NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 82, marzo de 2013, páginas 65-87

Problemas geométricos de variación y el uso de software dinámico

Armando Sepúlveda López (Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. México)
Verónica Vargas Alejo (Universidad de Quintana Roo. México)
César Cristóbal Escalante (Universidad de Quintana Roo. México)

Fecha de recepción: 28 de septiembre de 2012
Fecha de aceptación: 27 de enero de 2013

Resumen

En este artículo se presentan dos problemas geométricos que involucran la noción de variación, analizados desde la perspectiva de la resolución de problemas y la incorporación del software dinámico como un medio que puede potenciar el aprendizaje de los estudiantes. Los objetivos al presentar un análisis desde diferentes procedimientos de solución a estos problemas son: exhibir distintos acercamientos a situaciones, los cuales puede ir desarrollando el estudiante y el grupo al abordarlas, proporcionar al profesor elementos que le permitan proponer trayectorias hipotéticas del aprendizaje vinculadas con los conceptos y habilidades matemáticas que se requieren para abordar el problema y para comprenderlo, así como proveer de elementos al docente para identificar los momentos en los cuales puede intervenir en el proceso de solución para encauzar o enfatizar conceptos o habilidades matemáticas.

Palabras clave

Resolución de problemas, Trayectorias hipotéticas de aprendizaje, Problemas geométricos, Variación, Tecnología, Diseño de instrucción.

Abstract

In this article we present two geometry problems that involve the notion of variation, we propose Problem solving perspective and the dynamic software as a medium to analyze them and to enhance the student learning. We present different procedures to solve the problems that may be developed by the students and the group, these procedures provide the teacher with information that help him to propose hypothetic learning trajectories related to mathematical concepts and skills needed to address and to understand the problem, and to provide elements to identify the moments in which the teacher can intervene in the process of solution to emphasize concepts or skills.

Keywords

Problem solving, Hypothetical learning trajectories, Geometric problems, Variation, Technology, Instructional design.

1. Introducción

El aprendizaje se concibe como un proceso de desarrollo de sistemas conceptuales en el individuo, que están cambiando continuamente a partir de las interacciones con su entorno. Estos sistemas conceptuales se usan para describir, explicar, comunicar, predecir el comportamiento de otros sistemas. El desarrollo conceptual es un proceso gradual y contextualizado. Las primeras etapas del desarrollo del conocimiento de los estudiantes tienden a organizarse alrededor de las experiencias más que alrededor de las abstracciones. Esto es, dos ideas se consideran relacionadas, no porque están lógicamente conectadas, sino porque ellas se han utilizado conjuntamente en alguna experiencia de resolución de problemas.

El proceso de resolver problemas implica el planteamiento de preguntas y la búsqueda de estrategias para responderlas. Plantearse y responder preguntas va apoyando el desarrollo de la comprensión tanto del problema como del contenido matemático inmerso. Aprender matemáticas no se reduce a aprender conceptos, algoritmos y fórmulas matemáticas, implica desarrollar conocimiento, habilidades y hábitos de la disciplina. Los estudiantes deben aprender a plantear preguntas y responderlas, argumentar, tomar decisiones y evaluar razonamientos. El proceso de enseñanza y aprendizaje utilizando la Resolución de problemas considera que el papel del profesor es esencial para propiciar el desarrollo de conocimiento y habilidades en los estudiantes. La selección y el análisis de las diferentes formas de solución a un problema es una de las tareas que debe realizar el profesor, de acuerdo con las metas de aprendizaje.

En este artículo analizamos dos problemas, susceptibles de ser utilizados en cursos de matemáticas para estudiantes de nivel superior (17-18 años). Estos pueden ser abordados usando diferentes recursos matemáticos, distintas representaciones y la aplicación de distintas heurísticas. El concepto matemático involucrado en ambos problemas, es el de variación; y la tecnología se utiliza como un medio para la exploración de los procesos de solución.

2. Revisión de Literatura

La literatura revisada fue aquella relacionada con: la Resolución de Problemas, que permite explicar los procesos de aprendizaje de los estudiantes, las Trayectorias Hipotéticas del Aprendizaje, que tratan sobre aspectos relacionados con el diseño y planeación de los procesos de enseñanza de las matemáticas; y con la incorporación de la tecnología para promover el aprendizaje matemático.

