CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL PROFESOR Y ORGANIZADORES DEL CURRÍCULO EN MATEMÁTICAS

Pedro Gómez
Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada
pgomez@valnet.es

INTRODUCCIÓN

Una breve revisión de la literatura de investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas de secundaria y el papel que este conocimiento juega en la enseñanza sugiere la importancia de considerar al profesor como agente cognitivo y de estudiar la enseñanza desde la perspectiva de los principios constructivistas sobre el desarrollo del conocimiento. Discutimos el modelo Simon (1995) que sigue estos parámetros y sugerimos maneras de elaborar este modelo a través de las ideas de análisis didáctico y conocimiento didáctico. Hacemos una elaboración de la noción de organizadores del currículo y mostramos su relación con el análisis didáctico.

INVESTIGACIÓN SOBRE CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

La investigación sobre el conocimiento del profesor y su relación con la enseñanza de las matemáticas ha pasado por tres fases (BALL, 1991; COONEY, 1994). En la primera fase, llamada "de la enseñanza eficiente", se buscó identificar, con base en las opiniones de los alumnos, las características de los buenos profesores. Se identificaron principalmente características relacionadas con su personalidad. Al tratar de validar estos resultados con el rendimiento de los estudiantes, se entró en una segunda fase en la que se buscó relacionar las características del profesor con el aprendizaje de sus alumnos y se encontró, entre otras cosas, que el conocimiento matemático del profesor (medido, por ejemplo, con el número de cursos que ha tomado o títulos que ha obtenido) no es un buen indicador del rendimiento de los alumnos. En la tercera fase, llamada "del pensamiento del profesor", se parte del supuesto de que lo que el profesor hace en el aula depende de lo que el profesor sabe y piensa. La reflexión se libera entonces de las ideas anteriores que enfatizaban el conocimiento puramente matemático conjuntamente con el conocimiento de algunos aspectos generales de pedagogía.

En 1987, Shulman introduce las nociones de conocimiento de contenido pedagógico y base de conocimiento para la enseñanza. Éste fue un aporte innovador para la época. El significado de estos términos es bastante general y las investigaciones que los utilizan no logran necesariamente concretizar esos significados (e.g., GEDDIS, 1993; BROWN Y BORKO, 1992; GEDDIS y WOOD, 1997; GRAEBER, 1999). Paralelamente con la preocupación sobre el conocimiento de contenido pedagógico, continúa la preocupación sobre el conocimiento de contenido temático (subject-matter knowledge). Tal vez, como consecuencia de que resulta más fácil conceptualizar esta noción, los estudios que se hacen sobre ella son más profundos y son, en su mayoría, específicos a un tema particular de las matemáticas (e.g., EVEN, 1990; BALL, 1991; EVEN, 1993; GEDDIS, 1993; WILSON, 1994; QUINN, 1997).

La mayoría de los trabajos tienen una característica común: están centrados en el profesor y asumen implícitamente una posición sobre la enseñanza y el aprendizaje. Esta posición implícita supone un esquema de transmisión por parte del profesor y de recepción por parte del alumno de ese contenido "transformado" gracias al conocimiento del contenido pedagógico del profesor. Supone también, por consiguiente, una posición sobre el aprendizaje como proceso de retención de información.

Cooney (1994) reconoce esta situación y se hace dos preguntas: "¿Qué tipos de conocimientos necesitan los profesores para ser eficientes? ¿Qué tipos de experiencias deben vivir los profesores para construir ese conocimiento?" (p. 608). Promueve la formación de profesores como un campo de indagación sistemática que se está basando en la importancia de la cognición, el contexto y el paradigma constructivista. Considera que se estaban produciendo numerosos relatos de teorías locales de profesores, pero no se estaba pasando de lo local a lo general. “¿Qué perspectivas teóricas nos pueden permitir comprender las experiencias que viven los profesores? ¿Qué perspectivas teóricas nos pueden permitir desarrollar programas de investigación y desarrollo que empujen nuestros esfuerzos hacia adelante?” (pp. 627-628). Por otro lado, al preguntarse acerca de los tipos de experiencias que los profesores deben vivir para construir ese conocimiento necesario para ser eficientes y al reconocer la importancia del paradigma constructivista, Cooney pone de relieve la necesidad de ver al profesor como un agente cognitivo y la necesidad de conceptualizar los procesos mediante los cuales el profesor construye su conocimiento.

