

# NÚMEROS

Revista de Didáctica de las Matemáticas

<http://www.sinewton.org/numeros>

ISSN: 1887-1984

Volumen 82, marzo de 2013, páginas 17-35

## Recorridos de Estudio e Investigación co-disciplinares a la Microeconomía

Verónica Parra (NIECyT. UNCPBA. CONICET. Argentina)

María Rita Otero (NIECyT. UNCPBA. CONICET. Argentina)

María de los Ángeles Fanaro (NIECyT. UNCPBA. CONICET. Argentina)

Fecha de recepción: 20 de abril de 2012

Fecha de aceptación: 5 de octubre de 2012

---

### Resumen

Este trabajo presenta posibles *Recorridos de Estudio e Investigación* (REI) que podrían ser implementados para enseñar diversas nociones matemáticas en el nivel secundario y en niveles superiores. Los recorridos propuestos permiten transitar por diversos tipos de problemas y cuestiones relacionados con el área de la economía, específicamente, al punto de equilibrio del modelo de oferta y demanda. Se utiliza como referencial teórico la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (TAD) de Yves Chevallard (1999), focalizando en las nociones de REI y en las dialécticas introducidas en este marco (Chevallard, 2004, 2005, 2006, 2007, 2009, 2011).

### Palabras clave

Teoría Antropológica de lo Didáctico, Recorridos de Estudio e Investigación, Escuela Secundaria, Dialécticas, Microeconomía.

---

### Abstract

In this paper, some possible research and study courses that could be realized to teach various mathematical notions at secondary school and at the first university levels are presented. The proposed courses allow walking by a lot of problems and questions related to the economical area, specifically, related to the equilibrium point in the model of offer and demand. The Anthropological Theory of didactic of Yves Chevallard (1999) is used as framework, focusing on the notions of Research and Study Course (RSC) and on the dialectics introduced in this framework (Chevallard, 2004, 2005, 2006, 2007, 2009, 2011).

### Keywords

Anthropological Theory of didactics, Research and Study Course, Secondary school, Dialectics, Micro economy.

---

## 1. Introducción

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard 2004, 2005, 2006, 2011) propone un dispositivo didáctico denominado “Recorridos de Estudio e Investigación” (REI) con el objetivo de redefinir los programas de estudios en términos de pares de cuestiones y respuestas (*Q*; *R*). En la mayoría de los cursos de matemática se estudian las nociones propuestas en los programas de estudios sin saber qué cuestiones responden. A su vez, los REI son el producto del proceso que se desarrolla para responder a una cuestión denominada *generatriz*, con una capacidad para derivar numerosas



cuestiones que conduzcan al estudio de un conjunto de praxeologías<sup>1</sup>. Una cuestión generatriz y las *cuestiones derivadas* han de permitir “recorrer” el programa de estudio propuesto en un curso o al menos, una buena parte de él. El estudio de estas cuestiones y la búsqueda de respuestas requieren romper con la pedagogía escolar dominante, centrada en el estudio de las respuestas a cuestiones que permanecen implícitas, en términos de Chevallard, cuestiones sin vida, que generan la cultura monumentalista<sup>2</sup> dominante.

Enseñar Matemática a partir de los REI tiene por objetivo entonces recuperar el sentido y las razones de ser de las praxeologías matemáticas reconstruidas en los diferentes niveles de escolaridad, colocando las cuestiones como punto de partida del saber matemático. Existen algunas investigaciones que proponen, implementan y analizan enseñanzas por REI. En la Universidad, los trabajos de Barquero (2007, 2009) y Serrano, Bosch y Gascón (2007) proponen e implementan enseñanzas por REI en cursos “paralelos” a los cursos tradicionales de Matemática. En la Escuela Secundaria, los trabajos de García, Bosch, Gascón y Ruiz (2005); Ruiz, Bosch y Gascón (2005) y Fonseca, Pereira y Casas (2011) proponen organizar la enseñanza de la Matemática partiendo de cuestiones aunque no llegan a satisfacer las características esenciales de los REI. En la educación infantil, Ruiz-Higueras y García (2011) describieron y analizaron una enseñanza por REI con un grupo de alumnos de niños de 3 a 6 años. Estos trabajos fueron y son realizados en España. En la Argentina, los trabajos de Gazzola, Llanos y Otero (2011); Llanos, Bilbao y Otero (2011); Llanos y Otero (2011); Llanos, Otero y Bilbao (2011) y Otero y Llanos (2011) abordaron una enseñanza por REI dentro de cursos usuales de Matemática en la Escuela Secundaria, cuya cuestión generatriz refiere al estudio de funciones asociadas a las posibles operaciones y las diferentes curvas que se elijan.

La construcción de posibles recorridos requiere una ingeniería didáctica particular. En este trabajo presentamos las primeras fases de esta ingeniería. Estas fases corresponden al análisis y construcción de posibles formas de “recorrer” un conjunto de praxeologías matemáticas partiendo de cuestiones de la microeconomía, más precisamente de los modelos de oferta y de demanda de mercados. Mostramos de qué forma podrían discurrir los diferentes REI según se seleccionen ciertas hipótesis de partida y ciertas cuestiones. Además, anticipamos cómo podrían operar las diferentes dialécticas que propone Chevallard (2007).

## 2. Marco teórico: la Teoría Antropológica de lo Didáctico

Este trabajo adopta como referencial la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Yves Chevallard (1999), particularmente las nociones de Recorridos de Estudio de Investigación (REI) y las denominadas “dialécticas” (Chevallard, 2004, 2005, 2006, 2007, 2009). Según Chevallard (2007), los programas de estudios deberían componerse de pares de cuestiones  $Q$  y respuestas  $R$ , es decir, estudiar cuestiones cuya respuesta se materialice en las organizaciones (praxeologías) matemáticas propuestas para enseñar en los programas de estudio. Estas respuestas deben ser respuestas en sentido fuerte y no simplemente la búsqueda y copia de información. Chevallard (2007) destaca que las sucesivas

---

<sup>1</sup> Chevallard (1999) define el término praxeología para referirse a un modelo que permite describir toda actividad humana regularmente realizada. La noción de praxeología matemática corresponde a la concepción del saber matemático como un saber organizado en dos niveles: el nivel del saber-hacer, es decir, de los tipos de tareas, problemas y las técnicas que se construyen y utilizan para abordarlos; y el nivel de saber, esto es, la parte descriptiva, organizadora y justificadora de la actividad matemática. De aquí proviene la noción de praxeología como la unión de los términos “praxis” o saber-hacer y “logos” o saber.

<sup>2</sup> Chevallard (2005) denomina *pedagogía monumentalista* a la tendencia presente en las instituciones caracterizada por enseñar la matemática como si fuese un monumento que ha perdido su funcionalidad, que se lo honra formalmente, y que no tiene más que raros empleos.

reformas educativas han sustituido el estudio de cuestiones  $Q$  por el aprendizaje de respuestas  $R$ . Así, los programas de estudio se conforman en una sucesión de respuestas que no se sabe bien a qué responden. Las cuestiones a estudiar son cuestiones “muertas”, carentes de sentido y de razón de ser para los alumnos y en la mayoría de los casos, también para los profesores.

Con la definición de los REI se plantea la posibilidad de redefinir los programas de estudio a partir de un conjunto de cuestiones “cruciales” o “generatrices”. Se plantea necesariamente también una redefinición del modelo de enseñanza tradicional y de la pedagogía dominante. La enseñanza de los REI requiere ingresar en un modelo denominado “del cuestionamiento del mundo”, característico de una pedagogía conocida como “pedagogía de la investigación”.

Una enseñanza por REI consiste en pilotear el REI regulando dialécticas fundamentales Chevallard (2007, 2009). Estas dialécticas son saberes o saber-hacer, considerados “gestos del estudio y de la investigación”. Se denominan: dialéctica *del paracaidista y de las trufas*; *del tema y fuera-de tema*; *de las cajas negras y cajas claras*; *de la excripción textual y de la inscripción textual*; de la conjetura y de la prueba – que posteriormente denomina la dialéctica *de los media y medio* –, *de la producción y recepción*; *del individuo y del conjunto* o de la autonomía y de la sinonimia y la dialéctica *de las cuestiones y respuestas*, la cuál sin dudas, es el motor de una enseñanza por REI. A continuación se describen brevemente dichas dialécticas.

