NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 80, julio de 2012, páginas 103-117

Evaluación de conocimientos de profesores en formación sobre el juego equitativo

Nordin Mohamed Maanan (Escuela de Arte. Melilla)
Juan Jesús Ortiz de Haro (Universidad de Granada)

Fecha de recepción: 5 de noviembre de 2011
Fecha de aceptación: 9 de enero de 2012

Resumen El objetivo de este trabajo es evaluar los conocimientos matemático-didácticos, de una muestra de 283 futuros profesores de Educación Primaria en relación a la idea de juego equitativo a través de sus respuestas a una tarea abierta. El conocimiento común del contenido se analiza a través de sus soluciones a un problema, tomado de un libro de texto de primaria. El conocimiento especializado del contenido y el conocimiento del contenido y los estudiantes se infieren a partir del análisis que realizan los participantes, trabajando en pequeños grupos, de los contenidos matemáticos en la tarea y de las respuestas correctas e incorrectas proporcionadas al resolver el problema por alumnos de Educación Primaria. Los resultados sugieren la necesidad de reforzar la formación de los futuros profesores, tanto en el conocimiento matemático como en el conocimiento didáctico.

Palabras clave Conocimiento del profesor, Juego equitativo, Formación de profesores

Abstract The aim of this study is to evaluate teaching mathematical knowledge, a sample of 283 pre-service primary school teachers in relation to the idea of fair game through their answers to an open-problem. Common knowledge of content is assessed through their solutions to a problem, taken from a textbook. Specialized knowledge of content and knowledge of content and students are inferred from the analysis made by participants, working in small groups, of task' mathematical content and the correct and incorrect answers provided by primary school students to solve the problem. Results suggest the need to reinforce the training of of pre-service teachers, both in mathematical knowledge as in didactic knowledge.

Keywords Knowledge of the teacher, Fair game, teacher's training

1. Introducción

En la actualidad se observa un interés en adelantar el estudio de los fenómenos aleatorios y la probabilidad a la Educación Primaria. Por ejemplo, en los Decretos de Enseñanzas Mínimas del Ministerio de Educación en España (MEC, 2006) se incluyen los siguientes contenidos en el primer ciclo de este nivel educativo: "Fenómenos aleatorios y vocabulario relacionado";"descripción y cuantificación de situaciones aleatorias"; "reconocimiento de fenómenos aleatorios en la vida cotidiana"; "planificación y realización de experimentos simples para estudiar el comportamiento de los fenómenos aleatorios". Otros currículos (por ejemplo, NCTM, 2000; SEP, 2006) sugieren transmitir al niño un lenguaje elemental probabilístico mediante juegos, experimentos y observación de fenómenos naturales, para que aprenda a identificar las situaciones aleatorias y llegue al final de la etapa a asignar algunas probabilidades sencillas.

La consecución de estos objetivos requiere, según Stohl (2005), una formación adecuada del futuro profesor de Educación Primaria. Por ejemplo, en España, dicha formación debe garantizar la adquisición de las competencias establecidas por el Ministerio de Educación (MEC, 2007): competencias matemáticas básicas y capacidad para desarrollar y evaluar contenidos del currículo mediante recursos didácticos apropiados y para promover las competencias correspondientes en los estudiantes.

La investigación sobre formación de profesores diferencia entre el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento de contenido pedagógico. Este último sería "la forma particular del conocimiento del contenido que incorpora el aspecto del contenido que guarda más relación con la enseñanza" o bien "esa amalgama especial de contenido y pedagogía que es el campo propio de los profesores, su forma especial de comprensión profesional." (Shulman, 1986, p. 8-9).

Ball, Lubienski & Mewborn (2001) hablan del conocimiento matemático para la enseñanza, que se describe en Hill, Ball & Schilling (2008) como "el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno." (p. 374). Dentro del conocimiento del contenido matemático distinguen entre Conocimiento Común del Contenido (CCC), Conocimiento Especializado del Contenido (CEC), y Conocimiento en el Horizonte Matemático (CHM). Mientras el conocimiento común del contenido es el puesto en juego para resolver problemas matemáticos por cualquier persona, el conocimiento especializado del contenido incluye aspectos que no necesariamente tiene una persona ordinaria, por ejemplo, elegir una secuencia de enseñanza o identificar las ideas matemáticas trabajadas en un problema. El "conocimiento en el horizonte matemático" aporta perspectiva a los profesores para su trabajo, e incluye, por ejemplo, conocimiento de la relación con otras materias, o la historia de las matemáticas.

Para el conocimiento pedagógico del contenido Hill, Ball & Schilling (2008) proponen tener en cuenta el Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (CCE), Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (CCEn), y Conocimiento del Currículo (CC). El Conocimiento del Contenido y los Estudiantes es el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden este contenido particular" (p. 375). Incluye el conocimiento de los errores y dificultades comunes, las concepciones erróneas, las estrategias utilizadas, el ser capaz de valorar la comprensión del alumno y saber cómo evoluciona su razonamiento matemático. Respecto al Conocimiento del Contenido y la Enseñanza resulta de la integración del contenido matemático con el conocimiento de la enseñanza de dicho contenido. Incluye saber construir, a partir del razonamiento de los estudiantes y las estrategias utilizadas por ellos, procesos pertinentes para tratar y corregir sus errores y concepciones erróneas.

Más recientemente, Godino (2009) construye un modelo de niveles y facetas del conocimiento matemático didáctico del profesor que engloba los citados anteriormente y propone, asimismo una guía para la formulación de cuestiones de evaluación de dicho conocimiento. En este trabajo se utiliza la metodología sugerida por el autor que consiste en dos pasos:

1. Elegir una tarea matemática cuya solución ponga en juego los principales aspectos del contenido, o de las competencias a desarrollar;
2. Formular consignas que cubran las distintas (o principales) facetas y niveles de análisis didáctico del modelo propuesto. Para evaluar el conocimiento común del contenido, dicha consigna consistiría en resolver el problema; para evaluar el conocimiento especializado del contenido consistiría en identificar los objetos y procesos matemáticos puestos en juego en la solución; para evaluar el conocimiento del contenido y los estudiantes, una consigna posible

sería describir los razonamientos que los alumnos han desarrollado al resolver la tarea propuesta o los principales conflictos en dicha solución.