Reconstrucción de una pedagogía de las matemáticas desde una perspectiva constructivista

Estos son los dos puntos que recoge Simon (1995): la enseñanza basada en los principios constructivistas y el profesor como agente cognitivo. El propósito de Simon es el de “contribuir al diálogo acerca *de cómo sería la enseñanza si se construyera sobre una visión constructivista del desarrollo del conocimiento*” (p. 115). De hecho, Simon propone, en términos de Steffe y d'Ambrosio (1995), un *modelo* de enseñanza con esas características. En este modelo, la enseñanza, desde la perspectiva del profesor, está guiada por la *trayectoria hipotética de aprendizaje* que consiste en la predicción que el profesor tiene acerca del camino por el cual puede proceder el aprendizaje. “Una trayectoria hipotética de aprendizaje le da al profesor criterios para seleccionar un diseño instruccional particular; por lo tanto, yo tomo mis decisiones de enseñanza basado en mi mejor conjetura acerca de cómo va a proceder el aprendizaje” (p. 135). La trayectoria hipotética de aprendizaje tiene tres componentes, relacionados entre sí: la visión que el profesor tiene del *objetivo de aprendizaje*, la planificación del profesor para las *actividades de aprendizaje y* las hipótesis del profesor acerca del *proceso de aprendizaje*. El objetivo de aprendizaje es la guía que le permite al profesor decidirse por unas actividades de aprendizaje. Esa decisión la toma teniendo en cuenta también sus hipótesis acerca del proceso de aprendizaje. Y estas actividades afectan, a su vez, sus hipótesis sobre el proceso.

El centro de la propuesta consiste en sugerir que éste es un proceso dinámico y cíclico. La trayectoria hipotética de aprendizaje no es algo que se determine con anterioridad a la realización de la clase y que permanezca estático durante ésta. Por el contrario, la trayectoria hipotética de aprendizaje estará en permanente evolución a lo largo de la clase porque la puesta en práctica de las actividades y la permanente evaluación del conocimiento de los alumnos, llevará al profesor a revisar dinámicamente la trayectoria hipotética de aprendizaje. El profesor diseña y revisa la trayectoria hipotética de aprendizaje con base en la evaluación de los conocimientos de los alumnos y *utilizando su conocimiento*. Es aquí donde entra en juego el conocimiento del profesor, con la aclaración adicional, teniendo en cuenta que se supone que el profesor es un agente cognitivo, de que el conocimiento del profesor *también evoluciona* con motivo de la experiencia que está viviendo en el aula. Esto se debe a que, en muchas ocasiones, lo que sucede en el aula es diferente de lo que el profesor esperaba, generando una perturbación que lo obliga a reformular sus hipótesis y su conocimiento.

Steffe y d'Ambrosio (1995), al extender el modelo de Simon, resaltan la importancia de tener en cuenta las acciones de los alumnos como indicativos de su conocimiento y de poner en relieve ese conocimiento matemático. Por lo tanto, el profesor, no solamente hace un seguimiento de estas acciones, sino que también hace conjeturas sobre las acciones que los alumnos podrían ejecutar con ciertas actividades (o situaciones, en términos de Steffe y d'Ambrosio). Estas dos autoras, detallan entonces un poco más dos de los elementos del modelo de Simon: las hipótesis sobre cómo procede el aprendizaje y el proceso de evaluación de los conocimientos de los alumnos. Ellas utilizan el término “zona de construcción potencial” para referirse “a las hipótesis del profesor acerca de lo que el alumno puede aprender, dado su modelo sobre los conocimientos que tiene el alumno” (p. 154).

Simon intenta identificar los tipos de conocimientos del profesor que se ponen en juego en este proceso dinámico. Menciona los siguientes: conocimiento de las matemáticas, de las actividades matemáticas y las representaciones, hipótesis sobre el conocimiento de los estudiantes, teorías de los profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, y del aprendizaje de los estudiantes sobre un tema específico. Según este autor, estos son los conocimientos que se ponen en juego cuando, con base en la evaluación del conocimiento de los estudiantes, el profesor reformula la trayectoria hipotética de aprendizaje. Aunque pretende definir una estructura de la relación entre estos conocimientos y los componentes de la trayectoria hipotética de aprendizaje, esto no se logra puesto que sugiere que todos los tipos de conocimiento, excepto aquel sobre las actividades matemáticas y sus representaciones, afectan los tres componentes de la trayectoria hipotética de aprendizaje.

En resumen, las principales características del modelo son las siguientes. El pensamiento de los estudiantes juega un papel central. El conocimiento del profesor evoluciona permanentemente. La planificación para la enseñanza incluye la generación de una trayectoria hipotética de aprendizaje. El cambio continuo en el conocimiento del profesor crea un cambio continuo en la trayectoria hipotética de aprendizaje. Los tipos de conocimiento del profesor y su papel en el diseño de la trayectoria hipotética de aprendizaje se presentan de manera general.