### 2.1. Las dialécticas en la Teoría Antropológica de lo Didáctico

Dialéctica del paracaidista y de las trufas: estos dos términos se deben al historiador francés Emmanuel Leroy-Ladurie, quien clasificó a los historiadores en paracaidistas y buscadores de trufas. Por un lado, los paracaidistas realizan una exploración en extensas áreas de territorio – como los soldados franceses en Argelia en 1960 –; mientras los buscadores de trufas sacan a la luz tesoros enterrados.

“Buscadores de trufas” y “paracaidistas”: Los primeros hurgan en torno a sí con las narices metidas en la tierra; en tanto que los segundos descienden en medio de las nubes, inspeccionando el panorama de todo el campo, pero desde una altura tan elevada que no alcanzan a percibir con claridad nada en detalle” (Leroy-Ladurie, en Álvarez, F., 1990, p.99).

Estas metáforas se refieren a la condición de exploradores que asumen los actores del sistema didáctico, quienes por un lado, toman una gran distancia del problema y exploran el terreno desde muy “arriba”, para lo cual, se requiere incorporar el gesto de “inspeccionar zonas de gran alcance”. Pero tal inspección, difícilmente encuentra de inmediato lo que se busca, y requiere de gestos de acercamiento y enfoque sobre el terreno de los hallazgos, para analizar la utilidad de lo encontrado, lo cual posibilita hallar cosas “inesperadas”, que pueden resultar “semillas” que permitirán progresar en la investigación y en algunos casos, obtener respuestas parciales a la cuestión. Es importante destacar que esta dialéctica es totalmente contraria a la idea habitual de inmediatez y a su consecuencia, la trivialización de las soluciones, que suele caracterizar las clases de matemática, donde las respuestas se presentan como inmediatas, pre-digeridas y “viven” a lo sumo, una clase.

Dialéctica de entrar y salir fuera-de tema: cuando, en el transcurso de un REI, se buscan respuestas en “sentido fuerte” a una cuestión, es preciso habilitar la posibilidad de salirse del tema al que inicialmente pertenece dicha cuestión, incluso hasta la posibilidad de salirse de la disciplina de referencia, para reingresar posteriormente. Resulta evidente que las cuestiones generatrices que pueden dar lugar a recorridos amplios de estudio e investigación pocas veces pueden circunscribirse en el ámbito limitado de un único sector o incluso una única disciplina (Chevallard, 2007).



Dialéctica de las cajas negras y las cajas claras: se refiere al proceso según el cual se establece qué conocimiento es pertinente y merece ser aclarado, analizado, etc., mientras se dejan, si es necesario, ciertos saberes a enseñar en un “nivel de gris” (Chevallard, 2007). Así, quedan en gris, ciertos saberes que no son necesarios para responder la cuestión generatriz o sus cuestiones derivadas. Esta dialéctica se opone al hábito escolar que, en general, aspira a una claridad completa.

Dialéctica de la “excripción” textual y de la inscripción textual (también llamada de la lectura y de la escritura): se refiere al proceso de evitar la transcripción formal de respuestas parciales ya existentes, consideradas pertinentes, que pueden conducir a la construcción de la respuesta a la cuestión planteada, mientras se cuestiona el texto donde se ha encontrado inscritas a las posibles respuestas, se trata entonces de tomar de ellas la parte útil y volver a escribirlas en notas de síntesis, glosarios, etc. (Chevallard, 2007). Esta dialéctica está relacionada con la dialéctica anterior (cajas negras y cajas claras) porque es necesario establecer un nivel de “gris”, o de profundidad con el cuál transcribir las respuestas parciales ya construidas.

Dialéctica de la conjetura y de la prueba: se refiere al saber construido en un curso de estudio e investigación, al que se considera como producto de una conjetura y que como tal, debe ponerse a prueba. Luego, esta dialéctica se designó con el nombre de la dialéctica medio-media (entendiendo por “media” a todo sistema que emite mensajes en dirección a ciertos públicos, como por ejemplo, un diario, un programa de televisión, el curso del profesor, un “tratado” sabio, etc.) y medio (a la noción originada en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau). La actividad de modelización matemática que “vive” en una enseñanza por REI sólo puede desarrollarse si para la elaboración de las respuestas provisionales, los estudiantes disponen de algunas respuestas ya establecidas. ¿Cómo acceden a ellas?, a través de los diferentes medios de comunicación y difusión, es decir, a través de los media que al ingresar al medio son transformados e incorporados a él, en el proceso de elaboración de posibles respuestas a las cuestiones (Marietti, 2009).

Dialéctica de la producción y la recepción: se trata del proceso que conduce a difundir y defender la respuesta desarrollada por la comunidad de estudio, favoreciendo una enseñanza de la matemática basada en la modelización. Los saberes no son importantes *per se* – monumentalismo –, sino por el tipo de respuestas que permiten aportar, se trata de un saber que es el producto de la actividad matemática de la comunidad de estudio.

Dialéctica del individuo y del colectivo o de la autonomía y de la sinonimia: es un proceso que consiste en el estudio colectivo de la cuestión problemática que se ha planteado y a la vez en el reparto de las responsabilidades y de asignación de las tareas, para volver a incorporarse a un proceso colectivo, para dar una respuesta. La integración de la modelización matemática en la actividad científica escolar requiere potenciar el papel de la comunidad de estudio junto con el papel del profesor como director del proceso de estudio. Esta comunidad de estudio debe estudiar colectivamente la cuestión y producir conjuntamente una respuesta. Esta dialéctica desplaza el “actor del estudio”: pasa del individuo a la comunidad. El estudio en conjunto de las cuestiones permite defender las respuestas producidas por la comunidad en lugar de aceptar la imposición de las respuestas “oficiales” admitidas por la institución escolar.

La dialéctica de preguntas y respuestas: está en el corazón de una enseñanza por REI. Se refiere al hecho de que toda búsqueda genuina y no simulada de respuestas a las cuestiones, genera nuevas preguntas que la comunidad de estudio decidirá cuándo y cómo van a responder.

### 3. Preguntas de la investigación

En este trabajo abordamos las siguientes cuestiones:

- ¿Cómo son las primeras fases del proceso de ingeniería didáctica de posibles REI?
- ¿Qué características tiene una cuestión generatriz adecuada?
- ¿Qué dialécticas es más plausible implementar en la gestión de los REI propuestos?

### 4. La ingeniería didáctica de los Recorridos de Estudio e Investigación (REI) en torno a los modelos de mercados de oferta y demanda