2.1. Resolución de problemas

La Resolución de problemas (Polya, 1945; Schoenfeld, 1992; NCTM, 2000) señala que Aprender matemáticas va más allá de memorizar un conjunto de definiciones, algoritmos y técnicas para resolver problemas rutinarios. Resolver un problema permite formular constantemente preguntas, utilizar distintas representaciones, buscar relaciones y formas de sustentarlas, así como la necesidad de comunicar resultados y la reconstrucción individual del problema. Polya (1945) diseñó un método para resolver problemas de matemáticas, el cual consiste en cuatro fases:

1. Entender el problema. Sugiere que el interesado en resolver un problema de matemáticas, primero debe pasar por un proceso de entendimiento del enunciado y plantea una serie de preguntas encaminadas a ese fin.
2. Diseñar un plan de solución. Aquí sugiere, a través de preguntas, la realización de acciones encaminadas a obtener pistas que conduzcan a la solución; acciones que Polya identificó como estrategias heurísticas.
3. Llevar a cabo el plan de solución. En la ejecución del plan interviene, necesariamente, la experiencia del sujeto que, a su vez, promueve el desarrollo de la capacidad de monitorearse a sí mismo y controlar sus acciones futuras para resolver problemas.
4. Hacer una revisión del trabajo realizado. Se trata de verificar y comprobar el resultado para detectar inconsistencias y compatibilidad de la solución.

El método de Polya (1945, 1980) contiene una *lista* de preguntas, sugerencias y recomendaciones "típicas" como las que debería seguir una persona para resolver problemas. Polya sugiere al estudiante que se plantee preguntas como: *¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Conoce algún problema parecido? ¿Ha visto esto antes? ¿Qué teorema o propiedades se conocen relacionadas con el problema?…* entre otras. Todas ellas son invitaciones para que el estudiante *conciba un plan de solución* y utilice procedimientos heurísticos como: *trazar una figura*, *tomar casos particulares*, *elaborar una tabla*, y muchos otros cuya finalidad es *llevar a cabo el plan* concebido.

Los métodos heurísticos (o estrategias heurísticas) más usuales, contemplados por Polya (1945) son: *Tomar casos particulares*; *Usar analogías*; *Establecer sub metas*; *Simplificar un problema*; *Hacer un dibujo*; *Regreso a las definiciones* (en ocasiones el problema ya está resuelto, pero estamos perdidos, regresar al enunciado, definiciones, supuestos nos permite evaluar si hemos llegado a la solución). Las siguientes dos estrategias son más propias de la geometría y el uso de ellas fue el paso clave para la solución de algunos problemas abordados en este trabajo. *Establecer una simetría* y *Realizar una rotación*.

Las características típicas del pensamiento matemático identificadas por Schoenfeld (1992), y en las cuales coinciden Steen (1990) y Mason, Burton y Stacy (1987), son: considerar casos particulares, descubrir patrones y relaciones, plantear conjeturas, hacer generalizaciones y justificar resultados. Regularmente, estas estrategias aparecen acompañadas del uso de recursos matemáticos, o implícitamente forman parte de ese uso; de manera que en ese proceso se está en posibilidades de irse adentrando en la realización de prácticas consistentes con el quehacer matemático.

2.2. Trayectorias Hipotéticas del Aprendizaje

¿Cómo lograr en el salón de clases que los estudiantes desarrollen conocimiento matemático y las heurísticas ya discutidas? Con el propósito de estar en mejores condiciones de llevar a cabo el proceso de enseñanza aprendizaje, Simon (1995, 2004) propone que el profesor de matemáticas anticipe lo que puede ocurrir en el salón de clases, mediante una planificación sobre los aspectos clave que debe considerar para que se desarrolle el conocimiento en los estudiantes. Propone la elaboración de *Trayectorias hipotéticas del aprendizaje* (HLT, por sus siglas en inglés: Hypothetical Learning Trajectories) para propiciar el aprendizaje de las matemáticas.

Para elaborar una HLT (Simon 1995) los siguientes aspectos son importantes: metas de aprendizaje, actividades o tareas de aprendizaje, el proceso hipotético del aprendizaje de los estudiantes y la evaluación del conocimiento de los estudiantes. La Figura 1 muestra en un esquema la relación entre estas componentes que integran el diseño de un proceso de enseñanza de las matemáticas. En este proceso, la HLT juega el papel equivalente al planteamiento de hipótesis en un proyecto de investigación; corresponde a la situación hipotética previa de anticipar los posibles caminos por los que se puede desarrollar el conocimiento.

El objetivo del profesor respecto a los conocimientos que desea desarrollar en los estudiantes proporciona una dirección para la selección de las tareas, las cuales son seleccionadas con base en el conocimiento del profesor sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Es decir, hay una interdependencia entre estos tres aspectos.

