

De nietos y aves (Problemas Comentados XXXI)

José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz (Club Matemático¹)

Resumen	Soluciones a los Problemas de los abuelos, Estudio de las respuestas a uno de los problemas planteados en el Torneo de Matemáticas para 2º de la ESO de la Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas. Actividad de resolución de problemas en una clase de 6º de Primaria.
Palabras clave	Resolución de problemas. Olimpiadas y torneos de matemáticas. Descripción de actividades en el aula.

Abstract	Solutions to the Problems of the grandparents, study of responses to one of the problems in the Math Tournament 2 of the ESO Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas. Problem-solving activity in a class of Primary 6.
Keywords	Troubleshooting. Math Olympiads and tournaments. Description of activities in the classroom.

1. Introducción

Los duendes de la imprenta no han desaparecido en la era digital. Simplemente han cambiado de campo. Nuestro artículo anterior hacía el número treinta de los escritos por nosotros en la sección y queríamos darnos un homenaje. Por ello debería titularse **El aniversario de los abuelos**; también esa era la razón de proponer una serie de problemas de abuelos y nietos. Pero apareció bajo un título diferente, incluso ya utilizado en uno anterior. ¡Qué le vamos a hacer!

De los cuatro problemas de la caprichosa abuelada, éstas son las soluciones de tres de ellos:

¿Cuándo naciste abuelo?

- Abuelo, ¿en qué año naciste?
- Verás Mario, si restas 899 al año en el que nací, resulta un número que para dividirlo entre 7 sólo debes tachar la cifra de las centenas.
- ¡Ah!, déjame pensar un poco.., ¡Ya lo sé! Naciste en...

¹ El Club Matemático está formado por los profesores José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz, jubilados del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna) y del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife), respectivamente. jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com



Solución

Si el número buscado, después de restarle 899, es $abcd$, el resultado de dividirlo entre 7, de acuerdo con lo que indica el abuelo, es acd .

Tenemos que:

$$(100a + 10c + d) \cdot 7 = 1000a + 100b + 10c + d$$

$$\text{Que reducida se queda en } 10c + d = 50a + 50b/3$$

Como todas las incógnitas son dígitos, es evidente que b ha de ser cero, con lo que la ecuación queda:

$$10c + d = 50a$$

y entonces: $c = 5$, $d = 0$ y $a = 1$, y así, $150 \cdot 7 = 1050$, y sumando 899:

1949 es el año de nacimiento del abuelo.

Los cromos del abuelo

- ¡Pablo y Lucía!, vengan un momento que les voy a regalar unas estampas (cromos) de futbolistas, antiguas, que encontré entre mis libros.
- Gracias abuelo –dijo Lucía-. Hay 65, ¿la mitad para cada uno?
- No, como tú eres la mayor, los van a dividir en una proporción de un medio para ti y un tercio para Pablo. Además, no vamos a partir una estampa por la mitad.
- Pero abuelo, un tercio más un medio no suman la unidad -comentó Pablo, que ya sumaba fracciones-.
- He dicho en la proporción ...

Solución

La relación $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$ es lo mismo que la relación 3 a 2 puesto que reduciendo a un denominador común tendríamos $\frac{3}{6}$ y $\frac{2}{6}$.

Dividiendo entonces 65 entre 5, a Lucía le corresponden 3 partes y a Pablo 2.

Por tanto, la solución es 39 y 26.

Lucía recibe 39 estampas y Pablo 26.

¡Caramelos para las abuelas!

Mientras las abuelas tomaban un café sentadas en el bar del parque, los abuelos fueron con los cuatro nietos a comprar caramelos al quiosco. Como hacían casi siempre, aprovecharon para practicar el cálculo.

- Vamos a repartir los caramelos que hemos comprado por edades. Del total, un tercio será para Lucía, un cuarto para Mario, un quinto para Pablo y un sexto para Andrea. Esto nos deja justo seis caramelos que llevar a las abuelas.

¿Cuántos caramelos había en total?