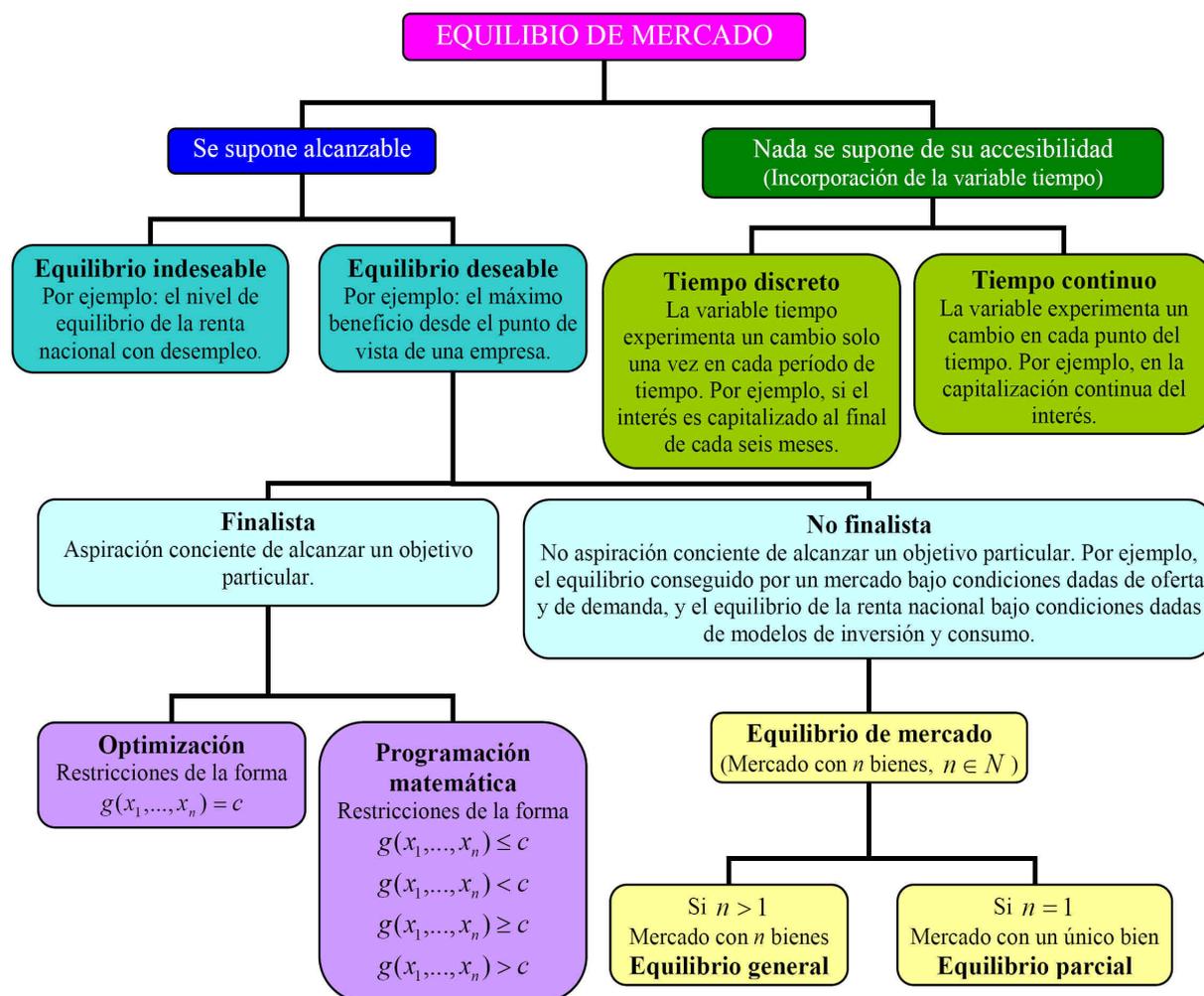
El mercado se define como cualquier conjunto de transacciones o acuerdos de negocios entre compradores y vendedores: comprar y vender a un determinado precio. En contraposición con una simple venta, el mercado implica el comercio regular y regulado, donde existe cierta competencia entre los participantes. El mercado se define también como el ambiente social que propicia las condiciones para el intercambio. Se interpreta como la institución u organización social a través de la cual los ofertantes (productores y vendedores) y demandantes (consumidores o compradores) de un determinado bien o servicio, entran en estrecha relación comercial a fin de realizar ciertas transacciones comerciales (Schiller, 1994; Gould, Lazear, 2000; Chiang, 1987).

Un modelo económico construido adecuadamente, puede informar y/o predecir, de forma aproximada, el comportamiento del mercado. Por ejemplo, predecir el precio que justifica el mercado o el nivel de producción que maximiza cierto beneficio. Un modelo económico contiene dos tipos de variables: las variables cuyos valores solución se hallan a partir del modelo se conocen como variables endógenas (originadas desde dentro del modelo), y las variables que se suponen determinadas por fuerzas externas al modelo y cuyas magnitudes se aceptan como datos dados se denominan variables exógenas o parámetros (originadas desde afuera del modelo).

Un aspecto central en un modelo de mercado es la noción de equilibrio y una de las ecuaciones más importantes asociada al mismo está dada por la igualdad entre la cantidad demandada del bien o servicio y la cantidad ofrecida. Un estado de equilibrio para un modelo específico es una situación que se caracteriza por una falta de tendencia al cambio. Es una situación que, una vez alcanzada, tiende a perpetuarse a menos que cambien las fuerzas externas.

La noción de equilibrio puede clasificarse según la accesibilidad (accesibilidad supuesta o nada se supone respecto a la accesibilidad) y según el estado (deseable o indeseable). Dentro del estado deseable, a su vez, se clasifica en finalista y no finalista. A su vez, dentro de la variedad finalista se clasifica en optimización y programación matemática. Dentro del estado no finalista, en equilibrio parcial de mercado y equilibrio general de mercado. Construimos el esquema siguiente para mostrar las posibles clasificaciones del equilibrio de mercado que originarán distintos recorridos:





Esquema 1. Se presentan las posibles clasificaciones del equilibrio de mercado

Asumiendo cualesquiera de las posibles clasificaciones anteriores, pueden formularse cuestiones cuyas respuestas –en sentido fuerte– se materialicen en la construcción de un conjunto de Organizaciones<sup>3</sup> (praxeologías) Matemáticas (OM) articuladas entre sí. La cuestión que dirige el análisis del equilibrio de mercado bajo la hipótesis del equilibrio alcanzable es *¿Cómo hallaríamos el conjunto de valores de las variables endógenas que satisfarían la condición de equilibrio del modelo?* Habiendo hallado el punto de equilibrio puede formularse la siguiente cuestión, derivada de la anterior, *¿Cómo y cuánto se modificaría la posición del equilibrio en respuesta a cierto cambio en un parámetro del modelo?* Por otra parte y bajo la hipótesis de accesibilidad del equilibrio no supuesta, la cuestión *¿Tenderán las diversas fuerzas del modelo a conducir hacia la posición de equilibrio?* dirige este análisis. Responder estas cuestiones implica un análisis y estudio no sólo matemático, sino también, económico. Construimos la tabla siguiente para presentar las posibles hipótesis respecto a la accesibilidad del estado de equilibrio y las cuestiones que podrían formularse a partir de ellas. A su vez, presentamos cómo se denominan en Microeconomía cada uno de los análisis que estas cuestiones generan.

<sup>3</sup> El término de organización matemática es equivalente al de praxeología matemática.

<p><b>Hipótesis <math>H_0</math>: Se supone que el estado de equilibrio es alcanzable. “Accesibilidad supuesta”</b></p>		<p><b>Hipótesis <math>H_1</math>: Nada se sabe respecto a la accesibilidad del estado de equilibrio es alcanzable.</b></p>
<p>ANÁLISIS ESTÁTICO (El análisis se centra en hallar el valor del punto de equilibrio)</p>	<p>ANÁLISIS ESTÁTICO-COMPARATIVO (El análisis se centra en hallar el valor del punto de equilibrio, modificar los parámetros del modelo y luego, comparar ambos estados de equilibrios)</p>	<p>ANÁLISIS DINÁMICO (El análisis se centra en incluir la variable tiempo y analizar si el punto de equilibrio es o no alcanzable)</p>
<p>Cuestión <math>Q_0</math>: ¿Cómo hallaríamos el conjunto de valores de las variables que satisfarán la condición de equilibrio del modelo?</p>	<p>Cuestión <math>Q_1</math>: ¿Cómo y cuánto se modificaría la posición del equilibrio en respuesta a cierto cambio en un parámetro del modelo?</p>	<p>Cuestión <math>Q_2</math>: ¿Tenderán las diversas fuerzas del modelo a conducir hacia la posición de equilibrio?</p>

**Tabla 1.** Se presentan las posibles hipótesis, las cuestiones y las denominaciones de los análisis microeconómicos.

El estudio de la cuestión  $Q_0$ : *¿Cómo hallaríamos el conjunto de valores de las variables que satisfarán la condición de equilibrio del modelo?* conduce al estudio de un conjunto amplio de funciones y de su comportamiento pues, dependiendo de las hipótesis de partida que se formulen, las funciones de oferta y de demanda pueden ser de cualquier tipo. Considerando que el equilibrio existe y es alcanzable, el estudio de la cuestión  $Q_0$  pasa a considerar dos grandes tipos de equilibrio de mercado: el *equilibrio parcial* y el *equilibrio general*. El primer caso trata un modelo de determinación del precio en un mercado aislado. Las funciones de oferta y demanda de un artículo son funciones del precio de ese artículo exclusivamente. El segundo caso corresponde al equilibrio general, donde la función de demanda de un artículo debe tomar en consideración el efecto no sólo del precio de ese artículo, sino de todos los artículos relacionados con él. Lo mismo ocurre con la función de oferta. En cada caso de equilibrio de mercado, las funciones oferta y demanda pueden o no ser lineales.

Asumiendo la hipótesis de equilibrio de mercado alcanzable, formulamos otra hipótesis, que denominamos  $H_2$ . Esta hipótesis especifica más respecto al equilibrio de mercado.

$H_2$ : El equilibrio en el mercado se alcanza si, y sólo si la demanda excedente es cero. Esto es:  $Q_d(p) - Q_s(p) = 0$ , siendo  $Q_d$  la función de demanda (cantidad demandada),  $Q_s$  la función de oferta (cantidad ofrecida) y  $p$  el precio de la mercancía.