ANÁLISIS DIDÁCTICO EN MATEMÁTICAS

A continuación queremos, partiendo de la propuesta de Simon, profundizar en algunos de los aspectos del modelo, con el propósito de identificar los análisis que el profesor debería hacer para diseñar actividades que partan de una perspectiva constructivista del aprendizaje y los conocimientos que el profesor pone en juego cuando realiza esos análisis. Queremos reformular la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje y mostrar con mayor detalle el carácter cíclico y sistémico del modelo.

Suponemos entonces que un aspecto central de la enseñanza de las matemáticas consiste en el diseño, puesta en práctica y evaluación de las actividades por medio de las cuales los alumnos construyen su conocimiento matemático en un ambiente de interacción social. Pensaremos aquí en el proceso ideal de diseño, puesta en práctica y evaluación de una hora de clase o de una actividad que tendrá lugar dentro de una sesión de clase. Por lo tanto, esa actividad forma parte de una estructura curricular más amplia que tiene ya determinados unos propósitos que se desea lograr. A partir de esos propósitos y teniendo en cuenta el estado cognitivo de los alumnos, el profesor debe determinar uno o más objetivos para la actividad. El estado cognitivo de los alumnos es la percepción que el profesor tiene y la descripción que él hace del conocimiento, las dificultades y los errores de los alumnos con respecto a los propósitos que se están buscando dentro de la estructura curricular de la cual forma parte la actividad. Simultáneamente con la definición de los objetivos, el profesor identifica un contenido matemático que también estará determinado, al menos parcialmente, por esta estructura curricular. El contenido, los objetivos y el estado cognitivo de los alumnos componen la información de partida para el diseño de la actividad. El diseño, puesta en práctica y evaluación de la actividad requiere de una serie de análisis que agrupamos en cuatro categorías y que, en conjunto, denominamos análisis didáctico, adaptando el término utilizado por González (1999) para la investigación en educación matemática.

Análisis cognitivo. Con este análisis se busca identificar y describir las dificultades que los alumnos pueden enfrentar y los errores que los alumnos pueden llegar a cometer al realizar las tareas que componen la actividad.

Análisis de contenido. Con este análisis el profesor busca producir una descripción estructurada y sistemática del contenido matemático desde la perspectiva didáctica. Para ello, él debe construir la estructura conceptual de este contenido, en la que sea posible identificar los conceptos y procedimientos involucrados, junto con los sistemas de representación que permiten referirse a esos conceptos y procedimientos. Adicionalmente, el profesor debe realizar un análisis fenomenológico que le permita identificar los fenómenos naturales, sociales y matemáticos que pueden ser modelizados por subestructuras matemáticas contenidas en la estructura anterior.

Análisis de instrucción. En este análisis el profesor produce y evalúa (a la luz de los análisis anteriores) diseños de las actividades que realizarán los alumnos.

Análisis de actuación. Este es el análisis que el profesor hace de las actuaciones recientes de los alumnos y que le permite determinar su estado cognitivo.

La realización de estos análisis es un proceso dinámico, cíclico y sistémico. La información que se produce en uno de los análisis permite reformular otros análisis y los resultados de esta reformulación pueden afectar el análisis original. Los tres primeros análisis interactúan dinámicamente entre sí teniendo a la estructura conceptual como hilo conductor. El análisis de actuación produce información que será utilizada posteriormente en un nuevo ciclo del proceso. No obstante, todos los análisis deben tener en cuenta la especificidad del contenido matemático. Por lo tanto, el profesor debe tener como guía la estructura conceptual de este contenido y el papel de los sistemas de representación dentro de esa estructura. Esta estructura conceptual se irá reformulando en la medida que se avance en los demás análisis.

Al realizar estos análisis, el profesor obtendrá los siguientes resultados: una o más actividades para llevar a la práctica en la clase; una justificación de esas actividades con respecto al estado cognitivo de los alumnos, al contenido y a los objetivos; y una previsión de las posibles actuaciones de los alumnos cuando se lleve a la práctica la actividad.

Vemos entonces que el diseño y puesta en práctica de actividades de enseñanza dentro de la perspectiva constructivista del aprendizaje es un proceso complejo, dinámico y cíclico. La figura 1 muestra sus principales componentes.