Solución

Si es x el número total de caramelos, los niños recibieron:

$$\frac{x}{3} + \frac{7}{4} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} = \frac{20x + 15x + 12x + 10x}{60} = \frac{57x}{60}$$

Así que sobran $x - \frac{57x}{60} = \frac{3x}{60}$, y como le llevan 6 caramelos a las abuelas:

$$\frac{3x}{60} = 6, \rightarrow x = 120$$

Había un total de 120 caramelos.

En lo que se refiere al cuarto problema decir que lo propusimos para el Torneo de Secundaria de la Sociedad “Isaac Newton”, se aceptó y ahora pasaremos a comentar lo que hicieron los alumnos que se presentaron a la prueba. Decía así:

La nieta se lía con los múltiplos

- Abuelo, con las edades pasan cosas extrañas –dijo Andrea un día medio en serio medio en broma-. Según Mario se hace mayor, yo me hago más joven.
- Eso es absurdo. ¿Cómo se te ocurre?, dijo el abuelo mientras sonreía.
- Fíjate abuelo –explicó la nieta-. Hace dos años yo triplicaba la edad de Mario, pero dentro de dos años tendré sólo el doble.

¿Qué edad tiene Andrea?

Se inscribieron 435 alumnos, de los cuales se presentaron finalmente 309.

El problema se puntuó de 0 a 10. Hubo un total de 101 calificaciones positivas, lo cual nos indica que un tercio de los alumnos fueron capaces de atacar el problema y resolverlo en distintas gradaciones. Diríamos que 9 alumnos alcanzaron una puntuación **sobresaliente** y otros 19 una puntuación de **notable**. No está nada mal. El resto (73 alumnos) alcanzaron una puntuación de **aprobado**.



Del resto, decir que unos 16 lo intentaron pero no llegaron a buen puerto. Lo peor es que 177 alumnos no fueron capaces de resolver o ni siquiera intentar la resolución de este problema.

Las maneras de resolver el problema fueron muy variadas. La mayoría lo resuelve por ensayo y error. Así lo hacen 96 alumnos. Pero no todos lo afrontan de igual manera. Unos son exhaustivos y van probando ordenadamente, otros utilizan el razonamiento para encontrar el acierto de una forma más rápida. Muchos sólo escriben un único tanteo, que es el correcto. Posiblemente han hecho varios intentos mentales y no los han presentado por escrito. Hay uno que se inventa (¿!) el resultado y no da más detalles de cómo lo ha encontrado. Algunos usan razonamientos de múltiplos. Incluso hay quien utiliza algoritmos de máquinas numéricas para el tanteo.

Esto es interesante, porque indica que la mayoría de los alumnos entienden que lo importante es buscar el resultado y que, para ello, disponen de distintas estrategias de pensamiento, independientes de los conocimientos matemáticos disponibles.

Pero varios organizan la información utilizando el álgebra. Doce alumnos utilizan sistema de ecuaciones y cinco lo realizan planteando una sola ecuación.

Uno de estos chicos utiliza una solución que nosotros hemos considerado muy creativa por lo poco habitual que es la identificación de variables que hace.

Niños	Hoy	Dentro de 4 años	Relación
Andrea	3x	2y	$3x + 4 = 2y$
Mario	x	y	$x + 4 = y$

Resuelto el sistema de las dos ecuaciones de la relación, obtiene las siguientes soluciones:

$$x = 4 \qquad y = 8$$

Y obtiene la respuesta, razonando así

$$4 + 2 = 6 \qquad \rightarrow \qquad 3 \cdot 4 + 2 = 14$$

(obsérvese lo poco natural de este razonamiento, pero lo coherente que es con su punto de partida)

Respuesta: **Andrea tiene 14 años.**

Los chicos y chicas de estas edades son muy impulsivos y no se cortan a la hora de poner por escrito sus impresiones, expresando su pensamiento con mucha sinceridad. Nos gusta recoger algunos de los comentarios que escriben acerca del problema o de su solución. Aquí están algunas de esas perlas:

- “Cinco años y medio. Busqué números al azar.”
- “Andrea cumple el 29 de febrero.” (Hasta tres respuestas de este tipo)
- “Con esta información no puedo completar el problema. Necesitaré la edad de Mario.”
- “¿Sólo con estos datos se puede hacer? Bueno sí, pero hay que pensar demasiado.”
- “Andrea tiene 2 años. Hace dos años Andrea nació y a Mario le quedaban tres años para nacer. Entonces Mario nace el año que viene y ella lo sabe porque conoce a la madre y sabe que está embarazada.”

En otro orden de cosas, una excelente amiga, Alegría Calderón Risco, maestra en el CEIP Andalucía del Polígono Sur de Sevilla capital, donde trabaja con alumnos de 6º de educación primaria, concretamente el 6º A, nos envía un problema que ha propuesto a sus alumnos y la manera en que éstos lo han resuelto.

Nos ha parecido interesante utilizarlo en este artículo para animar a otros lectores a colaborar con la revista. Y, claro está, añadiremos algún comentario final. Es nuestra tarea.

Dice Alegría:

“La realizo en grupos interactivos. En mi centro, perteneciente a comunidades de aprendizaje, una de las herramientas que utilizamos para la realización de estrategias de enseñanza-aprendizaje, es la de grupos interactivos, consistente en pequeños grupos de niños/as, no más de 5 por grupo, de distinto nivel y competencia curricular donde se plantea una actividad y entre todo el grupo se resuelve, opinando para su resolución. Estos grupos son acompañados de la presencia de un maestro, voluntario, familiar, etc....que se ha comprometido con el centro para realizar estas actividades. El único papel del adulto es guiar a su grupo para la resolución de la actividad sin dar explicación de cómo resolverla, al contrario, planteando preguntas si fuese necesario, pero siempre dejando al grupo razonar y discutir entre ellos cómo resolverían el problema.

Estos grupos se plantean en 20 minutos y vamos rotando con la actividad entre los distintos grupos.

En este primer contacto con la actividad aunque no se resuelve, voy viendo los posibles razonamientos de mis alumnos para después, en la segunda sesión, resolver el problema en gran grupo.

Tienda de animales



Pájaros pequeños



Pájaro grande



En esta tienda de animales se venden, sobre todo, pájaros de diferentes tamaños; cada pájaro grande se vende a dos veces el precio de uno pequeño.

Ayer entró una señora y compró cinco pájaros grandes y tres pequeños. Si en vez de eso hubiese comprado tres pájaros grandes y cinco pequeños, habría gastado 20 euros menos.

¿Cuál es el precio de cada pájaro?

El viernes a segunda hora la tengo organizada para la resolución de problemas en gran grupo.

La disposición de los alumnos sigue siendo en pequeños grupos aunque ahora todos atendemos al mismo problema.

Como primer paso planteo la actividad presentándola en la pizarra digital, de esta manera todos vemos el problema sin tener que recordar los datos. Entre todos se lee el problema que anteriormente habíamos visto en grupos interactivos.

Los alumnos reaccionan positivamente ante el problema ya que la mayoría de ellos no lograron resolver el problema cuando se planteó inicialmente.

A continuación voy preguntando a los alumnos: ¿Quién quiere decir algo? ¿Cómo resolverías la cuestión? ¿Qué datos tengo que realmente son datos?

Empezamos la resolución de problemas siguiendo los pasos.

1. Datos

Entre todos van dando los datos del problema que tengo.

Tienda de animales

Dos tamaños de pájaros

- Pájaros grandes
- Pájaros pequeños

1 pájaro grande vale 2 pequeños

Compro 5 G y 3 P pero si compro 3G y 5 P sobran 20 euros

Objetivo

¿Cuánto vale cada pájaro grande y cada pájaro pequeño?

Relación

Qué es lo que sé del problema

Pues que 1 pájaro grande equivale a 2 pequeños, es decir: **G= 2P**

2. Pensar

¿Qué estrategia voy a utilizar para resolver el problema?