Bajo esta hipótesis, podemos enunciar una nueva hipótesis con el objetivo de precisar respecto a la naturaleza de las funciones de oferta y de demanda. Denominamos esta hipótesis por  $H_3$ , y una nueva cuestión, derivada de  $Q_0$ , que denominaremos  $Q_{0.1}$

$H_3$ : Las funciones  $Q_d$  y  $Q_s$  son lineales y dependen del precio de una única mercancía.  
 $Q_{0.1}$ : ¿Cómo determinar  $Q_d$  y  $Q_s$  para hallar el equilibrio de mercado?



Considerando las hipótesis anteriores podemos construir un modelo de mercado que permita responder la cuestión planteada  $Q_{0.1}$ . Puesto que se considera una única mercancía, sólo es necesario incluir tres variables en el modelo: la cantidad demandada de la mercancía ( $Q_d$ ), la cantidad ofrecida de la mercancía ( $Q_s$ ) y su precio ( $p$ ).

Hasta aquí, hemos especificado que las funciones de oferta y de demanda son ambas lineales. Consideremos uno de los postulados básicos de la ley de oferta y de demanda: *un aumento en el precio tiende a disminuir la demanda y a aumentar la oferta. Inversamente, una disminución en el precio tiende a aumentar la demanda y disminuir la oferta*. A partir de este postulado obtenemos especificaciones que nos permiten construir un modelo determinado. Debemos suponer entonces, atendiendo este postulado, que la curva de oferta es una curva creciente mientras que la curva de demanda es decreciente. Proponemos así una nueva hipótesis, que denominamos  $H_4$ . Con estas especificaciones podemos aportar una respuesta a la cuestión  $Q_{0.1}$ .

---

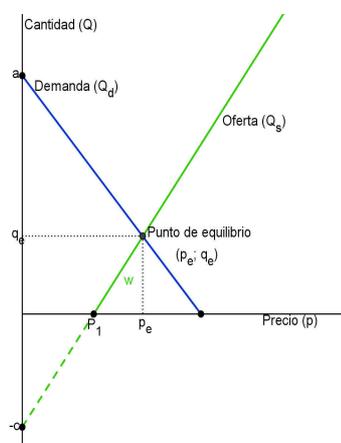
$H_4$ : La función  $Q_d$  es lineal decreciente y la función  $Q_s$  es lineal creciente.  
 $Q_{0.1}$ : ¿Cómo determinar  $Q_d$  y  $Q_s$  para hallar el equilibrio de mercado?

---

El modelo lineal queda construido de la siguiente manera:

$$\begin{cases} Q_d = Q_s \\ Q_d = a - b \cdot p \quad (a, b > 0) \\ Q_s = -c + d \cdot p \quad (c, d > 0) \end{cases}$$

La primera ecuación corresponde a la ecuación del equilibrio de mercado; la segunda, a la ecuación de la cantidad demandada en función del precio del bien y la tercera, a la cantidad ofrecida en función del precio del bien. Los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  se consideran positivos. Cuando representamos la función demanda, como en la Figura 1, su intersección vertical está en  $a$  y su pendiente es  $-b$ , que es negativa, tal y como se necesita. La función de oferta también tiene el tipo de pendiente requerida,  $d$  positiva, pero su intersección vertical es negativa, en  $-c$ . Consideramos una intersección vertical en un valor negativo pues de esta manera, la curva de oferta tiene una intersección con el eje horizontal positiva, propuesta en la Figura 1 como  $P_1$ , y en consecuencia satisface otra de las condiciones fundamentales en un modelo de oferta y de demanda que es que la oferta no aparezca a menos que el precio sea suficientemente positivo y alto.



**Figura 1.** Se representa la recta de oferta ( $Q_s$ ), la recta de demanda ( $Q_d$ ) y el punto de intersección de ambas, esto es, el punto de equilibrio ( $p_e$ ;  $q_e$ )

Luego de construir el modelo –que también puede realizarse considerando el precio dependiente de la demanda y de la oferta– obtenemos las soluciones del sistema, esto es, los valores del precio y la cantidad de equilibrio, que denotamos en la Figura 1 por  $p_e$  y  $q_e$ .

Hemos mostrado una manera de responder la cuestión  $Q_{0.1}$  con la construcción de un modelo lineal. Decimos “una” manera y no “la” manera porque la misma cuestión puede responderse a partir de la construcción de modelos no lineales. Para ello, debemos cambiar la hipótesis sobre la linealidad de las curvas de oferta y de demanda por la de no linealidad de ambas o de alguna de ellas. De esta manera, podemos estudiar Organizaciones Matemáticas relativas a funciones no lineales. Por ejemplo, considerando la hipótesis que denominamos más abajo  $H_5$ , y manteniendo la misma cuestión anterior, podemos estudiar el comportamiento de una función de demanda polinómica de grado dos y una función de oferta lineal creciente o viceversa. Este es un posible recorrido que permitiría el estudio de la función polinómica de grado dos, de la función lineal y de los sistemas mixtos. En cualquier caso, las funciones a considerar deben respetar la ley de la oferta y demanda antes mencionada.

---

$H_5$ : La función  $Q_d$  es cuadrática, la función  $Q_s$  es lineal creciente y dependen del precio de una única mercancía.

$Q_{0.1}$ : ¿Cómo determinar  $Q_d$  y  $Q_s$  para hallar el equilibrio de mercado?

---

Así, podríamos construir un modelo no lineal con tres ecuaciones: la función de demanda (función polinómica de grado dos), la función de oferta (función lineal creciente) y la ecuación del equilibrio de mercado. Es fácil advertir que los posibles recorridos a considerar bajo la hipótesis de no linealidad no se reducen al ejemplo antes mencionado. Habrá tantos recorridos posibles como tipos de funciones de oferta y demanda y las combinaciones de ambos se consideren. Cada uno de esos recorridos permitirá reconstruir y estudiar diferentes OM que conforman la OM de las Funciones.

Los modelos anteriores (ya sean lineales o no lineales) corresponden a modelos de mercado aislados, donde las funciones de oferta y demanda de un único artículo dependen solamente del precio de ese artículo. Pero un cuadro “más realista” de esta situación debe considerar no sólo el efecto del precio de ese artículo sino también de todos aquellos relacionados con él. Cuando los precios de las otras mercancías se incorporan, debemos ampliar la estructura del propio modelo para que permita determinar los valores del equilibrio de esos otros precios. Consideremos esta situación. Cambiamos entonces la hipótesis de partida por una que contemple varias mercancías. La hipótesis que denominamos a continuación por  $H_6$  se ajusta a este caso:

---

$H_6$ : En un mercado con  $n$  ( $n > 1, n \in N$ ) bienes se alcanza el equilibrio si y solo si las  $Q_{di} - Q_{si} = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), donde  $Q_{di}$  corresponde a las funciones de demanda y  $Q_{si}$  corresponde a las funciones de oferta de cada uno de los  $n$  bienes.

---

Con esta hipótesis podemos plantear (al igual que ocurriría con la hipótesis de dependencia del precio de una única mercancía) tantos modelos como naturaleza de funciones de oferta y de demanda se consideren. Por ejemplo, podemos plantear la hipótesis siguiente  $H_7$  y formular una cuestión derivada de la cuestión inicial que denominaremos  $Q_{0.2}$ .

---

$H_7$ : Las funciones  $Q_{si}$  y  $Q_{di}$  son lineales y dependen del precio de  $n$  mercancías (para  $i = 1, 2, \dots, n$ ).

$Q_{0.2}$ : ¿Cómo determinar cada una de las  $Q_{si}$  y  $Q_{di}$  para hallar el equilibrio de mercado?