La generación de una HLT se basa en la comprensión de los conocimientos actuales de los estudiantes involucrados; y sirve como un vehículo para la planificación del aprendizaje de conocimientos matemáticos. Las tareas son una parte clave del proceso de instrucción, debido a que proporcionan las herramientas para promover el aprendizaje de determinados conceptos matemáticos. Debido a la naturaleza hipotética e incierta del proceso de aprendizaje, el profesor participa con regularidad para modificar cada aspecto de la HLT, considerando la meta y trayectoria seguida (Simon, 1995). El conocimiento profundo del profesor sobre las tareas que utilizará, el análisis de los acercamientos posibles y las distintas soluciones, así como el nivel de dominio de los contenidos matemáticos, constituyen el inventario de los elementos que se deben considerar en el esquema de la Figura 1. En este artículo nos quedamos en el análisis de las actividades seleccionadas; la implementación con los estudiantes y la evaluación de los conocimientos adquiridos, ameritaría otro artículo.

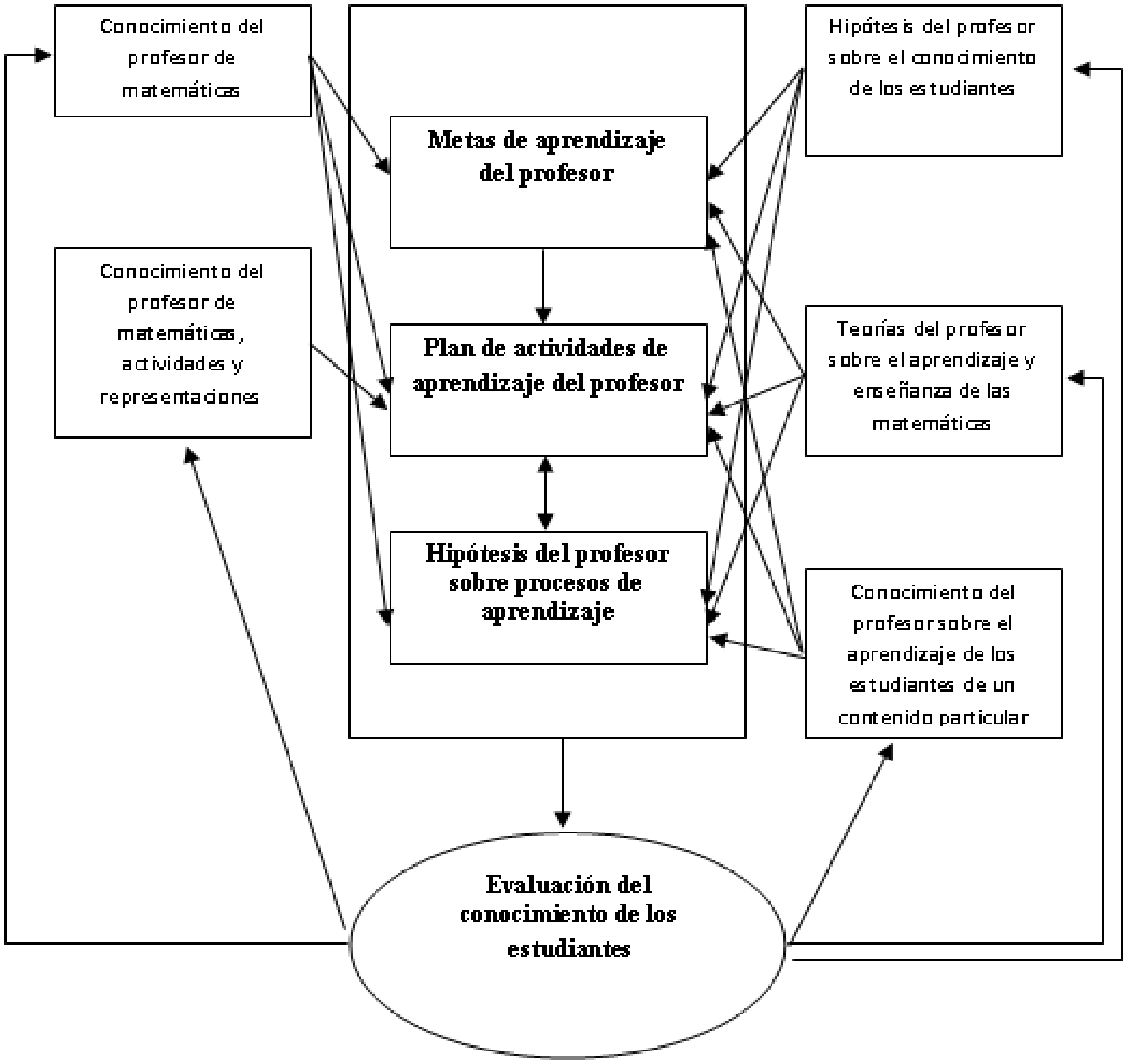


Figura 1. Ciclos de enseñanza de las matemáticas, establecidos por Simon (1995).