La finalidad de este trabajo es evaluar los conocimientos de los futuros profesores de Educación Primaria en relación con la idea de juego equitativo. Más concretamente, se centra en el conocimiento común y especializado del contenido y en el conocimiento del contenido y los estudiantes, utilizando la metodología y tipos de consignas sugeridas para estos conocimientos en Godino (2009). A continuación se presenta, en primer lugar, los antecedentes del trabajo. Seguidamente, se analizan las soluciones dadas por 283 futuros profesores de Educación Primaria a un problema relacionado con la idea de juego equitativo, y posteriormente las evaluaciones que realizan, trabajando en grupo, de las respuestas a dicho problema proporcionadas por alumnos de Educación Primaria. Se finaliza con algunas implicaciones para la formación de profesores.

2. Antecedentes

2.1. Comprensión de la idea de juego equitativo en niños y adolescentes

Los juegos de azar tuvieron gran importancia en el origen de la teoría de probabilidad, y como indica Batanero (2005) son uno de los principales contextos en el que los niños pueden comprender las características de las situaciones aleatorias. Estos juegos forman parte de la cultura del niño fuera de la escuela, y, a través de los mismos, según Peard (1990), los niños adquieren conocimientos probabilísticos incluso antes de una instrucción formal. Por este motivo, varias investigaciones han analizado las concepciones de los niños tienen sobre el juego equitativo.

Watson & Collis (1994) estudian las estrategias que siguen los niños para decidir si un dado es o no sesgado, encontrando que, aproximadamente la mitad de los alumnos creían que algunos números tenían más posibilidad que otros de salir, incluso en dados equitativos. Otros niños mostraron concepciones antropomórficas, pensando que un dado tenía su propio razonamiento o se guiaron por las características físicas de los dados o bien usan la experimentación para decidir la equitatividad de los dados.

Lidster, Watson, Collis & Pereira-Mendoza (1995) analizan la influencia de las experiencias extraescolares en el desarrollo de la idea de equitatividad y su relación con la de probabilidad. Para ello realizaron entrevistas a niños de 12 a 14 años, utilizando juegos de azar, y deduciendo sus concepciones, a partir de la representación, interpretación y predicción que hacen sobre los datos. En Lidster, Watson, Collis & Pereira-Mendoza (1996) describen otros estudios con alumnos de 8 a 14 años en los que se preguntó a los alumnos cuáles, entre una serie de dados, eran o no sesgados. Los autores creen que la noción de equitatividad y sesgo se desarrolla antes del comienzo de la escuela y se preguntan si hay un desajuste entre el aprendizaje previsto por el profesor y el conocimiento construido por el alumno. También cuestionan si la comprensión de la idea de sesgo y equitatividad implica la comprensión previa de la idea de muestreo.

Cañizares, Batanero, Serrano y Ortiz (1999) analizan las concepciones de los niños entre 10 y 14 años. La mayoría de ellos demostraron una adecuada concepción del juego equitativo, aunque hubo una gran variedad en las concepciones de los alumnos, desde los que no diferencian entre sucesos equiprobables y no equiprobables, hasta los que son capaces de resolver correctamente todos los problemas.

La equitatividad de un juego puede establecerse de dos modos: (a) si en cada partida todos los jugadores tienen la misma probabilidad de ganar, y obtienen la misma cantidad en caso de salir premiados; (b) igualando las esperanzas de ganancia, que viene dada por el producto entre el premio otorgado y la probabilidad de ganar de cada jugador, si las probabilidades de los jugadores son diferentes.

Scholttmann & Anderson (1994) estudian las intuiciones de los niños de 5 a 10 años sobre la esperanza matemática, utilizando para ello dos tipos de juegos con un solo jugador: (a) Juegos con un solo premio, donde el niño puede obtener o no un premio en caso de resultar un cierto suceso de un experimento aleatorio; (b) En el juego de dos premios el niño siempre obtiene un premio de diferente valor, según el resultado de un experimento aleatorio. Los autores concluyen que, incluso los niños más jóvenes, tienen una intuición correcta sobre la esperanza matemática, teniendo en cuenta, tanto la probabilidad, como el valor del premio para tomar sus decisiones. Sin embargo, tanto la asignación de probabilidad, como la puesta en relación del premio y la probabilidad de ganar sigue, con frecuencia, estrategias aditivas.

2.2. Formación de profesores para enseñar probabilidad

Ponte (2001) indica que los profesores tienen un papel esencial al interpretar y adaptar el currículo, y por ello hay un gran esfuerzo de investigación sobre formación de profesores (por ejemplo, Llinares & Krainer, 2006; Hill, Sleep, Lewis & Ball, 2007; Wood, 2008). Sin embargo, el caso específico de la formación de profesores para enseñar probabilidad, apenas se ha tenido en cuenta, a pesar de su especificidad.

Por otro lado, algunas investigaciones señalan la existencia de concepciones erróneas y dificultades en relación a la probabilidad en los futuros profesores. Por ejemplo, Azcárate (1995) en un estudio realizado con 57 futuros profesores de Educación Primaria, encontró que muy pocos mostraban una idea clara sobre las características de los fenómenos aleatorios. Los participantes razonaron, en su mayoría, desde presupuestos casuales; tuvieron una fuerte influencia de los aspectos contextuales y minusvaloraron el posible estudio matemático de los fenómenos aleatorios. Se detectó también falta de esquemas combinatorios y ausencia de instrumentos elementales para la asignación de probabilidades, cuantificando las expectativas de ocurrencia de un suceso desde criterios personales. Asimismo, Batanero, Arteaga, Ruiz & Roa (2010) encuentran concepciones incorrectas sobre la aleatoriedad e independencia en un estudio con 215 futuros profesores de Educación Primaria.