---



Según intervengan más artículos en un modelo, habrá más variables, más ecuaciones, y las ecuaciones serán más complejas. En general, con  $n$  mercancías en total, podemos expresar las funciones de oferta, de demanda y la ecuación de equilibrio de la siguiente manera:

$$\begin{cases} Q_{di} = Q_{di}(p_1, p_2, \dots, p_n) (i = 1, 2, \dots, n) \\ Q_{si} = Q_{si}(p_1, p_2, \dots, p_n) (i = 1, 2, \dots, n) \\ Q_{di} - Q_{si} = 0 (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

De acuerdo con los subíndices de las ecuaciones de oferta y de demanda, el modelo posee una cantidad de  $2n$  ecuaciones (lineales según nuestra hipótesis  $H_7$  pero que, tal como lo mostramos anteriormente, podrían no serlo). Al adicionarle la condición de equilibrio, el modelo se completa con un total de  $3n$  ecuaciones. No obstante, sustituyendo las funciones  $Q_{si}$  y  $Q_{di}$  en la ecuación de equilibrio, podemos reducir el modelo a un total de  $n$  ecuaciones simultáneas. Podemos escribir entonces el conjunto anterior de ecuaciones usando sólo la ecuación de equilibrio, que llamaremos  $E$ :

$$E_i(p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Resolviendo simultáneamente las  $n$  ecuaciones, podremos determinar los  $n$  precios de equilibrio  $p_{ei}$  y posteriormente los valores correspondientes a las cantidades  $q_{ei}$  para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ . De esta manera, podemos reconstruir la OM relativa a los sistemas de  $n$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas. Si además, cambiamos la hipótesis de linealidad de las funciones  $Q_{si}$  y  $Q_{di}$  por la de no linealidad podemos construir cualquier OM que compone la OM del Álgebra Matricial.

El análisis del punto de equilibrio que hemos caracterizado hasta aquí se denomina análisis estático. Este análisis se centra en hallar los valores de equilibrio de las variables endógenas del modelo, es decir, el precio y la cantidad de equilibrio. Un punto débil de este análisis es que cuando se cambia el valor de alguno de los parámetros del modelo, el estado de equilibrio puede no ser alcanzable. Entonces, si cambiamos el valor de alguno de los parámetros podemos realizar dos recorridos: uno, suponer que el “nuevo equilibrio” es alcanzable, y entonces analizar la dirección y amplitud del cambio; el otro, no suponer nada respecto a la accesibilidad del nuevo estado de equilibrio y entonces realizar un análisis incluyendo la variable “tiempo”. En este último caso, podemos a su vez, considerar dos posibles recorridos los cuáles dependerán de la variable “tiempo”: si la suponemos discreta o continua.

Supongamos que, luego de realizar cambios en alguno de los parámetros del modelo, el nuevo estado de equilibrio es alcanzable. Continuemos con las hipótesis  $H_0$  (equilibrio alcanzable) y  $H_2$  (el equilibrio en el mercado se alcanza si y solo si la demanda excedente es cero). Nos interesa responder la cuestión siguiente, que denominamos  $Q_1$ :

---

$Q_1$ : ¿Cómo y cuánto se modificaría la posición del equilibrio en respuesta a cierto cambio en un parámetro del modelo?

---

El análisis que esta cuestión implica se denomina análisis estático-comparativo. Este análisis trata la comparación de los diferentes estados de equilibrio. Por esta razón, una de las hipótesis de partida es que existe un equilibrio inicial. De nuevo aquí, excluimos la posibilidad que el equilibrio sea inestable, porque suponemos que el nuevo equilibrio es alcanzable, tal como lo era el anterior. Ahora bien, si introducimos un cambio que desequilibre el modelo – mediante una variación en el valor de algún parámetro – por supuesto el equilibrio inicial cambiará. Como resultado, las variables precio y cantidad deberán experimentar ciertos ajustes. Asumiendo como hipótesis que el nuevo estado de

equilibrio puede alcanzarse, hipótesis que denominamos  $H_8$ , planteamos la cuestión siguiente  $Q_{1.1}$  derivada de la  $Q_1$ :

$H_8$ : Se asume que existe y es alcanzable un estado de equilibrio ante cualquier cambio que desequilibre el modelo.

$Q_{1.1}$ : ¿Cómo se puede comparar el nuevo equilibrio con el anterior?

La comparación a través del análisis estático-comparativo puede ser de carácter cuantitativa o cualitativa. Si, por ejemplo, nos interesa la cuestión relativa a cómo varía el valor de equilibrio (es decir, si crecerá o disminuirá cuando se incremente el costo de algún bien), el análisis será cualitativo porque sólo estudiamos la dirección del cambio. Pero si nos interesa la cuestión relativa a cuánto variará el valor del equilibrio, estudiaremos la magnitud del cambio, y entonces, el análisis será cuantitativo. Sin embargo, si obtenemos una respuesta cuantitativa podemos identificar la dirección del cambio a partir de su signo algebraico. Así, una cuestión a responder podría ser la siguiente:

$Q_{1.2}$ : ¿Cómo hallar la tasa de cambio del valor de equilibrio de una variable endógena con respecto al cambio en un parámetro particular o variable exógena?

La respuesta a esta cuestión nos permite reconstruir la OM relativa a la variabilidad de funciones, que contiene la OM de la noción derivada y la OM del límite de funciones. El estudio a realizar dependerá de la naturaleza de las funciones de oferta y de demanda que, tal como lo mencionamos anteriormente, pueden o no ser lineales y pueden o no depender de una única variable. Presentamos aquí, a modo de ejemplo, el caso más sencillo. Este caso corresponde al modelo con un único bien y con funciones de oferta y de demanda ambas lineales. Este modelo es el siguiente:

$$\begin{cases} Q_d = a - b.p(a, b > 0) \\ Q_s = -c + d.p(c, d > 0) \\ Q_d = Q_s \end{cases}$$

El precio y la cantidad de equilibrio obtenidas a partir de este modelo son, respectivamente,  $p_e = \frac{a+c}{b+d}$  y  $q_e = \frac{ad-bc}{b+d}$ . Ambas soluciones se denominan formas reducidas pues tanto el precio ( $p_e$ ) como la cantidad ( $q_e$ ) han sido reducidas a expresiones explícitas de los cuatro parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ .

Para hallar cómo afectará – por ejemplo, al valor de  $p_e$  – un cambio infinitesimal en uno de los parámetros tenemos que diferenciar parcialmente las formas reducidas con respecto a cada uno de los parámetros. Si determinamos el signo de la derivada parcial, conocemos la dirección del cambio. De igual manera, procedemos respecto a  $q_e$ .

Considerando  $p_e$ , por ejemplo, se pueden obtener las cuatro derivadas parciales a partir de su expresión reducida, es decir, a partir de  $p_e = \frac{a+c}{b+d}$ .

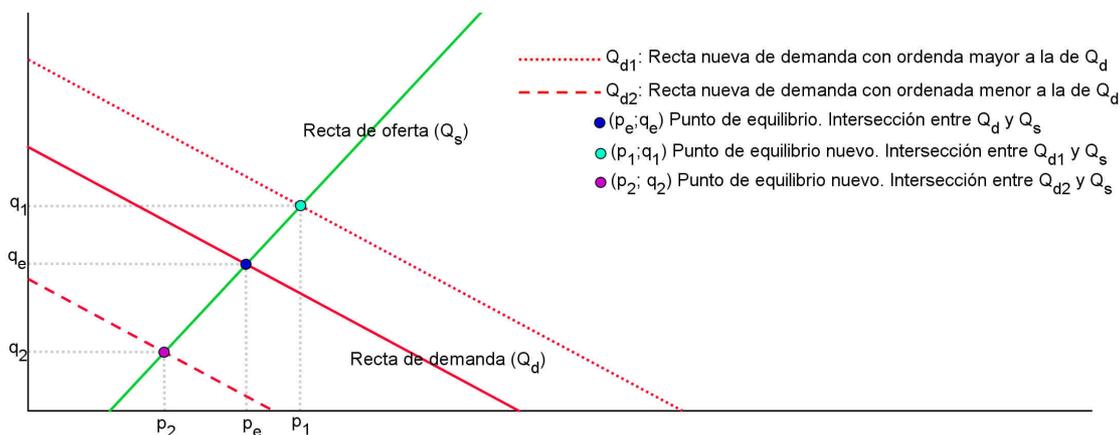
$$\frac{\partial p_e}{\partial a} = \frac{1}{b+d}; \quad \frac{\partial p_e}{\partial b} = \frac{-(a+c)}{(b+d)^2}; \quad \frac{\partial p_e}{\partial c} = \frac{1}{b+d} \quad \text{y} \quad \frac{\partial p_e}{\partial d} = \frac{-(a+c)}{(b+d)^2}$$

Recordemos que todos los parámetros, en este modelo, están restringidos a ser positivos, y por lo tanto se puede concluir que:



$$\frac{\partial p_e}{\partial a} = \frac{\partial p_e}{\partial c} = \frac{1}{b+d} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial p_e}{\partial b} = \frac{\partial p_e}{\partial d} = \frac{-(a+c)}{(b+d)^2} < 0$$

Gráficamente también podemos observar que ocurre si realizamos un cambio en uno de los parámetros. Presentamos aquí, a modo de ejemplo, solo el caso de la variación del parámetro  $a$  (ordenada de la recta de demanda).