2.3. Uso de la tecnología

El desarrollo de herramientas computacionales ha influido notablemente tanto en los métodos y caminos para producir conocimiento disciplinar, como en la forma en que los estudiantes pueden aprender o construir ese conocimiento. En este sentido, el NCTM (2000, p. 43. -National Council of Teachers of Mathematics) establece que “la tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Influye en las matemáticas que se enseñan en la escuela y puede aumentar las posibilidades de aprendizaje de los estudiantes”. También, sugiere que en lugar de dedicar tanto tiempo a los algoritmos debería invertirse más tiempo y esfuerzo para que los estudiantes adquieran estructuras conceptuales mediante exploraciones, basadas en experiencias numéricas y geométricas, aprovechando las posibilidades que proporciona el uso de la tecnología (Santos y Barrera, 2011).

El software de geometría dinámica Cabri géomètre puede considerarse como un "mediador en el proceso de aprendizaje" (Laborde y Laborde, 1995) ya que permite realizar construcciones geométricas manteniendo el dinamismo de las figuras y la aplicación de algunas transformaciones. Constituye un entorno de aprendizaje dinámico en el que algunas partes de las figuras creadas en la pantalla de una computadora, pueden ser alteradas mientras otras permanecen invariables. Cada figura geométrica representa una clase de construcción con propiedades geométricas comunes; la observación de un gran número de estas figuras con propiedades comunes, permite a los estudiantes construir sus propias abstracciones respecto a los conceptos geométricos involucrados.

El software puede también considerarse como "procesador de ideas matemáticas" (Goldenberg, 2000), en el sentido en que los estudiantes producen ideas, las expresan, desarrollan y editan. El trazo de objetos geométricos que se visualizan en pantalla, permite al usuario manipular y deformar figuras, corregirlas, obtener tablas, entre otras cosas; un seguimiento de los cambios que se producen en estas transformaciones puede conducir a conjeturar propiedades invariantes de figuras. Después de hacer una construcción, o tomar una figura hecha, se pueden mover libremente ciertos elementos de un dibujo y observar cómo se van transformando otros elementos. Mientras que los elementos libres se mueven en el dominio en el cual existen, el software mantiene todas las relaciones que fueron especificadas como atributos esenciales de la construcción original.

Algunas características que tienen los software dinámicos como Cabri géomètre o Geogebra son: a) Puede ayudar a los estudiantes a explorar y construir conjeturas. b) Permite hacer simulaciones de los problemas matemáticos para ayudar a encontrar relaciones. c) Posibilita un acercamiento gráfico a la solución de problemas de variación. d) Permite el empleo de diferentes registros de representación (verbal, gráfico, tabular, geométrico).

La importancia del uso de la tecnología en el estudio y el aprendizaje de las matemáticas, tiene que ver con el uso y externalización de distintas representaciones de una situación. En este contexto, Duval (1996) en su teoría sobre los registros semióticos de representación, asigna primordial importancia al uso de diferentes representaciones para aprender los conceptos involucrados. Estas representaciones pueden ser generadas por el aprendiz a través del lenguaje oral, escrito o los medios tecnológicos; o bien, una mezcla de ellos. Un sistema de registros semióticos de representación se conforma cuando es posible realizar tres actividades cognitivas ligadas con la semiosis (aprehensión o producción de una representación semiótica): identificación, tratamiento y conversión. Un sujeto ha aprendido un concepto en la medida en que realiza estas actividades y transita libremente de un registro de representación a otro.

En este artículo seguimos esta recomendación e incorporamos el uso del software dinámico como Cabri y Geogebra que potencian las posibilidades de representación y dinamismo, lo cual hace que estos medios se conviertan en una herramienta de aprendizaje. En el marco del modelo de Simon (1995) se discuten los problemas o tareas geométricas que aquí se proponen para el desarrollo de conocimientos, habilidades y hábitos matemáticos en los estudiantes, alrededor del concepto de variación. Este análisis proporciona elementos para que el profesor estructure posibles Trayectorias Hipotéticas del Aprendizaje de los estudiantes. Los procedimientos de solución de los problemas se discuten con base en los aspectos señalados en la Resolución de Problemas (Polya, 1945; Schoenfeld, 1992).