Ortiz, Mohamed, Batanero, Serrano & Rodríguez (2006) realizan un estudio con 102 futuros profesores de Educación Primaria proponiendo problemas elementales de comparación de probabilidades. En general, hacen uso de estrategias correctas, multiplicativas y correspondencias, que se corresponde con un buen nivel de razonamiento proporcional, aunque todavía hay un grupo importante que produce errores. Los más frecuentes están relacionados con el sesgo de equiprobabilidad, elementos subjetivos y falta de razonamiento proporcional. Sánchez (2002) y Batanero, Godino & Cañizares (2005) describen el efecto positivo de experiencias de enseñanza basadas en simulación sobre la superación de algunos sesgos en el razonamiento de los profesores. López (2006) analiza la forma en que los profesores diseñan y llevan a cabo unidades didácticas para la enseñanza de la probabilidad, mostrando la gran dificultad de estos profesores al enfrentarse a conceptos nuevos para ellos.

Respecto a la idea de juego equitativo, Azcárate (1995) propone tres ítems basados en el lanzamiento de dos dados, preguntando si sería justo apostar a producto par, suma par y suma 5 o 6. Los participantes mostraron mucha dificultad para diferenciar los juegos equitativos y basan su argumento en la equiprobabilidad de los resultados, reglas aritméticas o argumentación combinatoria. En este trabajo completaremos la investigación de la citada autora, analizando, tanto el conocimiento matemático, como el conocimiento profesional en futuros profesores. A continuación describimos la metodología y los resultados obtenidos.

3. Método

La muestra participante estuvo formada por 283 futuros profesores de la especialidad de Educación Primaria, estudiantes de segundo curso de la Facultad de Educación de la Universidad de Granada, España, que cursaban la asignatura Matemáticas y su Didáctica. Esta materia está estructurada en diferentes bloques de contenido, entre los que incluye uno sobre estadística descriptiva y probabilidad.

Los datos se recogieron en la mencionada asignatura a lo largo de dos sesiones. En la primera se proporcionó a los estudiantes el problema presentado en la figura 1, tomado de un libro de texto de sexto curso de Educación Primaria, pidiéndoles que resolvieran por escrito el apartado 1, con el objeto de evaluar su conocimiento común del contenido matemático. En la segunda sesión, se pidió que resolvieran por escrito el resto de los apartados, trabajando en pequeños grupos de dos o tres alumnos (31 grupos en total).

A continuación presentamos un problema tomado de un libro de texto, junto con algunas soluciones dadas por niños.

1. Resuelve el problema
2. Indica el contenido matemático que tienen que usar los alumnos para dar la respuesta correcta
3. Señala cuál o cuáles de las respuestas dadas por alumnos son correctas
4. Para cada una de las respuestas incorrectas señala las posibles intuiciones o estrategias incorrectas que han llevado a los estudiantes a dar una respuesta errónea

Problema: Carmen y Daniel han inventado un juego de dados con las siguientes reglas:

- Lanzan dos dados y calculan la diferencia de puntos entre el mayor y el menor.
- Si resulta una diferencia de 0, 1 o 2, entonces Carmen gana 1 ficha.
- Si resulta 3, 4, o 5 es Daniel quien gana una ficha.

¿Te parece que este juego es equitativo? ¿Por qué?

Respuestas de los niños:
Ana. "Es equitativo, pues cada uno tiene tres oportunidades de ganar"
Beatriz. "No es equitativo pues Carmen tiene doble oportunidad de ganar que Luis"
Carlos. "Para que fuese equitativo, la diferencia 0 tendría que salir el mismo número de veces que la 3. Pero la diferencia 0 sale 6 veces y la 3 solo 3 veces".

Figura 1. Cuestionario

El apartado 2 pide analizar el contenido matemático necesario para resolver el problema. De acuerdo con Godino (2009), este tipo de pregunta lleva a pensar de manera sistemática en los diferentes procedimientos posibles de resolución, modalidades de expresión, conceptos y propiedades que se ponen en juego en su formulación, así como sobre maneras de argumentar o justificar los procedimientos y por tanto evalúa el conocimiento especializado del contenido. En el apartado 3 se debe decidir, entre una serie de respuestas dadas por niños al problema, cuáles de ellas son correctas o incorrectas, y en el 4 indicar las posibles intuiciones o estrategias incorrectas que han llevado a los estudiantes a dar una respuesta errónea evaluando por tanto, el conocimiento del contenido matemático y los estudiantes.

En el apartado 1, la respuesta correcta es que el juego no es equitativo, pues Carmen gana a la larga 24 veces de cada 36, es decir 2/3 de las veces, mientras Daniel gana 1/3. Una posible ayuda que pueden usar los alumnos de Educación Primaria o los futuros profesores para resolver el problema es preparar un recuento de todos los casos posibles en el experimento (espacio muestral), clasificándolos según el valor de la diferencia entre el valor mayor y menor de los puntos (Figura 2). En esta figura se presenta la distribución de probabilidad de la variable aleatoria (diferencia) implícita en el juego. No esperamos que los futuros profesores reconozcan la variable aleatoria, pues no la han estudiado, pero si que preparen un esquema similar al de la figura 2. Por recuento simple de los casos y aplicando la regla de la suma de probabilidades, se deduce fácilmente la solución. Los alumnos tienen que movilizar una idea elemental de juego equitativo, como juego que concede a los dos jugadores la misma probabilidad.