**Figura 2.** Se representan las variaciones del punto de equilibrio según se varíe el parámetro  $a$ .

Concluimos que cuando el parámetro  $a$  (ordenada de la recta de demanda) aumenta, el punto de equilibrio también aumenta tanto en el precio como en la cantidad ( $p_1 > p_e$  y  $q_1 > q_e$ ), mientras que cuando el parámetro  $a$  disminuye,  $p_e$  y  $q_e$  también ( $p_2 < p_e$  y  $q_2 < q_e$ ). Podemos realizar un análisis análogo para las variaciones de los demás parámetros. Este resultado coincide con lo obtenido por las derivadas parciales. Tengamos en cuenta que  $\frac{\partial p_e}{\partial a} = \frac{1}{b+d} > 0$ , con lo cual la relación de cambio es directa.

Estas conclusiones pueden obtenerse con la gráfica sólo cuando la cantidad de variables y de parámetros del modelo permiten realizar la representación. Si consideramos los modelos de mercados con  $n$  mercancías, esta técnica falla. Consideremos entonces la hipótesis para el modelo con  $n$  mercancías (que denominamos  $H_6$ ), formulemos la misma cuestión anterior y analicemos cómo podríamos responderla:

$H_6$ : En un mercado con  $n$  bienes se alcanza el equilibrio si y solo si las  $Q_{di} - Q_{si} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$ .

$Q_{1.2}$ : ¿Cómo hallar la tasa de cambio del valor de equilibrio de una variable endógena con respecto al cambio en un parámetro particular o variable exógena?

Presentemos nuevamente el modelo de mercado con  $n$  bienes, construido anteriormente, bajo las hipótesis del equilibrio accesible:

$$\begin{cases} Q_{di} = Q_{di}(p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ Q_{si} = Q_{si}(p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ Q_{di} - Q_{si} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

Para obtener las soluciones del modelo  $p_{ei}$  y  $q_{ei}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  debemos utilizar alguna de las técnicas del álgebra matricial. Luego, nos interesa estudiar cómo afectará un cambio infinitesimal en cada uno de los parámetros a cada valor de  $p_{ei}$  y de  $q_{ei}$ . Nuevamente aquí habría que diferenciar parcialmente las formas reducidas con respecto a cada uno de los parámetros y obtener conclusiones a partir de la expresión de las derivadas parciales, tal como en el caso anterior. En este caso resulta imposible realizar un análisis a partir del gráfico por limitaciones dimensionales, por lo tanto, la técnica de diferenciación es la única posibilidad.

El estudio de las derivadas parciales permite analizar el tipo más simple de problemas de estática-comparativa, en los cuales la solución del equilibrio del modelo puede expresarse en la forma reducida. En ese caso, la diferenciación parcial de la solución dará directamente la información estático-comparativa deseada. Recordemos que la definición de derivada parcial requiere la ausencia de cualquier relación funcional entre las variables independientes (por ejemplo,  $x_i$ ), de modo que pueda variar sin afectar a los valores de  $x_2, \dots, x_n$ . Esto significa, en el análisis estático-comparativo, que los parámetros y/o las variables exógenas que aparecen en la solución en forma reducida deben ser independientes entre sí. La estática-comparativa ignora la inestabilidad del modelo. Es decir, ignora que el nuevo equilibrio no se alcance jamás. El estudio de tal proceso pertenece al campo denominado dinámica económica. En este análisis dinámico, la hipótesis de partida es que nada se sabe respecto a la accesibilidad del estado de equilibrio. Hemos denominado esta hipótesis con  $H_1$ .

---

$H_1$ : Nada se sabe respecto a la accesibilidad del estado de equilibrio a medida que transcurre el tiempo.

$Q_{2.1}$ : ¿Cómo cambia una variable a lo largo del tiempo? (Afectación temporal de las variables)

$Q_{2.2}$ : ¿Tenderán a converger hacia ciertos valores de equilibrio? (Cuestión de accesibilidad)

---

Para responder las cuestiones  $Q_{2.1}$  y  $Q_{2.2}$  debemos introducir en el modelo la variable “tiempo”. La introducción de la variable tiempo nos permite reconstruir dos Organizaciones Matemáticas: una de ellas, la que se construye considerando a la variable tiempo como una variable discreta, la OM relativa a las ecuaciones en diferencias; y la otra, la que se construye considerando a la variable tiempo como una variable continua, es decir, la OM relativa al cálculo diferencial e integral. Podemos formular dos nuevas hipótesis (una de ellas denominada  $H_9$  y la otra,  $H_{10}$ ). En cada caso, mantenemos las mismas cuestiones  $Q_{2.1}$  y  $Q_{2.2}$ :

---

$H_9$ : La variable experimenta un cambio sólo una vez en cada período de tiempo (Variable discreta).

$Q_{2.1}$ : ¿Cómo cambia una variable a lo largo del tiempo? (Afectación temporal de las variables)

$Q_{2.2}$ : ¿Tenderán a converger hacia ciertos valores de equilibrio? (Cuestión de accesibilidad)

---

Al responder estas cuestiones bajo la hipótesis del tiempo discreto, podemos reconstruir la Organización Matemática relativa a las ecuaciones en diferencias. En el tiempo discreto, la variable dependiente solamente cambiará cuando la variable “tiempo” cambie de un valor entero al siguiente, por ejemplo, de  $t = 1$  a  $t = 2$ . Mientras tanto, no se supone ningún cambio en la variable dependiente. En este sentido resulta más apropiado interpretar los valores de  $t$  como referidos a períodos de tiempo. Cabe destacar que el término período se utiliza en economía no en el sentido del calendario, sino en el sentido analítico. Es decir, un período puede involucrar una cierta extensión de tiempo de calendario en un modelo económico particular, pero una totalmente distinta en otro. Es más, aún en el mismo modelo, períodos sucesivos no necesariamente tiene que significar igual tiempo de calendario. Un período es el lapso que transcurre antes de que la variable dependiente experimente un cambio. De esta manera, si queremos analizar cómo varía determinada variable “y” según un tiempo  $t$  discreto debemos considerar  $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ . Si en cambio, consideramos la hipótesis de la variable continua (denominada



$H_{10}$ ) y mantenemos las mismas cuestiones ( $Q_{2.1}$  y  $Q_{2.2}$ ), podemos reconstruir la Organización Matemática relativa al cálculo diferencial e integral.

---

$H_{10}$ : En cada punto del tiempo, le ocurre algo a la variable (Variable continua).

$Q_{2.1}$ : ¿Cómo cambia una variable a lo largo del tiempo? (Afectación temporal de las variables)

$Q_{2.2}$ : ¿Tenderán a converger hacia ciertos valores de equilibrio? (Cuestión de accesibilidad)