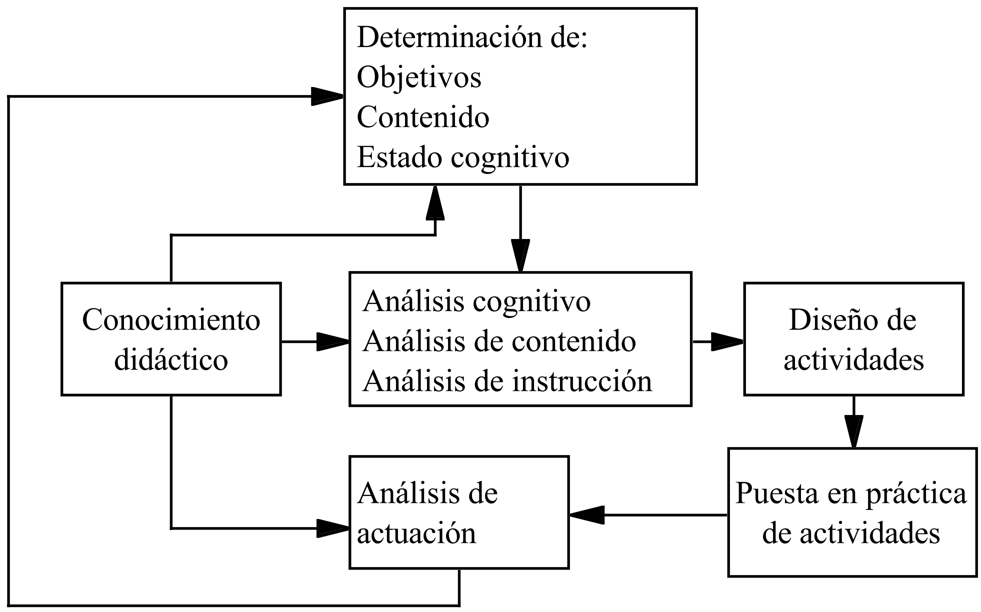

Figura 1. Diseño de actividades, análisis didáctico y conocimiento didáctico

Decimos que el *conocimiento didáctico* es el conocimiento de la didáctica de la matemática que el profesor pone en juego cuando diseña, lleva a la práctica y evalúa actividades de enseñanza. Éste es el conocimiento que el profesor pone en juego cuando realiza el análisis didáctico. Es de *carácter general*, en lo que se refiere a las características de las herramientas conceptuales utilizadas; y es de *carácter particular* en lo que se refiere a la utilización de esas herramientas para una estructura matemática específica. La tabla 1 muestra una manera de detallar la actividad de planificación del profesor siguiendo la propuesta Rico (1997) sobre las dimensiones del currículo.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="4">Dimensiones del currículo</td></tr>
<tr><td>Conceptual</td><td>Cognitiva</td><td>Formativa</td><td>Social</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Niveles</td><td>Planificación</td><td>Contenidos</td><td>Objetivos</td><td>Metodología</td><td>Evaluación</td></tr>
<tr><td>Análisis</td><td>De contenido</td><td>Cognitivo</td><td>De instrucción</td><td>De actuación</td></tr>
<tr><td>Conocimientos generales</td><td>Estructura conceptual - procedimental; sistemas de representación; fenomenología y modelización</td><td>Aprendizaje y comprensión en matemáticas; errores y dificultades</td><td>Materiales y recursos; resolución de problemas</td><td>Análisis de tareas; evaluación formativa</td></tr>
<tr><td>Conocimientos específicos</td><td colspan="4">Aplicación de las herramientas a la estructura matemática particular.</td></tr>
</table>

Tabla 1. Dimensiones del currículo, análisis didáctico y conocimiento del profesor

ORGANIZADORES DEL CURRÍCULO: EL CASO DEL ANÁLISIS DE CONTENIDO

En el apartado anterior hemos identificado algunos de los conocimientos de la didáctica de la matemática que el profesor pone en juego cuando diseña actividades. Las nociones de la didáctica de la matemática a las que se refieren esos conocimientos han sido denominadas *organizadores del currículo* por Rico et al. (1997) quienes las consideran como “aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas” (p. 45). Los organizadores del currículo que estos autores proponen son los siguientes: errores y dificultades y problemas u obstáculos de aprendizaje; diversidad de representaciones y modelización; fenomenología de los conocimientos implicados; diversidad de materiales y recursos para la enseñanza; y evolución histórica de cada campo. Consideramos que la presentación que Rico et al. hacen de estas herramientas teóricas y conceptuales carece de una estructura suficientemente detallada que permita ver la relación entre las diversas herramientas y el papel que ellas juegan en el diseño de las unidades didácticas. Adicionalmente, hemos sugerido la importancia del análisis de contenido basado en los sistemas de representación en la utilización de estas herramientas (GÓMEZ, 2000). Con base en la idea de análisis didáctico propuesta en el apartado anterior, queremos ahora presentar con algún detalle nuestra elaboración sobre el análisis de contenido. Queremos mostrar la relación de este análisis con los otros análisis (cognitivo, de instrucción y de actuación) y presentar una elaboración de los organizadores del currículo que, en algunos casos, reformula la propuesta por Rico et al. (1997) y, en otros, la extiende.