Diferencia	Casos posibles	Número de casos	Probabilidad	Gana
0	11,22,33,44,55,66	6	6/36	Carmen
1	12,21,23,32,34,43,45,54,56.65	10	10/36	Carmen
2	13,24,31,35,42,46,53,64	8	8/36	Carmen
3	14,25,36,41,52,63	6	6/36	Daniel
4	15,26,51,62	4	4/36	Daniel
5	16,61	2	2/36	Daniel
Total		36		

Figura 2. Esquema solución

En el apartado 2, se espera que los futuros profesores identifiquen algunos contenidos matemáticos presentes en el problema como: experimento aleatorio, suceso, espacio muestral, casos favorables y posibles, idea intuitiva de convergencia, equitatividad, variable, valor esperado, razonamiento combinatorio elemental (para deducir todos los casos).

En el apartado 3, la respuesta correcta es la que proporciona Beatriz, que considera que el juego no es equitativo porque “Carmen tiene doble oportunidad de ganar que Luis”, tal como hemos visto en la solución previa del mismo. Las respuestas incorrectas son las de Ana y Carlos. En el primer caso, Ana considera que al tener cada uno de los jugadores tres opciones el juego es equitativo, pero no tiene en cuenta la probabilidad de cada uno de los sucesos. La respuesta de Carlos también es incorrecta ya que la diferencia 0 se obtiene 6 veces pero la diferencia 3 también se obtiene 6 veces como podemos observar en la solución presentada anteriormente. El error de Carlos ocurre al no tener en cuenta el orden de los dados, considerando, por ejemplo, indiferentes las soluciones 14 y 41, que está relacionado con la falta de capacidad combinatoria descrita en Azcárate (1995).

En el apartado 4, las posibles dificultades que pueden tener los alumnos son no comprender bien la idea de juego equitativo, no concebir la convergencia a la larga, interpretar la pregunta en forma no probabilística, fijándose únicamente en el resultado del experimento, manifestando el “*Outcome approach*” descrito por Konold (1989; 1995). También se puede manifestar sesgos como el de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992) o tener fallos en la idea de esperanza matemática o en el razonamiento combinatorio. A continuación presentamos los resultados.

4. Conocimiento común del contenido

En este apartado se analizan las respuestas de los futuros profesores a la pregunta de si el juego era equitativo, y también los argumentos para justificarlas. Mediante un análisis de contenido de las mismas, se han obtenido las siguientes categorías:

4.1. Respuestas correctas o parcialmente correctas

R1. Respuesta correcta. Estudiantes que indican que el juego no es equitativo calculando correctamente la probabilidad de cada jugador. Solo tres participantes del estudio fueron capaces de enumerar el espacio muestral mediante un esquema similar al de la figura 2 y, a partir de él, calcular correctamente la probabilidad de cada jugador. Una vez calculada, indican que el juego no es equitativo porque Carmen tiene el doble de posibilidades realizando el cálculo de probabilidades correctamente, es decir, identifica correctamente el número de casos posibles y favorables. Un ejemplo (alumno 254) que resuelve el cálculo de probabilidades ayudándose de una tabla para realizar el cálculo se muestra en la Figura 3.

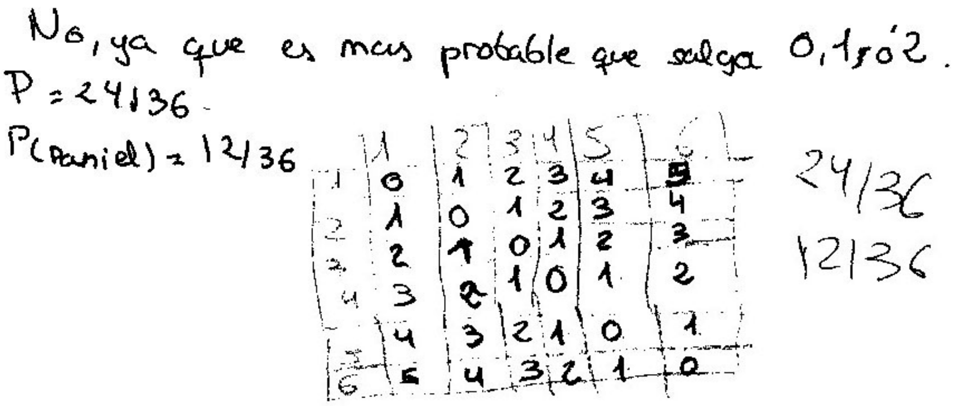

Figura 3. Ejemplo de respuesta categoría R1

Hemos considerado como respuestas parcialmente correctas las de aquellos estudiantes que indican que el juego no es equitativo porque Carmen tiene más posibilidades, pero no llegan a calcular correctamente las posibilidades de cada jugador. Presentamos a continuación las cinco categorías obtenidas:

R2. Estudiantes que indican que el juego no es equitativo, porque Carmen tiene más posibilidades sin cálculo de probabilidades. Un ejemplo es el alumno 216, que afirma que "*No (es equitativo), porque Carmen tiene más posibilidades de ganar una ficha*".

R3. Estudiantes que indican que el juego no es equitativo, ya que Carmen tiene más probabilidades pero, aunque identifican los casos posibles, tienen error en los cálculos. Un ejemplo (alumno 28) se presenta en la Figura 4. El alumno ha utilizado el diagrama del árbol para enumerar el espacio muestral, pero su falta de capacidad combinatoria le hace llegar a una enumeración incompleta. Por otro lado, la solución aportada es también incorrecta porque la suma de dos sucesos complementarios no es igual a la unidad, hecho que el alumno no percibe.