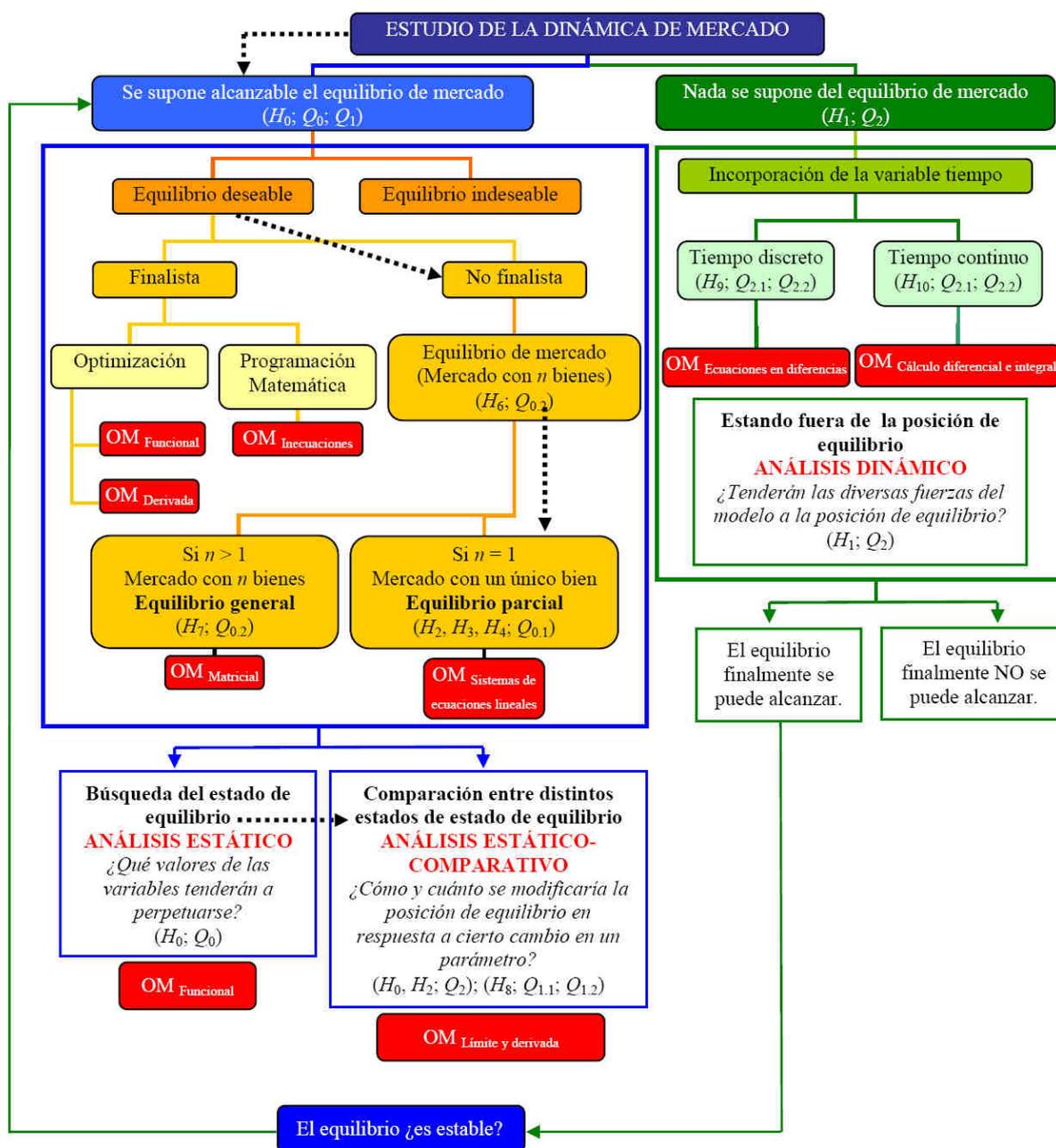
---

En cualquiera de los casos, la búsqueda de respuestas a las cuestiones conduce a las tareas, técnicas, tecnologías y teorías matemáticas de las ecuaciones en diferencias (tiempo discreto) por un lado, y del cálculo integral y las ecuaciones diferenciales (tiempo continuo), por otro.

Mencionaremos finalmente las OM que podemos construir si recorremos la rama del Esquema 1 que contempla el equilibrio denominado “finalista”. Recordemos que este tipo de equilibrio de mercado pretende alcanzar un objetivo determinado, como puede ser la optimización de funciones y la programación matemática. Dependiendo del tipo de restricciones podemos considerar dos posibles recorridos. Por un lado, podemos formular cuestiones respecto a la maximización y/o minimización de funciones. Estas funciones podrían ser las funciones beneficios, funciones costos, etc. Dependiendo de la naturaleza de estas funciones pueden estudiarse y reconstruirse las OM relativas a Funciones y, la OM en torno a la Derivada. Por otra parte, la programación matemática permite estudiar la Organización Matemática en torno a las inecuaciones.

Conviene destacar que, cuando se pretende implementar alguno de estos posibles recorridos, las hipótesis formuladas no se explicitan a los alumnos como tales. Estas hipótesis, conocidas por el profesor, quedan implícitas en los datos de los problemas que los alumnos deberán resolver. Por ejemplo, la hipótesis de linealidad será considerada por el profesor en el momento en que diseñe la secuencia de problemas y cuestiones para los alumnos.

Construimos el esquema siguiente con el objetivo de resumir cada uno de los posibles recorridos, dependiendo de las hipótesis consideradas, las cuestiones planteadas y las OM que se pretenden estudiar y/o reconstruir para dar respuestas.



Esquema 3. Se presentan los posibles recorridos, las cuestiones a responder y las OM posibles a reconstruir.

De los posibles recorridos caracterizados anteriormente, hemos realizado la implementación durante el año 2011, del que está representado en el Esquema 3 por una línea punteada. Los resultados de esta implementación se encuentran en proceso de análisis. Este recorrido particular nos permitió reconstruir la OM relativa a la *Función Lineal*, la OM referente a *Rectas en el plano*, la OM de *Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas*, y la OM en torno al *Límite y Derivada de funciones* desde el punto de vista de la variabilidad.



### 3. Conclusiones

Este trabajo logró dos objetivos centrales: por un lado, mostrar las primeras fases de la ingeniería didáctica en la construcción de posibles recorridos de estudio e investigación cuyas cuestiones e hipótesis de partida provienen de la Microeconomía, presentando además las praxeologías matemáticas que podrían construirse para dar respuestas a las cuestiones; por el otro, anticipar cómo podrían operar las diferentes dialécticas que propone Chevallard (2007).

Respecto a las fases de la ingeniería didáctica, hemos desarrollado y caracterizado en el trabajo las maneras de construir diferentes recorridos permitiendo así dar un sentido a diversas nociones matemáticas. Además, hemos mostrado que las cuestiones generatrices y sus derivadas deben ser *generativas*. Es decir, una cuestión debe permitir generar muchas más a medida que se van estableciendo condiciones e hipótesis distintas.

Con relación a las dialécticas y a la anticipación de cómo podrían operar en las implementaciones de estos posibles recorridos, diremos que estas dialécticas regulan todo el proceso de estudio en una enseñanza por REI y consideramos que las más relevantes serían: la dialéctica de *salir y entrar del tema*, del *medio-media*, de *las cajas negras* y *cajas claras* y de *preguntas y respuestas*.

- Responder la cuestión *¿Cómo hallaríamos el conjunto de valores de las variables que satisfarán la condición de equilibrio del modelo?* implica investigar respecto al comportamiento de los modelos de mercado, que incluye las leyes de oferta y de demanda y el punto de equilibrio. Consecuentemente debe salirse de la cuestión para estudiar e investigar qué es un modelo de mercado, cómo se comportan la oferta y la demanda, cómo construir el modelo, qué es el punto de equilibrio, cómo se obtiene, etc. Así, se tiene una salida al área de la microeconomía, pero también, al área de la matemática pues para construir el modelo debe estudiarse cómo hallar las ecuaciones de las curvas de oferta y de demanda, y cómo resolver sistemas de ecuaciones. De esta manera operaría la dialéctica denominada *salir y entrar del tema*.
- La dialéctica denominada del *medio-media* involucrará la gestión de la información aportada por los distintos medios. En estos posibles recorridos, estos *medios*, podrían ser libros de economía, de microeconomía, de matemática, un profesor de economía, Internet, etc. Esta “información” deberá gestionarse adecuadamente de manera tal que contribuya a la construcción del medio y se pueda aportar una respuesta a la cuestión planteada.
- La dialéctica de *las cajas negras* y *cajas claras* exigirá analizar cuál es el saber pertinente para resolver cierta cuestión y cuanto se va a profundizar en él. El “nivel de gris” proclamado por esta dialéctica deberá regularse adecuadamente pues, puede ocurrir que ciertas praxeologías, matemáticas no, se estudien de manera superficial, sin la profundización esperada por la cultura escolar. Surgen algunas cuestiones en torno a esta dialéctica tales como *¿En qué nivel de gris realizar el estudio de las leyes de oferta y de demanda? ¿Cuánto y qué estudiar de sistemas de ecuaciones? ¿Cuánto y qué estudiar de funciones?* Estas cuestiones surgirán en el proceso de estudio y deberán responderse para avanzar en la búsqueda de respuestas a las cuestiones planteadas. Así, la dialéctica de *preguntas y repuestas* estará presente en tal proceso de estudio.

Quedan preguntas por responder respecto a efectivizar una enseñanza por REI en la escuela secundaria: *¿Cuáles son las condiciones y limitaciones didácticas que influyen en la “economía” y “ecología” del REI en la escuela secundaria? ¿De qué niveles de co-determinación didáctica provienen las limitaciones y hasta que nivel una enseñanza por REI puede modificar? En particular ¿Cuál es el lugar de la evaluación institucional en este dispositivo? ¿Cómo lograr alcanzar un “nivel de gris”*

adecuado en la reconstrucción y estudio de las praxeologías a estudiar? ¿Cómo regular las salidas del “tema” para no perder la cuestión a responder? Estas son sólo algunas. Esperamos poder abordarlas y responderlas en las implementaciones de los posibles recorridos construidos o al menos, alguna parte de ellos.

