C.; Antequera, A. (2008). The decision-making as a school activity. In Topic Study Group 19 of ICME: Research and development in problem solving in mathematics education. 11th *International Congress on Mathematical Education*, Monterrey, México. Recuperado el 12 de agosto de 2011, de http://tsg.icme11.org/tsg/show/20

Gravemeijer, K. (2004). Learning Trajectories and Local Instruction Theories as Means of Support for Teachers in Reform Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2). 105-128.

Hernández, E.; Sánchez, M. (2008). ESTALMAT: Un programa para detectar y estimular el talento matemático precoz. Matemáticas especiales para alumnos especiales. *UNIÓN*, 16, 113-122. Recuperado el 12 de agosto de 2011, de http://www.fisem.org/web/union/revistas/16/Union_016_012.pdf

Henning, H.; Keune, M. (2005). Levels of modelling competence. 4th Congress of ERME. Recuperado el 12 de agosto de 2011, de http://cemati.com/math/tematicos/competencias/

Malaespina, U. (2007). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Relime (Revista Latinoamericana de Investigación Matemática), 10*(3), 365-399.

MEC (2006). BOE: 106. Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.

Niss, M. (2004). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish KOM Project.* Recuperado el 12 de agosto de 2011, de http://www7.nationalacademies.org/mseb/Mathematical_Competencies_and_the_Learning_of_Mathematics.pdf

OCDE (2006). *PISA 2006. Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura.* España: Santillana Educación.

Polya, G. (1945). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Poundstone, W. (1995). *El Dilema del Prisionero*. Alianza Editorial. Madrid.

Reyes-Santande, P.; Karg, A. (2009). Una aproximación al trabajo con niños especialmente dotados en matemáticas. Actas del XIII Simposio SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática), 403-414.

Rivera-Marrero, O. (2007). *The Place of Discrete Mathematics in the School Curriculum: An Analysis of Preservice Teachers' Perceptions of the Integration of Discrete Mathematics into Secondary Level Courses.* Dissertation submitted to the faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University. Blacksburg, Virginia. Recuperado el 12 de agosto de 2011, de http://scholar.lib.vt.edu/theses/available/etd-04252007-140123/unrestricted/DM-Dissertation-Olgamary-May2007.pdf

Rosenstein, J. G. ; Franzblau, D. S. ; Robert, F. S. (1997) (Eds). *Discrete Mathematics in the Schools*, DIMACS Series in Discrete Mathematics Computer Science, Volume 36, Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). Recuperado el 12 de agosto de 2011, de http://dimacs.rutgers.edu/Volumes/Vol36.html

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, sense-making in mathematics. En: D. Grouws (Ed.) *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.334-370). New York: Macmillan.

Stillman, G.; Brown, P.; Galbraith, P.; Edward, I. (2007). A Framework for Success in Implementing Mathematical Modelling in the Secondary Classroom. En Watson, J.; Beswick, K. (Eds) *Proceeding of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education* Research Group of Australasia. Vol. 2, 688-697. Australia.

Taylor, A. D. (1995). *Mathematics and politics. Strategy, Voting, Power and Proof*. New York: Springer – Verlag.

Ana Teresa Antequera Guerra, CEO Juan XXIII, Tazacorte. Profesora de Educación Secundaria natural de Santa Cruz de La Palma. Dedica su trabajo de investigación en Didáctica al diseño de material curricular para secundaria sobre contenidos de Teoría de Juegos.