Los alumnos han utilizado distintas estrategias para resolver el problema. Pero la mayoría de ellos lo han hecho por ensayo y error.

Cuando empezamos a razonar uno de los niños pensó,...voy a darle un valor al pájaro grande de tal manera que lo pueda dividir entre dos porque el pájaro grande vale dos veces el pequeño por lo tanto tengo que poder dividirlo entre dos....

Otro de ellos no sabía que equivalencia poner y comentó si con un pájaro pequeño vale por ejemplo 10 euros el pájaro grande vale $10+2$

No entendía el sentido de dos veces más... Es decir el doble.

Entonces otro de los niños se lo explicó según él entendía el sentido de dos veces más...

Finalmente, empezaron a dar valor al pájaro grande para así obtener el del pequeño y a la inversa dar valor al pequeño y obtener el grande multiplicando dicho valor por dos.

Y después hacer las dos compras

3. Ejecutar

Empezaron a dar valor a los pájaros hasta que uno de ellos comentó ya lo tengo...!

Él había dado el valor de 10 euros al principio al pájaro grande y por lo tanto 5 el pequeño porque lo dividía.....y al comprobar se dio cuenta que no era esa la solución porque al hacer la segunda compra la señora no se ahorra 20 euros

4. Comprobación

Suponemos que $G=10$ y $P=5$ porque el pájaro grande vale dos veces el pájaro pequeño.

- primera compra: $5 \times 10 + 3 \times 5 = 50 + 15 = 65$ euros

-segunda compra: $3 \times 10 + 5 \times 5 = 30 + 25 = 55$ euros

No se ahorra 20 euros sino 10 euros porque $65 - 55 = 10$ euros

Seguimos discutiendo y dando valores a los pájaros (todo por **ensayo-error**, no hubo otra estrategia para la resolución) hasta dar con el valor de los pájaros.

Yo no quise intervenir porque todos estaban entusiasmados en buscarle el precio y dieron con el precio a los pocos intentos.

El pájaro grande vale 20 euros y el pequeño vale 10 euros

Comprobamos y efectivamente lo habían resuelto.



- primera compra: $5 \times 20 + 3 \times 10 = 100 + 30 = 130$ euros

-segunda compra: $3 \times 20 + 5 \times 10 = 60 + 50 = 110$ euros

Efectivamente sí se ahorran 20 euros porque $130 - 110 = 20$ euros

(Todos se quedaron.....ah!!!!!!)

Como no pudimos ver otras formas de resolución de problema con distinta estrategia de pensamiento les propuse que yo tenía otra manera para resolverlo sin tener que ir a ensayo-error, sino más directamente

Les pregunté si querían saberlo. Y todos contestaron que sí, (bueno la mayoría, no todos)... así que les expliqué mi razonamiento porque ninguno de ellos sabía hacerlo. Para esta tercera sesión esperé al próximo viernes en la sesión de resolución de problemas para que les diera tiempo a pensar en sus casas otra manera de hacerlo.

Puesto que cada pájaro grande vale dos veces el pequeño, cinco pájaros grandes sería igual a 10 pájaros pequeños. Por tanto cinco pájaros grandes y tres pequeños equivaldrían a 13 pájaros pequeños. Por otro lado, tres pájaros grandes más cinco pequeños equivaldrían a 11 pájaros pequeños.

Así que la diferencia entre comprar cinco pájaros grandes y tres pequeños o comprar tres pájaros grandes y cinco pequeños es igual a la diferencia entre comprar trece pájaros pequeños y comprar once pequeños, que es en realidad dos pájaros pequeños.

Como sabemos que la diferencia entre comprar una cosa u otra es de 20 euros, significa que los dos pájaros pequeños valen 20 euros por lo tanto un pájaro pequeño vale 10 euros y uno grande 20 euros, el doble.

Al comprobarlo todos enmudecieron.