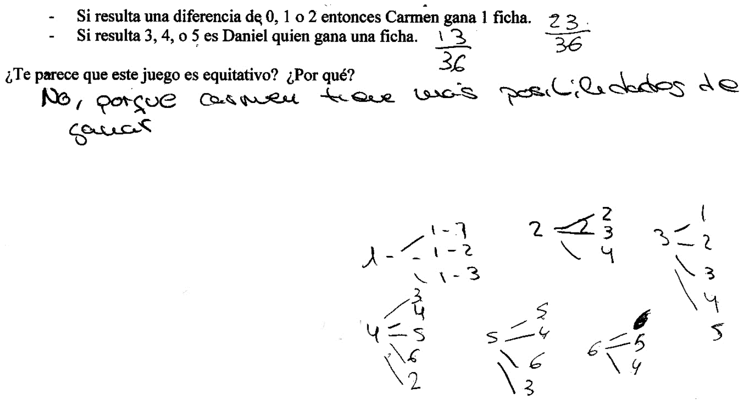

Figura 4. Ejemplo de respuesta categoría R3

R4. Estudiantes que indican que el juego no es equitativo, ya que Carmen tiene más probabilidades y cometen un error de orden al identifican los casos posibles. En la Figura 5 mostramos un ejemplo (alumno 265) que considera que las diferencias 0, 1 y 2 con las que juega Carmen se obtendrían 15 veces mientras que las diferencias 3, 4 y 5 se obtendrían 6 veces.

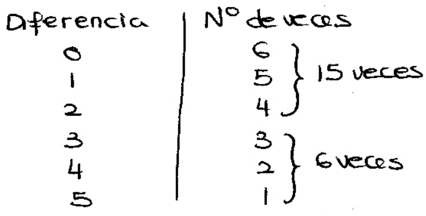

Figura 5. Ejemplo de respuesta categoría R4

R5. Estudiantes que contestan que el juego no es equitativo e indican que Carmen gana a la larga. Se observa una percepción de la convergencia, pero el estudiante no llega a cuantificar las posibilidades de cada jugador. Un ejemplo (alumno 141) es el siguiente: "*No (es equitativo), Carmen tiene ventaja a la larga*".

R6. Estudiantes que indican que el juego no es equitativo pero no justifican la respuesta. Dentro de ella hemos considerado los alumnos que consideran que el juego no es equitativo pero que no explican su respuesta.

4.2. Respuestas incorrectas

El resto de las respuestas son incorrectas, pues el alumno, o bien indica que el juego es equitativo o bien considera que el juego no es equitativo pero manifiesta una incorrecta percepción de la independencia o da otro tipo de respuestas. Presentamos a continuación las cinco categorías obtenidas:

R7. Estudiantes que indican que el juego es equitativo, mostrando el sesgo de equiprobabilidad. Son los estudiantes que sólo tienen en cuenta los valores de las diferencias (0, 1,2) frente a (4, 5 6), asignando a cada una de las diferencias igual probabilidad. Muestran, en consecuencia el sesgo descrito por Lecoutre (1992). Un ejemplo es el alumno 166 que afirma que "*Si (es equitativo), porque los dos tienen las mismas posibilidades de que salgan esas diferencias*".

R8. Estudiantes que indican que el juego es equitativo basándose en que el juego es aleatorio. Un ejemplo es el alumno 65 que afirma que "*Si (es equitativo), porque los números que salgan en los dados salen a suerte, por lo que la diferencia entre ellos también*".

R9. Estudiantes que indican que el juego no es equitativo, mostrando incorrecta percepción de la independencia. Dentro de ella hemos encontrado alumnos que aplican la falacia del jugador, indicando que Carmen tiene menos posibilidades puesto que es muy difícil que la diferencia sea 0 por la repetición del mismo número en los dos dados. Un ejemplo es el alumno 183 que responde que "*No (es equitativo), porque hay menos posibilidades de sacar una diferencia de 0, es decir que los dos dados saquen el mismo número*".

R10. Estudiantes que indican que el juego es equitativo. Dentro de ella hemos considerado los alumnos que indican que el juego es equitativo y no justifican su respuesta.

R11. Estudiantes que dan otro tipo de respuestas. Un ejemplo es el alumno 131 que responde "No es equitativo porque tiene los resultados consecutivos tendrían que repartirse los números para que lo fuera". Otro ejemplo es el alumno 103 que responde "*Sí (es equitativo), porque los dos lanzan a la vez los dados*".

Una vez categorizadas las respuestas de los futuros profesores, obtuvimos las frecuencias de cada una de ellas, que se presentan en la tabla 1.

Respuesta	**Correctas/parc. correctas**	**Incorrectas**		**No contesta**
	Juego no equitativo	**Juego equitativo**	**Juego no equitativo**	
R1. Respuesta correcta	3			
R2. Sin cálculo de probabilidades	50			
R3. Identifican casos posibles, error en cálculos	18			
R4. Cometen error al identificar casos posibles	27			
R5. Carmen gana a la larga	4			
R6. No justifican respuesta	3			
R7. Sesgo equiprobabilidad		87		
R8. El juego es aleatorio		5		
R9. Incorrecta percepción independencia			13	
R10. No justifican su respuesta		2		
R11. Otras respuestas		3	10	
Total	105	97	23	58

Tabla 1. Frecuencia de respuestas correctas o parcialmente correctas e incorrectas

En ella, observamos que han respondido correctamente que el juego no es equitativo, categoría R1, solo 3 futuros profesores (1 %). De forma parcialmente correcta han contestado 102 futuros profesores (36 %), que indican que el juego no es equitativo porque Carmen tiene más posibilidades, pero no justifican su respuesta o cometen algún error, que se distribuyen entre las cinco categorías descritas anteriormente: R2, con 50 futuros profesores que no realizan ningún cálculo para justificar su respuesta; R3, con 18 futuros profesores que cometen algún error en los cálculos; R4, con 27 futuros profesores que cometen un error al identificar los casos posibles; R5, con 4 futuros profesores, que aunque manifiestan cierta percepción de la convergencia, no llegan a cuantificar las posibilidades de cada jugador y por último la categoría R6, con 3 futuros profesores, que no justifican la respuesta.