Estructura conceptual

El análisis de contenido tiene como fin la descripción detallada de la estructura matemática del contenido matemático que le permite al profesor dar cuenta de las relaciones existentes entre hechos, conceptos, estructuras conceptuales, destrezas, razonamientos y estrategias. La estructura conceptual es la descripción de estos elementos y relaciones. Dado que todo discurso matemático se realiza en uno o más sistemas de representación (DUVAL, 1998), la descripción de la estructura conceptual debe hacerse con base en el análisis de las diversas maneras como se pueden representar esos conceptos y procedimientos y las relaciones entre ellos.

Sistemas de representación

La discusión sobre los sistemas de representación en la educación matemática puede llevar a una serie de paradojas (RICO, 2000). Algunas de estas paradojas tienen que ver con el estatus ontológico de los objetos matemáticos y con la dualidad entre las representaciones internas y externas. Con respecto a la existencia de los objetos matemáticos, suponemos, siguiendo a Sfard (2000) y Dörfler (2000), que ellos no existen por fuera del discurso matemático. Sin embargo, "la sensación de los participantes [en el discurso] de que los objetos existen es una condición necesaria para el uso eficiente de los significantes" (SFARD, 2000, p. 91). Por lo tanto, aunque los objetos matemáticos no existen por fuera del discurso, quienes participan en él se comportan como si existieran. Para Cobb, Yackel y McClain (2000) la dualidad entre representaciones internas y externas desaparece: símbolo y significado se construyen dinámicamente. Lo importante es la actividad de simbolización en la que el sujeto se hace capaz de actuar socialmente compartiendo significados. El significado para un sistema de símbolos se construye en la medida en que se llegan a acuerdos sociales sobre la manera como se manejan los símbolos. Estas aclaraciones nos permiten regresar ahora a la noción de sistema de representación y resaltan el papel de esta noción en las actividades de profesor y alumnos en el aula y en la construcción del conocimiento matemático.

Definimos un sistema de representación como "un sistema de reglas para (i) identificar o crear caracteres, (ii) operar en ellos y (iii) determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia)" (KAPUT, 1992, p. 523). La importancia didáctica de la noción de sistema de representación radica en que nos permite describir las actividades matemáticas que tienen lugar en el discurso matemático del aula. Esta descripción se basa en cinco operaciones que se pueden realizar con respecto a los sistemas de representación.

La primera operación es la *creación de signos o expresiones*. Esta operación está regida por las normas que regulan el sistema de representación y es importante en las matemáticas escolares porque es la que produce expresiones válidas e inválidas (por ejemplo, $(x)f = 2x^2 + 1$).

Las segunda y tercera operaciones son las *transformaciones sintácticas variantes e invariantes*. Estas son transformaciones de una expresión en otra dentro de un mismo sistema de representación. Por ejemplo, en $f(x) = (x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$ tienen lugar dos transformaciones sintácticas invariantes (el objeto matemático no cambia), mientras que la traslación de la parábola A a la parábola B en la figura 2 es una transformación sintáctica variante (el objeto matemático cambia).

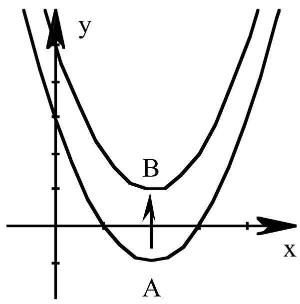

Figura 2. Representación gráfica

La cuarta operación es la *traducción entre sistemas de representación*. Se refiere al paso de un sistema de representación a otro. Es el caso de identificar la parábola A de la figura 2 con $f(x) = (x-2)^2 - 1$. Hay que anotar que aunque 1/4 = 0.25 tiene la apariencia de una transformación sintáctica, es, en realidad, una traducción entre sistemas de representación, dado que el sistema de representación al que pertenece 1/4 está regulado por reglas diferentes del sistema de representación al que pertenece 0.25.

Es posible imaginar los sistemas de representación como planos paralelos conectados. En un plano dado, uno puede crear signos o expresiones (primera operación) o transformar sintácticamente expresiones (segunda y tercera operaciones). Y uno puede pasar de un plano a otro por medio de traducciones entre sistemas de representación (cuarta operación). Detrás de estas operaciones hay dos elementos que las regulan: los objetos matemáticos representados y las normas de los sistemas de representación.