## Bibliografía

- Álvarez, F. (1990). Reverenter Absolvit: Nadie ha inventado la Historia. *Manuscripts: Revista d'història moderna*, 8, 87-104.
- Barquero, B., Bosch, M., Gascón, J. (2007). Ecología de la modelización matemática: Restricciones transpositivas en las instituciones universitarias. *II Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico*. [en línea] Recuperado el 19 de abril de 2012, de [http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD\\_II/listado\\_comunicaciones.htm](http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/listado_comunicaciones.htm).
- Barquero, B. (2009). Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas, Tesis Doctoral, UAB, Barcelona, España.
- Bilbao, M. (2011). Actividades de Estudio e Investigación (AEI) para la Enseñanza de nociones relativas a las Funciones Polinómicas en la escuela Secundaria. Tesis de Licenciatura en Educación Matemática. UNCPBA, Tandil, Argentina.
- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. *Sitio web de Yves Chevallard - Textes et publications* [en línea] Recuperado el 19 de abril de 2012, de <http://yves.chevallard.free.fr/>
- Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. *Sitio web de Yves Chevallard - Textes et publications* [en línea] Recuperado el 19 de abril de 2012, de <http://yves.chevallard.free.fr/>
- Chevallard, Y. (2006). Les mathématiques à l'école et la révolution épistémologique à venir. *Sitio web de Yves Chevallard - Textes et publications* [en línea] Recuperado el 19 de abril de 2012, de <http://yves.chevallard.free.fr/>
- Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. *Sitio web de Yves Chevallard - Textes et publications* [en línea] Recuperado el 19 de abril de 2012, de <http://yves.chevallard.free.fr/>
- Chevallard, Y. (2009). La notion de PER: problèmes et avancées. *Sitio web de Yves Chevallard - Textes et publications* [en línea] Recuperado el 19 de abril de 2012, de <http://yves.chevallard.free.fr/>
- Chevallard, Y. (2011). Séminaires de recherche et de formation. *Sitio web de Yves Chevallard - Textes et publications* [en línea] Recuperado el 19 de abril de 2012, de <http://yves.chevallard.free.fr/>
- Chiang, A. (1987). *Métodos fundamentales de la economía matemática*. México: McGraw-Hill.
- Fonseca, C., Pererira, A., Casas, J. (2011). Los REI en la creación de secuencias de enseñanza y aprendizaje. *Actas del III Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico*, 671-684. Centre de Recerca Matemàtica. Campus de Bellaterra, Edifici: Barcelona, España.
- García, J., Bosch, M., Gascón, J., Ruiz, L. (2005). Integración de la proporcionalidad escolar en una organización matemática regional en torno a la modelización funcional: los planes de ahorro. *I Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico* [en línea]. Recuperado el 19 de abril de 2012, de <http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/Comunicaciones.htm>
- Gazzola, M., Llanos, V., Otero M. (2011). Funciones racionales en la secundaria: primeros resultados de una actividad de estudio y de investigación (AEI). *Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM) y II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (II ENEM)*, 493-500. Núcleo de Investigación en Educación en Ciencias y Tecnología (NIECyT): Tandil, Argentina.



- Gould, J., Lazear, E. (2000). *Teoría microeconómica*. Buenos Aires/México: Fondo de Cultura Económica.
- Llanos, V., Bilbao, M., Otero, M. (2011). Implementación de una AEI relativa al campo conceptual de las funciones polinómicas en la escuela secundaria: perspectiva didáctica y cognitiva. *Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM) y II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (II ENEM)*, 486-492. Núcleo de Investigación en Educación en Ciencias y Tecnología (NIECyT): Tandil, Argentina.
- Llanos, V., Otero, M. (2011). Evolución de una AEI como producto de investigación al cabo de seis implementaciones consecutivas. *Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM) y II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (II ENEM)*, 501-508. Núcleo de Investigación en Educación en Ciencias y Tecnología (NIECyT): Tandil, Argentina.
- Llanos, V., Otero, R.; Bilbao, M. (2011). Funciones Polinómicas en la Secundaria: primeros resultados de una Actividad de Estudio y de Investigación (AEI). *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias (REIEC)* [en línea], 6 (1), 102-112. Recuperado el 19 de abril de 2012, de <http://www.exa.unicen.edu.ar/reiec/>
- Marietti, J. (2009). 5. Le concept de PER et sa réception actuelle en mathématiques et ailleurs. Une étude préparatoire. Mémoire de 1re année du master de Sciences de l'Éducation. UNE, Marseille, Francia.
- Otero, M., Llanos, V. (2011). La enseñanza por REI en la escuela secundaria: desafíos, incertidumbres y pequeños logros al cabo de seis implementaciones. *Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM) y II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (II ENEM)*, 15-23. Núcleo de Investigación en Educación en Ciencias y Tecnología (NIECyT): Tandil, Argentina.
- Ruiz-Higueras, L., García García, F. (2011). Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)*, 14(1), 41-70.
- Ruiz, N., Bosch, M., Gascón, J. (2005). Modelización funcional con parámetros en un taller de matemáticas con Wiris. *I Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico* [en línea] Recuperado el 19 de abril de 2012, de <http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/Comunicaciones.htm>
- Schiller, B. (1994). *Principios esenciales de la economía*. Madrid: McGraw-Hill.
- Serrano, L., Bosch, M., Gascón, J. (2007). “Cómo hacer una previsión de ventas”: propuesta de recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas. *II Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico* [en línea] Recuperado el 19 de abril de 2012, de [http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD\\_II/listado\\_comunicaciones.htm](http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/listado_comunicaciones.htm)

**Verónica Parra.** Lugar de residencia: Tandil. Lugar y fecha de nacimiento: Balcarce, 19/12/1982. Dirección para correspondencia: NIECyT, Departamento de Formación Docente, Facultad de Ciencias Exactas, UNCPBA. Pinto 399, (7000) Tandil, Buenos Aires, Argentina. [vparra@exa.unicen.edu.ar](mailto:vparra@exa.unicen.edu.ar) Centro de trabajo: Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA). Tandil, Buenos Aires, Argentina. Becaria del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Argentina. Títulos: Profesora de Matemática y Licenciada en Educación Matemática por la UNCPBA. Temas de interés: Educación Matemática. Didáctica de la Matemática. Educación Media y Superior.

**María Rita Otero.** Lugar de residencia: Tandil. Lugar y fecha de nacimiento: Tandil, 03/03/1961. Dirección para correspondencia: NIECyT, Departamento de Formación Docente, Facultad de Ciencias Exactas, UNCPBA. Pinto 399, (7000) Tandil, Buenos Aires, Argentina. <http://rotero.sites.exa.unicen.edu.ar/>, [rotero@exa.unicen.edu.ar](mailto:rotero@exa.unicen.edu.ar) Centro de trabajo: Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA). Tandil, Buenos Aires, Argentina. Títulos: Doctor en Enseñanza de las Ciencias. Magister en Educación con Orientación en Psicología de la Educación. Profesor en Matemática y Física. Facultad de Ciencias Exactas. Investigador Independiente del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Director del Núcleo de Investigación en Enseñanza de las Ciencias. Facultad de Ciencias Exactas (NIECyT). Coordinador del Programa de Posgrado en Enseñanza de las Ciencias de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNCPBA.

**María de los Ángeles Fanaro.** Lugar de residencia: Tandil. Lugar y fecha de nacimiento: 27/01/1974. Dirección para correspondencia: NIECyT, Departamento de Formación Docente, Facultad de Ciencias Exactas, UNCPBA. Pinto 399, (7000) Tandil, Buenos Aires, Argentina. [mfanaro@exa.unicen.edu.ar](mailto:mfanaro@exa.unicen.edu.ar). Centro de trabajo: Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA). Tandil, Buenos Aires, Argentina. Títulos: Doctor en Enseñanza de las Ciencias, por la Universidad de Burgos (ESPAÑA). Profesor en Matemática y Física, Facultad de Ciencias Exactas (UNCPBA). Investigador Asistente del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Coordinadora de la Licenciatura en Educación Matemática de la UNCPBA.