De forma incorrecta han contestado 120 futuros profesores (42.4 %), de los que 97 responden que el juego es equitativo y 23 que aunque consideran que el juego no es equitativo, sus justificaciones son incorrectas. Entre los que responden que el juego es equitativo hay cuatro categorías de las descritas anteriormente: R7, con 87 futuros profesores que manifiestan el sesgo de equiprobabilidad descrito por Lecoutre (1992); R8, con 5 futuros profesores que basan su afirmación en que se trata de un juego aleatorio; R10, con 2 futuros profesores que no aportan ninguna justificación y R11, con 3 futuros profesores que dan otro tipo de respuestas. Entre los que responden que el juego no es equitativo encontramos dos categorías de las descritas con anterioridad: R9, con 13 futuros profesores que manifiestan una incorrecta percepción de la independencia y R11, con 10 futuros profesores que dan otro tipo de respuestas.

En la tabla 2 se presentan los resultados sobre percepción de la equitatividad del juego. Observamos que menos de la mitad de los futuros profesores proporcionan una respuesta correcta (41.7 %), indicando que el juego no era equitativo. Entre las respuestas incorrectas destacan las que indican que el juego es equitativo (33.2 %), seguidas de los que aportan otro tipo de respuestas (4.6 %). Entre éstos últimos, unos contestan que el juego es equitativo y otros que no es equitativo, pero la justificación es totalmente incorrecta, como el alumno 192 que responde "*Sí (es equitativo), es difícil sacar siempre lo mismo o los mismos números. Los dos tienen una serie de números difícil de sacar*".

	Frecuencia	**%**
No es equitativo	118	41.7
Si es equitativo	94	33.2
Otro tipo de respuestas	13	4.6
No contesta	58	20.5
Total	283	100

Tabla 2. Frecuencia y porcentajes de respuestas de los futuros profesores

5. Conocimiento especializado del contenido

Como hemos indicado, en la segunda sesión los futuros profesores trabajaron en pequeños grupos para resolver el resto de las cuestiones. A continuación, analizamos los resultados en el segundo apartado en que preguntamos por los conocimientos puestos en juego en la solución.

5.1. Análisis de las respuestas al apartado 2

En la tabla 3, observamos que el contenido matemático mejor identificado por los futuros profesores como necesario para resolver el problema fue el concepto de probabilidad (11 grupos). El azar y la aleatoriedad son citados por pocos grupos (6 grupos), siendo también escasa la mención del razonamiento combinatorio o razonamiento lógico (6 grupos), estadística (5 grupos) o estimación de frecuencias de probabilidad o de frecuencia relativa (4 grupos). Dos grupos en cada caso hicieron referencia a experimentación, posibilidades, fracciones y operaciones numéricas. Por último, citados por un solo grupo aparecen los conceptos de equidad y tabla. No se identifica el espacio muestral, o sucesos, casos favorables o posibles, idea de juego equitativo, valor esperado o razón, por lo que consideramos que el conocimiento especializado del contenido mostrado por los futuros profesores sería, en consecuencia, muy escaso.

	Objetos identificados	Frecuencia
Correctamente	Azar/aleatoriedad	6
	Experimento aleatorio	2
	Posibilidades	2
	Probabilidad	11
	Razonamiento combinatorio/ lógico	6
	Fracciones	2
	Juego equitativo	1
	Operaciones numéricas	2
	Tablas	1
Incorrectamente	Estadística/Gráfico estadístico	5
	Estimación frecuencial probabilidad/f.rel(1)	4
	No utiliza conocimiento matemático	1

Tabla 3. Contenidos matemáticos identificados por grupos de futuros profesores (n =31)

Sin embargo, si consideran necesarios para la resolución de este problema conceptos o gráficos estadísticos así como la utilización del enfoque frecuencial de la probabilidad que no son pertinentes.

6. Conocimiento del contenido y de los estudiantes

En los apartados tercero y cuarto se pide a los futuros profesores evaluar las respuestas de estudiantes de Educación Primaria e indicar las causas de sus dificultades. A continuación analizamos los resultados.

6.1. Análisis de las respuestas al apartado 3

En la tabla 4 observamos que ha habido cierta dificultad a la hora de discriminar las respuestas correctas e incorrectas al problema. Así, la respuesta correcta dada por Beatriz de que el juego "No es equitativo pues Carmen tiene doble oportunidad de ganar que Luis" ha sido identificada como tal solo por 14 grupos de futuros profesores frente a 17 grupos que consideraron que dicha respuesta es incorrecta. Otro caso difícil de discriminar fue la respuesta incorrecta del alumno Carlos de que "*Para que fuese justo (el juego) la diferencia 0 tendría que salir el mismo número de veces que la 3. Pero la diferencia 0 sale 6 veces y la 3 solo 3 veces*", ya que aunque 17 grupos la consideran efectivamente incorrecta hay 14 grupos que indican que es correcta. El caso más sencillo de discriminar ha sido la respuesta dada por Ana de que "*(el juego) Es equitativo, pues cada uno tiene tres oportunidades de ganar*" ya que 27 grupos la identificaron como incorrecta y tan solo 4 grupos consideran que es correcta. Entre los participantes hay tres grupos que consideran que hay dos respuestas correctas, que son las dadas por Beatriz y Carlos. Y diez grupos que consideran incorrecta la respuesta correcta de Beatriz, ya que aunque están de acuerdo en que el juego no es equitativo, consideran que la justificación de Beatriz no es adecuada y eligen como respuesta correcta la aportada por Carlos.