3. Estudio y desarrollo de problemas de variación

Los problemas que aquí se analizan son identificados como de optimización en los libros de texto. El concepto de variación está implícitamente involucrado en ellos y se asocia con otros conceptos matemáticos como: función, crecimiento, razón de crecimiento y límite. La variación es una medida del cambio. El cambio es la esencia de la actividad matemática. Partimos de que la variación y los otros conceptos matemáticos involucran el desarrollo de nociones y herramientas representacionales y procedimentales cuyo manejo apropiado requiere de entendimiento conceptual.

Durante el proceso de solución destacamos estrategias heurísticas, el tipo de recursos matemáticos y el tipo de preguntas que puede plantear el docente a su grupo para analizar el problema, complejizarlo y apoyar el surgimiento de diferentes procesos de solución, y por lo tanto, el desarrollo de conocimiento matemático. Este análisis es de utilidad para el diseño de varias HLT's.

3.1. Problema de los postes

En este apartado se aborda un problema típico de optimización que aparece, en diferentes contextos, en la mayoría de los libros de Cálculo. El contexto en que se presenta este problema da origen al nombre que se ha elegido para su denominación Problema de los postes, que consiste en: cómo sujetar al piso con un alambre de acero, dos postes de diferente altura en una banqueta lineal de modo que se use la menor cantidad de alambre posible; pero puede ser presentado en términos de un bombero que requiere ir por agua a un río o de un pozo petrolero y una plataforma en el litoral, entre otros. Es un problema de variación en el que hay una relación de dependencia entre las variables involucradas. El problema es abordado desde diferentes perspectivas; veremos que en el acercamiento geométrico, la heurística de la simetría permite resolverlo casi de manera inmediata y, más aún, no se requiere de la asignación de medidas, ni de encontrar explícitamente las coordenadas del punto solución.

Problema 1

Una compañía de líneas de transmisión eléctrica desea sujetar dos postes, de diferente altura, con un cable de acero que va de la parte superior de cada uno de ellos a un punto en el piso que está en la recta determinada por sus bases. La altura del poste AB es b y la altura del poste DC es c (Figura 2). ¿Cuál es el punto de sujeción en el piso, entre A y D, con el que se utiliza la menor cantidad de cable de acero?

Entendimiento del Problema 1

Para comprender el problema, los estudiantes podrían empezar con la elaboración de dibujos en lápiz y papel (Figura 2) y considerar lo siguiente. Sean $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ los postes de altura b y c, L la recta en el piso que pasa por A y D, los puntos B y C representan la parte superior de cada uno de los postes. El cable debe ir de B, llegar a un punto P sobre L y luego a C, lo cual se puede hacer de muchas formas. Los estudiantes podrían preguntarse lo siguiente, o bien el profesor podría inducir una discusión alrededor de las siguientes preguntas ¿cuál sería la longitud del cable? ¿Esta longitud es la misma independientemente de dónde se ubique el punto P? ¿Conviene tomar el punto medio de AD? ¿Existe un punto donde la longitud del cable es mínima, dónde es máxima?; si existe, ¿qué trazo puede ayudar a encontrarlo? etc. Responder estas preguntas sería parte de la comprensión del problema y permitiría continuar con el proceso del diseño del plan de solución, ejecución y revisión de los pasos que se han dado.

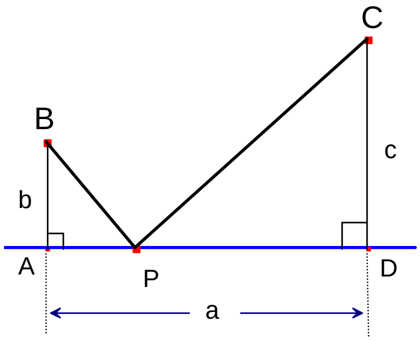
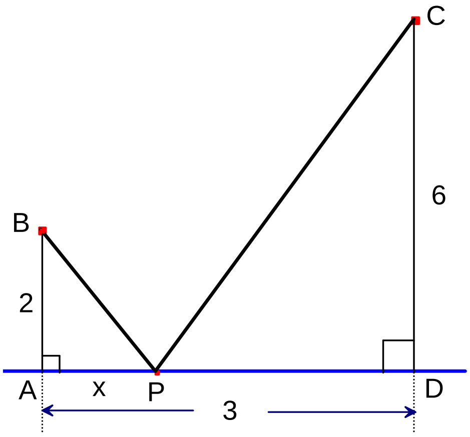


Figura 2. Ilustración del Problema de los postes.