Hubo muchas preguntas interesantes:

¿Cómo lo has sabido sin hacer las cuentas antes?

¿Podemos dibujar el problema?

También lo hicimos representando a los pájaros con bolitas...

¿Se pueden resolver todos los problemas de esta manera?

El problema fue tomado y adaptado del libro: **La dama o el tigre** de Raymond Smullyan (editorial CÁTEDRA), recomendado por Antonio Aguilera voluntario de mi aula y vicedecano de la universidad de psicología."

Nos manda también algunas fotografías de su clase en plena actividad:



Nos ha interesado la detallada descripción metodológica que hace del proceso. Y especialmente la presencia de un adulto voluntario en el grupo.

En cuanto a la resolución en sí, nos parece que, a la hora de resolver los alumnos mediante el ensayo y error, llegan a tener claro que a 10 euros el pájaro grande no sale porque la señora no ahorra 20 euros en la segunda compra sino 10. Era el momento de alentar a algunos para que, en lugar de seguir con intentos aleatorios, razonaran que bastaba con aumentar al doble el precio del pájaro grande para tener una ganancia doble.

La otra estrategia, que es correcta, puede acercarse a los alumnos mediante la introducción del preálgebra. Se usa para ello la representación simbólica (dibujos o letras) y el modelo de la balanza (no siempre para equivaler pesos, sino también valores, precios, etc.). También las leyes de las igualdades o equivalencias: igualdad es equilibrio en la balanza; modificar un plato quitando o poniendo algo desequilibra; sólo se puede cambiar algo por su equivalente; se pueden modificar los dos platos a la vez, quitando o poniendo la misma cosa en ambos; cuando ya no se puede simplificar más, lo que queda sobre los platos de la balanza es la respuesta.

$$G G G G G P P P \quad \Downarrow \quad G G G P P P P P 20$$

Eliminamos tres y tres P en cada platillo, de uno en uno o simultáneamente:

$$G G \quad \Downarrow \quad P P 20$$

Cambiamos cada G por dos P, o al revés, cada dos P por un G, y volvemos a simplificar:



P P P P ↓ P P 20

G G ↓ G 20

Quedándonos al final uno de estos dos diagramas:

P P ↓ 20

G ↓ 20

Como se ve la solución es la misma en ambos casos (con óptica diferente): G vale 20 euros y P vale 10 euros.

Todo esto se traduce más tarde en lenguaje algebraico $5G + 3P = 3G + 5P + 20$.

Se convierte en $2G = 2P + 20$. Con la sustitución de $G = 2P$ y la simplificación se tiene:

$$2G = G + 20, \text{ y de ahí } G = 20.$$

Me pareció muy bien el esfuerzo de difusión y, especialmente la capacidad de adaptar un problema de Smullyan que es una lectura muy divertida pero muy compleja; tiene varios libros de paradojas a cual mejor.

Las fotos aportan un material de primera mano para observar el clima de la clase. Son estupendas.

Y, como de costumbre, parece oportuno finalizar con la propuesta de cuatro problemas para que vayan pensando un poco hasta el siguiente artículo. Sencillos, aptos para que nuestros lectores que trabajan en Primaria los propongan a sus alumnos. Procedentes todos ellos de la 18ª edición del Rally Matemático Transalpino.

En el autobús

Lino sube el último en el autobús que parte de la estación. Va a sentarse y observa que hay otros 5 pasajeros.

En la primera parada, delante de Correos, descienden 3 personas y suben 6.

En la segunda parada, en la plaza del mercado, no desciende nadie y suben 13 personas.

En la tercera parada, delante del Ayuntamiento, descienden 5 personas y no sube nadie.

En la cuarta parada, delante de la escuela, descienden 2 personas y suben 12, pero 4 de ellos deben quedar de pie porque todos los asientos están ya ocupados por un pasajero.

¿Cuál es el número de asientos para pasajeros del autobús?