	Correcta	Incorrecta
Ana	4	27
Beatriz	14	17
Carlos	14	17

Tabla 4. Frecuencia de respuestas consideradas correctas por los grupos de futuros profesores (n = 31)

Pocos grupos detectan las causas de los razonamientos erróneos (tabla 5). En el caso de la respuesta incorrecta de Ana, las estrategias erróneas que consisten en considerar todos los resultados equiprobables (sesgo de equiprobabilidad) y en la incorrecta estimación de los casos posibles han sido reconocidas por 6 grupos de futuros profesores cada una de ellas, seguida de la de no comprender bien la idea de juego equitativo (3 grupos). Solo dos grupos han reconocido las estrategias de considerar los números en lugar de diferencias y la justificación de que el alumno no comprende el problema. En el caso de la respuesta incorrecta de Carlos, la estrategia errónea más reconocida ha sido considerar que el alumno falla en la estimación de casos posibles (4 grupos), seguida de la estrategia de centrarse solo en la diferencia cero (2 grupos). Menos reconocidas han sido las estrategias de considerar que el alumno no comprende bien la idea de juego equitativo y la justificación de que el alumno no comprende el problema.

Explicación dada al error del alumno ficticio	Ana	Carlos
El alumno manifiesta el sesgo de equiprobabilidad	6	
El alumno falla en la estimación de casos posibles	6	4
El alumno no comprende bien la idea de juego equitativo	3	1
El alumno ha considerado números en lugar de diferencias	2	
El alumno no comprende/no lee el problema	2	1
El alumno se centra solo en la diferencia cero		2
No saben explicar la causa del error	6	8

Tabla 5. Identificación de dificultades por los grupos de futuros profesores en las respuestas erróneas de los niños (n = 31)

En ambos casos destaca el importante número de grupos que no explica la causa del error cometido por el alumno.

7. Discusión y conclusiones

Los resultados del estudio muestran que la mayoría de los futuros profesores de Educación Primaria tienen un escaso conocimiento común del contenido, pues no reconocen ni aplican correctamente la idea de juego justo o equitativo para resolver el problema. Entre los participantes que han respondido de forma incorrecta, el error identificado con más frecuencia ha sido el sesgo de equiprobabilidad, que coincide con los resultados obtenidos en investigaciones previas con futuros profesores, aunque en un caso resolviendo problemas de comparación de probabilidades (Ortiz et al., 2006) y en otro trabajando mediante proyectos estadísticos (Batanero et al., 2010). Otros errores encontrados han sido la realización incorrecta de los cálculos de la probabilidad, el sesgo conocido como la falacia del jugador y los que han basado su respuesta en que el juego es aleatorio. Se ha detectado también falta de capacidad combinatoria, que les ha impedido, a pesar de ayudarse con el diagrama del árbol, realizar una enumeración completa del espacio muestral, que confirma los resultados de la investigación de Azcárate (1995). Un alto porcentaje de los futuros profesores manifiesta una incorrecta percepción de la equitatividad del juego, como en la investigación de Azcárate (1995), pero en una proporción muy superior. Destaca también el hecho de que casi la cuarta parte de los futuros profesores no contesta el problema.

El conocimiento especializado del contenido mostrado por estos futuros profesores al identificar los contenidos matemáticos en la tarea propuesta fue claramente insuficiente, ya que solamente algunos grupos reconocen los conceptos de probabilidad y de aleatoriedad como contenidos matemáticos necesarios para resolver el problema, y fallan en el reconocimiento de otros conceptos matemáticos fundamentales como espacio muestral, sucesos, casos favorables o posibles, idea de juego equitativo, valor esperado o razón. Esto es un motivo de preocupación, pues muchas de las actividades que realiza el profesor, tales como "indagar lo que los estudiantes conocen, elegir y manejar representaciones de las ideas matemáticas, seleccionar y modificar los libros de texto, decidir entre modos posibles de acción" (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001, p. 453) dependen de su razonamiento y pensamiento matemático. Como consecuencia, las creencias, el conocimiento del contenido didáctico y las decisiones instruccionales dependen del conocimiento especializado que el profesor tiene sobre el contenido estadístico, que en nuestra investigación es muy insuficiente. En este sentido, nuestros datos apoyan las conclusiones de Chick y Pierce (2008), quienes indican que algunos profesores no son capaces de identificar los conceptos latentes en una situación didáctica, y, en consecuencia, por este motivo podrían fallar en conseguir que los estudiantes aprendan dichos contenidos.

En relación con el conocimiento del contenido y los estudiantes, menos de la mitad de los grupos de futuros profesores acertó que la respuesta correcta era la aportada por la alumna Beatriz y casi la mitad considera que es correcta la respuesta errónea de Carlos. Fue mucho menor el conocimiento mostrado de las posibles razones de los errores en las respuestas de los alumnos, posiblemente porque los futuros profesores carecen de habilidad para explicar los errores de los estudiantes y desconocen los resultados de las investigaciones sobre didáctica de la probabilidad, que habría que transmitirles, mediante una adecuada transposición didáctica previa.

Nuestros resultados apuntan la necesidad de reforzar la formación de los futuros profesores de Educación Primaria, tanto en su conocimiento matemático, como en el conocimiento pedagógico del contenido (en sus diversas vertientes). Como consecuencia, el formador de profesores debe tener en cuenta estos diversos tipos de conocimiento, al abordar la formación de profesores para enseñar probabilidad. Es importante también considerar la metodología para llevar a cabo esta formación, proponiendo a los futuros profesores una muestra de situaciones experimentales y contextualizadas, que sean representativas del juego equitativo, y preparándolos en la componente didáctica, con ayuda de situaciones relacionadas con la docencia. Las nuevas tecnologías y los foros de discusión, según Viseo & Ponte (2009), pueden ser también un vehículo formativo que permita a los profesores intercambiar experiencias y ganar conocimiento de la práctica educativa. Resaltamos también la necesidad de continuar la investigación sobre otros componentes del conocimiento del profesor en el campo de la probabilidad, como paso necesario para mejorar la formación de los profesores.