3.1.1. Acercamiento con el método numérico

Inicialmente, los estudiantes podrían utilizar un acercamiento mediante método numérico. Sea $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *y* $\boldsymbol{c}$ las longitudes de los segmentos $\overline{AD}, \overline{AB},$ y $\overline{DC}$, respectivamente (Figura 1). Los estudiantes podrían dar valores particulares a $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$, por ejemplo: $\boldsymbol{a = 3}$, $\boldsymbol{b = 2}$ *y* $\boldsymbol{c = 6}$, con una regla graduada y considerando varias posiciones para el punto P de sujeción y registrando en una tabla los resultados de las mediciones; se podrían obtener resultados como los de la Figura 3.



a)

AP	BP + PC
0,18	8,64
0,50	8,56
0,66	8,55
1,00	8,56
1,26	8,61
1,50	8,68
2,00	8,91
2,50	9,22

b)

Figura 3. Representación gráfica y tabular del Problema de los postes.

Es importante que los estudiantes observen que la longitud del cable depende del punto de sujeción. En particular, si se evalúa la longitud del cable para los pies de las perpendiculares de $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ al piso, se obtienen los valores posibles entre los que pudiera estar el punto P. La Figura 4 muestra longitudes para estos puntos y un valor que se tiene cuando P no está entre *A* y *D*. Así, si existe algún punto P para el cual la longitud es mínima, los estudiantes deben notar que éste debe estar entre *A* y *D* y dar argumentos de ¿por qué?

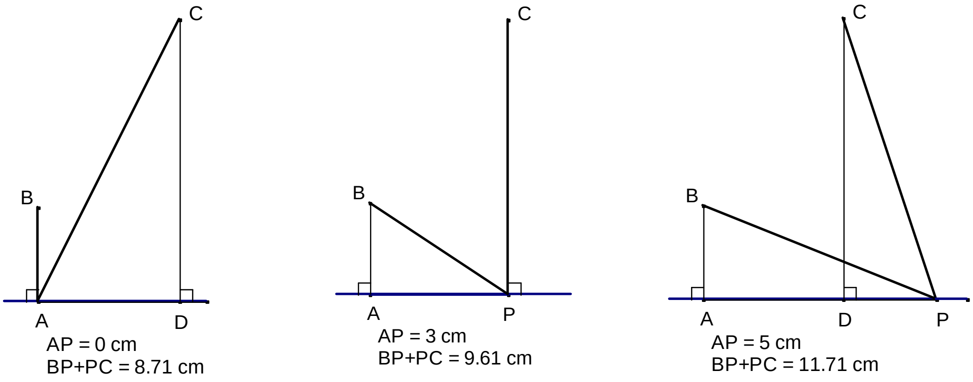


Figura 4. Longitudes del cable para posiciones distintas de P.

Los estudiantes deberían preguntarse ¿En qué punto P del piso se debe sujetar el cable para que la longitud total del cable sea mínima? El profesor debería propiciar el surgimiento de esta pregunta y de la observación de que el uso de lápiz, papel y una regla nos permite probar para varios casos; sin embargo, no estaremos seguros que la longitud total encontrada sea la mínima posible.

Es importante destacar que la estrategia heurística utilizada en este apartado 3.1.1 fue la "toma de casos particulares". Para tener éxito en la solución siguiendo este acercamiento, la perseverancia es indispensable; ya que se necesita calcular ***BP* + *PC*** para distintas posiciones de P, insistir con esta suma en el intervalo donde resulten los valores más pequeños para ella; además de dividir el segmento AD de una manera apropiada para tener la precisión deseada, estando convencidos que la solución se encuentra en este segmento.

3.1.2. Desarrollando la visualización con Cabri géomètre

Usando este software de geometría dinámica se puede representar la situación trazando una recta L y dos puntos B, C del mismo lado de la recta. Para ello, el estudiante podría llamar ahora P a un punto sobre la recta, trazar los segmentos BP y PC y medir la longitud de estos segmentos; con la calculadora podría encontrar $\boldsymbol{BP+PC=d}$ (Figura 5), y observar que si P cambia de posición, d también cambia. Cuando P se mueve a la izquierda de A o a la derecha de D, la suma $\boldsymbol{BP+PC=d}$ se hace muy grande, así que la longitud mínima (si es que existe) está entre A y D (Figura 6).