El paquete de caramelos

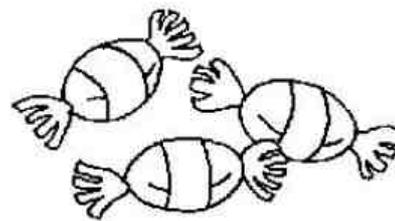
En un paquete de caramelos, algunos son azules, otros son rojos y otros son verdes.

28 caramelos no son rojos.

39 caramelos no son azules.

31 caramelos no son verdes.

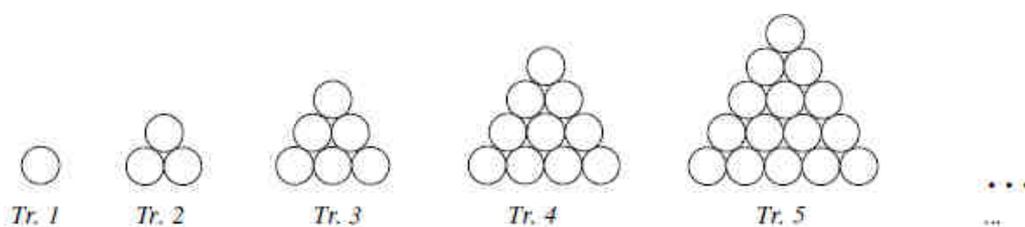
¿Cuántos caramelos de cada color hay en el paquete?



Fichas en triángulos

Ana posee una caja con 120 fichas redondas, todas idénticas.

Las dispone sobre la mesa y forma una sucesión regular de “triángulos” en los cuales las fichas están colocadas unas contra otras. He aquí los primeros cinco triángulos:



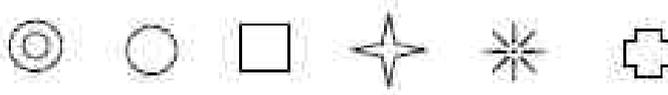
Ana continúa así y forma nuevos triángulos que tienen siempre una fila más que los anteriores. En el momento en que ha finalizado uno de estos triángulos, se da cuenta que su caja está vacía y que ha utilizado las 120 fichas para hacer todos los triángulos.

Un poco más tarde, su hermano Pedrito pasa delante de la mesa y observa las construcciones hechas por Ana. Calcula después el número de fichas que habría necesitado para hacer el triángulo siguiente. Puesto que no hay más fichas en la caja, deshace algunos triángulos de su hermana, utiliza todas las fichas de los triángulos que ha deshecho y acaba exactamente el triángulo que viene a continuación del que Ana había construido por último.

¿Cuáles son los triángulos de Ana que Pedrito podría haber utilizado completamente para construir el suyo?

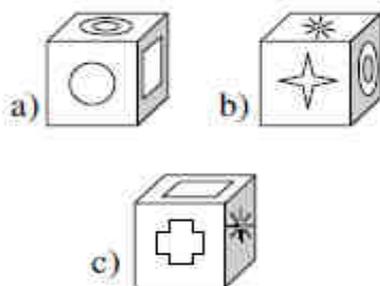
La cara escondida del cubo

Sobre las caras de un cubo están dibujadas las seis figuras siguientes:



Aquí abajo hay tres fotos de este cubo colocado en posiciones diferentes: a), b), c).





Observando estas fotos decid cuál es la figura dibujada sobre la cara opuesta a aquella en la cual está dibujado el círculo.

Y quedamos así hasta la próxima entrega. Pero volvemos a insistir: esto sólo tiene sentido si nuestros lectores, después de leer el artículo, resuelven los problemas, los utilizan con sus alumnos si es posible, aportan a la revista sus comentarios, soluciones y nuevas propuestas o, simplemente, nos cuentan lo sucedido en el transcurso de la clase en que probaron el problema. Hasta ahora hemos recibido unas cuantas valiosas aportaciones, pero queremos más. Anímense. Tomen ejemplo de Alegría Calderón...

Como siempre, aguardamos sus noticias a la espera de la próxima edición de la revista.



Un saludo afectuoso del **Club Matemático**.