Agradecimientos

Proyecto EDU2010-14947 (MICINN y FEDER) y Grupo FQM-126, Junta de Andalucía.

Bibliografía

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Cádiz, Cádiz.

Ball, D. L., Lubienski, S. T. & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En Richardson, V. (Ed.), *Handbook of Research on Teaching*, 433-456. American Educational Research Association: Washington, DC.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 3, 247-263.

Batanero, C., Arteaga, P., Ruiz, B. & Roa, R. (2010). Assessing pre-service teachers conceptions of randomness through project work. En Reading, C. (Ed.), *Proceedings of the Eight International Conference on Teaching Statistics*. International Association for Statistical Education: Lubjana.

Batanero, C., Godino, J. D. & Cañizares, M. J. (2005) Simulation as a tool to train Pre-service School Teachers. En Addler, J. (Ed.), *Proceedings of ICMI First African Regional Conference*. CD ROM. International Commission on Mathematical Instruction: Johannesburgo.

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. & Ortiz, J. J. (1999). Comprensión de la idea de juego equitativo en los niños. *Números*, 37, 37-55.

Chick, H. L. & Pierce, R. U. (2008). Teaching statistics at the primary school level: beliefs, affordances, and pedagogical content knowledge. En Batanero, C., Burrill, G., Reading, C. & Rossman, A. (2008). *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI and IASE. On line: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN*, 20, 13-31.

Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M. & Ball, D. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge. En Lester, F. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111-155). Information Age Publishing y NCTM: Greenwich, CT.

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, 6, 59-98.

Konold, C. (1995). Issues in assessing conceptual understanding in probability and statistics. *Journal of Statistics Education*, [En línea], 3(1). Recuperado el 12 de julio de 2011, de www.amstat.org/publications/jse/v3n1/konold.html.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557-568.

Lidster, S. T., Pereira-Mendoza, L., Watson, J. M. & Collis, K .F. (1995). What is fair for grade 6?. Comunicación presentada en la *Annual Conference of the Australian Association for Research in Education*, Hobart, Tasmania.

Lidster, S. T., Watson, J. M., Collis, K. F. & Pereira-Mendoza, L. (1996). The relationship of the concept of fair to the construction of probabilistic understanding. En Clarkson, P. C. (Ed.), *Technology in Mathematics Education, Proceedings of the Nineteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Melbourne*, 352-359. Sydney: MERGA.

LLinares S. & Krainer K. (2006). Mathematics student teachers and teacher educators as learners. En Gutierrez, A. & Boero, P. (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, 429 – 459. Sense Publichers: Rotherdam/Taipei

López, C. (2006). Stochastics and the professional knowledge of teachers. En Rossman, A. y Chance, B. (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. International Statistical Institute. CD ROM: Salvador (Bahía) Brasil

MEC (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. Madrid: *Boletín Oficial del Estado*, nº 293.

MEC (2007). Resolución de 17 de diciembre de 2007, de la Secretaría de Estado de Universidades e Investigación, por la que se publica el Acuerdo de Consejo de Ministros de 14 de diciembre de 2007, por el que se establecen las condiciones a las que deberán adecuarse los planes de estudios conducentes a la obtención de títulos que habiliten para el ejercicio de la profesión regulada de Maestro en Educación Primaria. Madrid: *Boletín Oficial del Estado*, nº 305.

N. C. T. M. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: VA, NCTM.

Ortiz, J. J., Mohamed, N., Batanero, C.; Serrano, L. & Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en profesores en formación. En Bolea, P., González, M. J. y Moreno, M. (Eds,), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 268-276. SEIEM: Huesca. ISBN: 84-8127-156-X

Peard, R. (1990). Gambling and ethnomathematics in Australia. En Booker, G., Cobb, P. & Mendicutti, T. (Eds). *Proceedings of the XIV PME Conference*, V.2, 335-342. Program Commitee : México.

Ponte, J. P. (2001). Investigating in mathematics and in learning to teach mathematics. En Cooney, T. J. y Lin, F. L. (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education*, 53-72. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, Netherlands.

Sánchez, E. (2002). Teachers beliefs about usefulness of simulations with the educational software Fathom for developing probability concepts in statistics classroom. En Phillips, B. (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics* (CD-ROM). International Statistical Institute: Hawthorn, VIC.

Schlottmann, A. & Anderson, N. H. (1994). Children's judgements of expected value. *Developmental Psychology*, 30 (1), 56-66.

SEP (2006). *Programa de estudio, educación secundaria*. Dirección General de Desarrollo Curricular de la Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública: México.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En Jones, G. (Ed.), *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning*. Kluwer: Dordrecht.

Shulman (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14;

Viseu F. & Ponte, J. P. (2009). Desenvolvimento do conhecimento didáctico do futuro professor de Matemática com apoio das TIC´s. *Relime*, 9 (3), 383-413.

Watson, J. & ColIis, K. F. (1994). Multimodal functioning in understandi chance and data concepts. En Ponte, J. P. & Matos, J. P. (Eds), *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, V4, 369-376. Universidad de Lisboa.

Wood, T. (2008). *The international handbook of mathematics teacher education*. Sense Publishers: Rotterdam.

Nordin Mohamed Maanan, Licenciado en Informática por la Universidad de Granada. Diploma de Estudios Avanzados por la Universidad de Granada. Actualmente es profesor de Diseño Informático en la Escuela de Arte "Miguel Marmolejo" de Melilla. Ha realizado numerosas publicaciones nacionales e internacionales sobre probabilidad y estadística.

Juan Jesús Ortiz de Haro, Licenciado y Doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada. Actualmente es profesor Titular de Didáctica de la Matemática de la Facultad de Educación y Humanidades (Universidad de Granada), en Melilla. Ha realizado numerosas publicaciones en revistas nacionales e internacionales sobre probabilidad y estadística.