La quinta operación es la *modelización*. En esta operación, se identifica, por un lado, una serie de fenómenos naturales, sociales o matemáticos y, por el otro, una subestructura de la estructura matemática que los modeliza. Esta identificación tiene lugar en uno o más sistemas de representación. Por ejemplo, la subestructura matemática que modeliza el movimiento parabólico y la que modeliza los fenómenos de lentes son dos subestructuras de la estructura matemática asociada a la función cuadrática.

Análisis fenomenológico

El análisis fenomenológico consiste en la identificación de modelos (subestructuras de la estructura matemática estudiada) y de fenómenos (naturales, sociales o matemáticos) que son organizados por estas subestructuras. En otras palabras, un modelo es una estructura matemática que caracteriza o permite solucionar un problema relacionado con un fenómeno. Hay que insistir, como lo hace Puig (1997), que el proceso de organización de fenómenos no se refiere exclusivamente a fenómenos naturales o sociales. Las estructuras matemáticas sirven también para organizar fenómenos matemáticos.

Resolución de problemas y descripción de tareas

La descripción de la estructura conceptual del contenido matemático en términos de los sistemas de representación y del análisis fenomenológico permite construir una caracterización del tipo de actividades que es posible realizar para esa estructura matemática, cuando ésta se utiliza como organizador de fenómenos (matemáticos y no matemáticos). Desde esta perspectiva, en el discurso matemático del aula el alumno realiza dos tipos de actividades: la identificación o construcción del modelo y la resolución del problema a partir del modelo dentro de los sistemas de representación. Para la primera actividad es posible clasificar las tareas de acuerdo a la evidencia de la estructura matemática en la descripción que se hace del fenómeno dentro de la actividad:

- La estructura matemática (modelo) se encuentra explícita en la descripción del fenómeno, excepto que no está expresada en lenguaje matemático. Es el caso de problemas de caída libre en los que se menciona que el fenómeno sigue la ley de la gravedad.
- La identificación del modelo depende esencialmente del conocimiento que el alumno tenga de la estructura matemática involucrada. Por ejemplo, la manera de expresar el perímetro y el área de un rectángulo en función de sus dimensiones, para hallar el rectángulo que, con un perímetro dado, tenga mayor área.
- La estructura matemática proviene de las leyes naturales que regulan el fenómeno. Es el caso, por ejemplo, de tareas que se refieren a fenómenos de movimiento parábolico.
- Se requiere de exploración y experimentación para la identificación del modelo. Éste es el caso de la carrera de caballos diseñada por Skovsmose (2000) en que las nociones de probabilidad surgen con motivo de la actuación de los alumnos en una simulación de una carrera de caballos utilizando dados.
- El problema no está descrito en la tarea. El alumno tiene que estudiar y analizar una realidad para, primero, definir con claridad el problema y, después, modelizarlo. Estos son problemas del tipo “proyecto” (SKOVSMOSE, 2000).
- El fenómeno no tiene una estructura predeterminada y parte del problema consiste en evaluar diferentes estructuras posibles. Son el tipo de actividades que Lesh (1997) denomina de obtención de estructuras.Este autor da el ejemplo del debate sobre un sistema imparcial para combinar notas de un examen.

Una vez identificado el modelo, la resolución del problema tiene lugar dentro de los sistemas de representación. Es posible clasificar las tareas con base en las operaciones que se ejecutan dentro de los sistemas de representación para su solución. Tenemos entonces tareas en las que:

- El trabajo se restringe a un único sistema de representación y la resolución requiere de la aplicación de uno o más procedimientos de transformación sintáctica. Por ejemplo, hallar la forma expandida de $f(x) = (x-2)^2 -1$.
- Hay que trabajar en más de un sistema de representación (traducciones), pero el pro-

blema está definido en un sistema de representación específico. Por ejemplo, hallar el mínimo de la función $f(x) = (x-2)^2 -1$.

- Hay que trabajar en más de un sistema de representación, pero no se favorece ninguno de ellos y el foco de la actividad es el objeto matemático. Estos son problemas por ejemplo, en los que se tiene información parcial acerca de un objeto matemático (una función) en diversos sistemas de representación y se requiere identificar y describir el objeto en esos sistemas de representación. Nosotros denominamos a estos problemas de "construcción de objeto" (GÓMEZ, P., MESA, V.M., CARULLA, C., GÓMEZ, C., VALERO, P., 1996).
- Se exploran las características del objeto matemático en un sistema de representación (por ejemplo, el simbólico) al estudiarlo en otro sistema de representación (el gráfico). Este es el caso de analizar el papel gráfico de los parámetros de la expresión simbólica $f(x) = a(x - h)^2 + k$, cuando se consideran familias de funciones en las que dos parámetros varían y el tercero permanece constante.