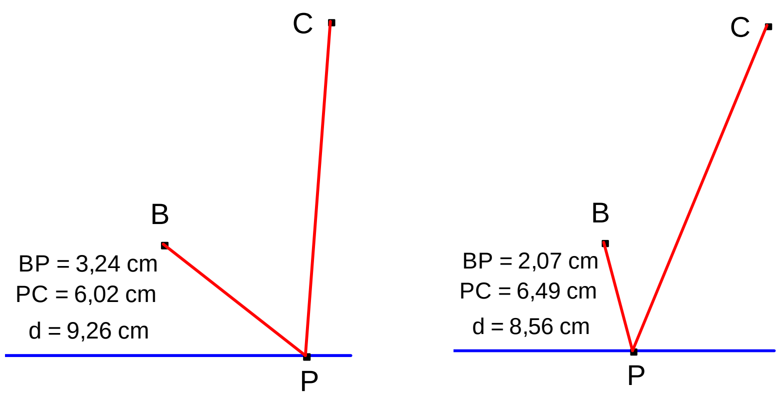


Figura 5. Valores que toma ***d***, obtenidos con el software.

Con este software los estudiantes pueden trazar la gráfica de ***d*=*BP*+*PC*** (variable *y*), con AP como variable independiente $\boldsymbol{x}$, en la cual se puede observar que, efectivamente, ***BP*+*PC*** tiene un valor mínimo. En la Figura 6 se muestran las coordenadas del punto sobre L donde posiblemente se encuentra ese valor mínimo. Nótese que si P está a la izquierda o a la derecha de A, a la misma distancia, el software da dos valores para *d*; por esta razón, la gráfica obtenida no corresponde a una función. En este caso, debe descartarse la línea que queda por encima.

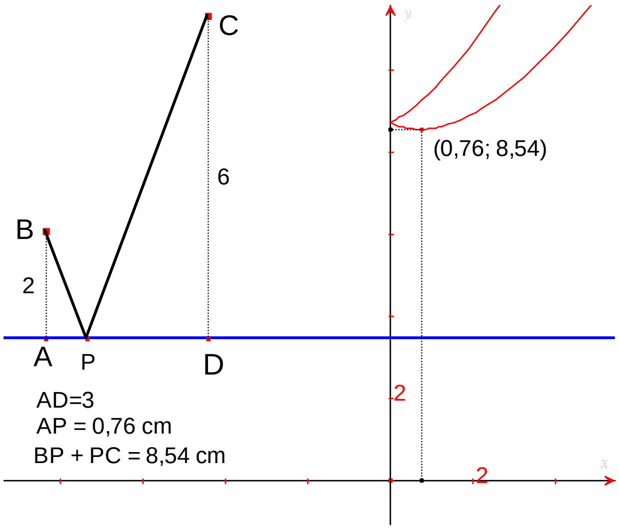


Figura 6. Ilustración del problema y lugar geométrico determinado por P.

En este tipo de procedimiento es importante destacar el uso de recursos de los estudiantes. Desde luego que el conocimiento y habilidad para trabajar con el software, son aspectos esenciales para tener éxito con este acercamiento. Se requiere de conocimientos mínimos del software como saber hacer los trazos necesarios y determinar cuáles son los objetos libres en el dibujo, pero a su vez, el tipo de interacción de los estudiantes con el software puede ser orientado hacia el conocimiento mayor de éste, la comprensión de los conocimientos matemáticos involucrados y el mismo problema.

3.1.3. Solución usando herramientas de Cálculo diferencial

Los estudiantes podrían proceder a hacer un dibujo similar al de la Figura 3. Sea P en el intervalo (A, D) el punto de sujeción. En dicha figura, se tienen los triángulos rectángulos ABP y DCP, la suma de las hipotenusas de estos triángulos será la longitud del cable de acero. Si se sitúa el origen del sistema de ejes coordenados *x*-*y* en el punto A (Figura 2); la recta L es ahora el eje *x* como se ve en la Figura 7.

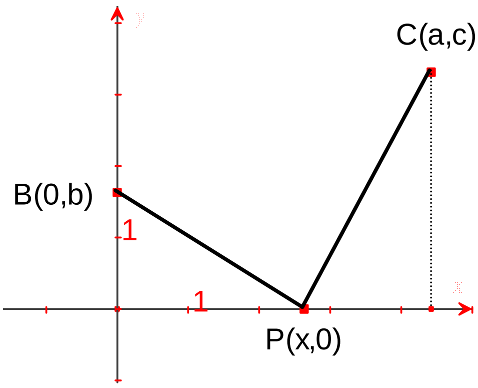


Figura 7. Obtención de la longitud $d(x)=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{(3-x)^2+36}; a=3, b=2, c=6$.