RELACIÓN CON LOS OTROS ANÁLISIS

El análisis de contenido involucra el conocimiento y manejo de varias herramientas: los sistemas de representación, el análisis fenomenológico y la modelización. Con base en la utilización de estas herramientas es posible construir la estructura conceptual del contenido matemático (que describe ese contenido en términos de esas herramientas) e identificar el tipo de tareas (desde la perspectiva de la resolución de problemas) que es posible realizar con ese contenido matemático. Esta información alimenta y se alimenta de la información que se produce en los otros análisis que consideramos brevemente a continuación, junto con los demás organizadores del currículo.

Análisis cognitivo. El análisis cognitivo busca identificar y describir las dificultades que los alumnos pueden enfrentar y los errores que los alumnos pueden llegar a cometer al realizar las tareas que componen las actividades de instrucción. Por consiguiente, esta descripción podrá realizarse en términos de las operaciones en los sistemas de representación y de los tipos de tareas que es posible realizar. El análisis cognitivo surge, en general, de la experiencia previa del profesor y del estudio que él hace de la literatura sobre el tema.

Análisis de instrucción. Las actividades que se propongan a los alumnos deberán tener en cuenta los resultados del análisis cognitivo, el tipo de tareas que es posible realizar y los materiales y recursos disponibles para ellas. De este análisis surge el diseño de las actividades en un proceso cíclico y sistémico de interacción con los otros análisis. El profesor puede basarse en su propia experiencia y en el análisis de la manera como otros profesores y la literatura han presentado el tema.

Análisis de actuación. Cuando las actividades se llevan a la práctica, el profesor debe realizar el análisis de la actuación de los alumnos al ejecutar esas actividades. Este análisis se alimenta de la información producida en los otros análisis: la estructura conceptual sirve de base para el análisis cognitivo de las actuaciones de los estudiantes en el proceso de resolver problemas. El producto de este análisis es la descripción del estado cognitivo de los alumnos que le permite al profesor iniciar un nuevo ciclo del análisis didáctico.

La historia como telón de fondo. El último organizador del currículo, la historia de las matemáticas, está presente en la mayoría de los análisis e interactúa con los demás organizadores. El análisis histórico puede alimentar la construcción de la estructura conceptual, la identificación de las dificultades y errores de los alumnos y el diseño de actividades para la clase.

CONCLUSIONES

La investigación sobre la formación inicial y el conocimiento del profesor de matemáticas de secundaria ha pasado por varias etapas. Hemos identificado la reflexión de Cooney (1994) y la propuesta de Simon (1995) como puntos importantes de esta producción investigativa. Al considerar al profesor como agente cognitivo y al resaltar la importancia de la enseñanza de las matemáticas basada en principios constructivistas, estos autores abren la posibilidad de formas alternativas de considerar el papel del profesor en la enseñanza y el tipo de conocimientos que se requieren para desarrollar esa enseñanza. El modelo de Simon es una propuesta dentro de estos parámetros. En este artículo hemos querido profundizar y elaborar el modelo de Simon y reflexionar sobre el conocimiento y la actuación del profesor de matemáticas.

Partimos del supuesto de que la enseñanza de las matemáticas surge del diseño, puesta en práctica y evaluación de actividades en las que los alumnos construyen el conocimiento matemático en un ambiente de interacción social. Para realizar esta enseñanza, sugerimos que el profesor debe realizar un análisis didáctico con cuatro componentes: el análisis de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis de actuación.

Al realizar estos análisis el profesor pone en juego una serie de conocimientos que, en conjunto, hemos denominado conocimiento didáctico. Este conocimiento didáctico está compuesto por unas herramientas teóricas y conceptuales que Rico et al. denominan organizadores del currículo. Hemos desarrollado con algún detalle aquellos organizadores del currículo que son necesarios para el análisis de contenido y hemos mostrado algunas de las relaciones entre los diversos análisis y organizadores del currículo. Al estructurar y elaborar los organizadores del currículo como piezas que conforman el análisis didáctico, hemos buscado mostrar el carácter dinámico, cíclico y sistémico de este proceso y justificar la elección de estos organizadores del currículo como las piezas centrales del conocimiento didáctico del profesor de matemáticas.

Hemos hecho una descripción de lo que consideramos que idealmente debería hacer el profesor al preparar, realizar y evaluar su clase. Es evidente que esta situación ideal es muy distante de la situación real de una gran proporción de profesores en ejercicio. Esta propuesta pretende, en palabras de Simon (1995) "contribuir al diálogo acerca *de cómo sería la enseñanza si se construyera sobre una visión constructivista del desarrollo del conocimiento*" (p. 115). Por otro lado, la propuesta no considera en detalle lo que sucede en el aula cuando se ponen en práctica las actividades de instrucción, al no tener como propósito describir la manera como alumnos y profesor construyen conjuntamente significados con motivo de estas actividades.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALL, D. (1991). Research on teaching mathematics: Making subject matter knowledge part of the equation. En Brophy, J. (Ed.). *Advances in research on teaching. Vol. 2. Teacher's knowledge of subject matter as it relates to their teaching practice. A research annual*. Greenwich, CT: Jai Press, pp. 1-48.

BROWN, C., BORKO, H. (1992). Becoming a mathematics teacher. En Grouws, D.A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

COBB, P., YACKEL, E., MCCLAIN, K. (2000). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools, and instructional design*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

COONEY, T.J. (1994). Research and teacher education: In search of common ground. *Journal for Research in Mathematics Education*. 25(6), pp. 608-636.

DÖRFLER, W. (2000). Means for meaning. En Cobb, P., Yackel, E., McClain, K. (Eds.). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools, and instructional design*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 99-131.

DUVAL, R. (1998). Signe et objet (I): trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*. 6, pp. 139-163.

EVEN, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching the case of functions. *Educational Studies in Mathematics*. 21(6), pp. 521-544.

EVEN, R. (1993). Subject–matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Educa-*

tion. 24 (2), pp. 94-116.

GEDDIS, A. N. (1993). Transforming subject matter knowledge: The role of pedagogical content knowledge in learning to reflect on teaching. *International Journal of Science Education*. 15 (6), pp. 673-683.

GEDDIS, A., WOOD, E. (1997). Transforming Subject Matter and Managing Dilemmas: A Case Study in Teacher Education. *Teaching and Teacher Education*. 13 (6), pp. 611-626.

GÓMEZ, P. (2000). Los organizadores del currículo en matemáticas. *Revista EMA*. 5 (3), pp. 267-277.

GÓMEZ, P., MESA, V.M., CARULLA, C., GÓMEZ, C., VALERO, P. (Eds.) (1996). *Situaciones problemáticas de precálculo. El estudio de funciones a través de la exploración con calculadoras gráficas*. México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

GONZÁLEZ, J. L. (1999). *Aproximación a un marco teórico y metodológico para la investigación en Educación Matemática*. Presentación en Simposio SEIEM. Valladolid, 1999.

GRAEBER, A. O. (1999). Forms of Knowing Mathematics: What Preservice Teachers Should Learn. *Educational Studies in Mathematics*. 38 (1-3), pp. 189-208.

KAPUT, J.J. (1992). Technology and Mathematics Education. En Grouws, D.A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, pp. 515-556.

LESH, R. (1997). Matematización: la necesidad "real" de la fluidez en las representaciones. *Enseñanza de las ciencias*. 15 (3), pp. 377-391.

PUIG, L. (1997). Análisis fenomenológico. En Rico, L.Dir., Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L., Sierra, M., Socas, M.M. (Eds.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ice - Horsori, pp. 61-94.

QUINN, R. J. (1997). Effects of Mathematics Methods Courses on the Mathematical Attitudes and Content Knowledge of Preservice Teachers. *Journal of Educational Research*. 91 (2), pp. 108-113.

RICO, L. (1997). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. En Rico, L. (Ed.). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis, pp. 377-414.

RICO, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *Documento no publicado.* Granada: Universidad de Granada.

RICO, L. (Coord.), Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L., Sierra, M., Socas, M. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ice - Horsori.

SFARD, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being –or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. En Cobb, P., Yackel, E., McClain, K. (Eds.). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools, and instructional design*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 37-98.

SHULMAN, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*. 57 (1), pp. 1-22.

SIMON, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*. 26 (2), pp. 114-145.

SKOVSMOSE, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*. 6 (1), pp. 3-26.

STEFFE, L. P., D'Ambrosio, B.S. (1995). Toward a working model of constructivist teaching: A reaction to Simon. *Journal for Research in Mathematics Education*. 26 (2), pp. 146-159.

WILSON, M.R. (1994). One preservice secondary teacher's understanding of function: The impact of a course integrating mathematical content and pedagogy. *Journal for Research in Mathematics Education*. 24(4), pp. 346-370.