El profesor debería propiciar que los estudiantes construyeran una función que determinara la distancia $BP + PC$.

Sea $d = BP + PC$, entonces

$$d(x) = \sqrt{x^2 + b^2} + \sqrt{(a-x)^2 + c^2} \qquad (1)$$

Derivando *d(x)* e igualando a cero, se encuentran los posibles valores críticos de la función, y se considera que $(x-a)^2 = (a-x)^2$:

$$d'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}} + \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+c^2}} = \frac{x\sqrt{(x-a)^2+c^2} + (x-a)\sqrt{x^2+b^2}}{\sqrt{x^2+b^2}\,\sqrt{(x-a)^2+c^2}} = 0$$

de donde resulta:

$$x\sqrt{(x-a)^2+c^2} = (a-x)\sqrt{x^2+b^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de esta ecuación:

$$x^2\left|(x-a)^2+c^2\right| = (x-a)^2(x^2+b^2)$$

De donde resulta la ecuación cuadrática:

$$x^2(b^2-c^2) - 2ab^2x + a^2b^2 = 0 \qquad (2)$$

Resolviendo para *x* la ecuación (2), las abscisas de los puntos críticos pueden ser:

$$x_1 = \frac{ab}{b-c}; \; y \; x_2 = \frac{ab}{b+c}$$

Al sustituir estos valores en $d'(x) = 0$, el estudiante debería observar que x_1 no corresponde al valor crítico; en cambio, x_2 es un valor crítico.

Se puede aplicar el criterio de la primera derivada (para observar intervalos de crecimiento de la función) o bien se aplica el criterio de la segunda derivada para saber si ***d(x)*** tiene mínimo o máximo en x_2:

$$d''(x) = \frac{b^2}{(x^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{c^2}{[(x-a)^2+c^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Evaluando en $x_2 = \dfrac{ab}{b+c}$:

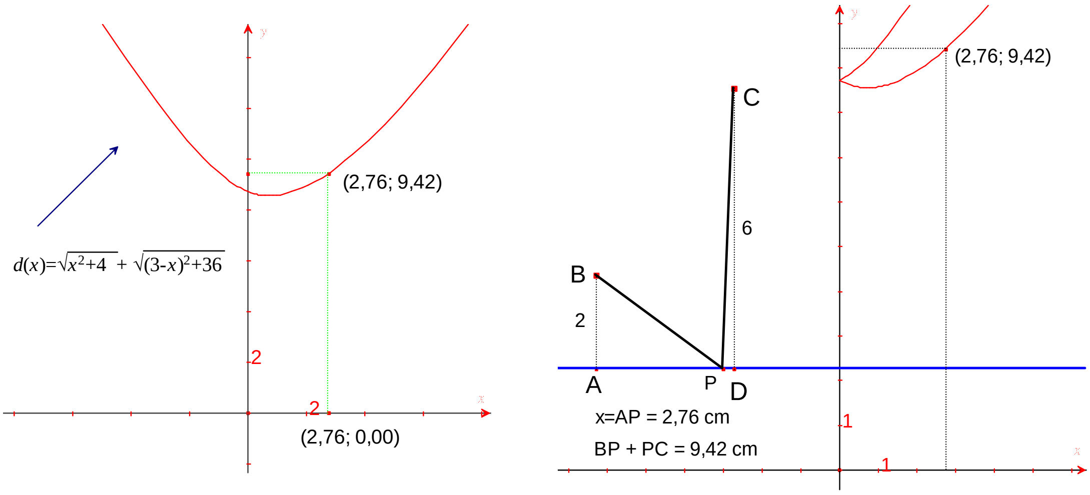
$$d''\left(\frac{ab}{b+c}\right) = \frac{(b+c)^4}{bc[a^2+(b+c)^2]^{\frac{3}{2}}} > 0$$

Los estudiantes deberían observar que la segunda derivada es positiva porque *b* y *c* son positivas (son distancias), por lo que $d(x)$ tiene un mínimo en $x_2 = \dfrac{ab}{b+c}$. Es decir, $d(x)$ va a ser mínima en el punto P que esté a una distancia $\dfrac{ab}{b+c}$ de A. Si $a = 3, \quad b = 2 \quad y \quad c = 6$, entonces

$$x = \frac{(2)(3)}{2+6} = \frac{3}{4}$$

El profesor debería considerar y discutir con los estudiantes lo siguiente:

1. La solución exacta es para $x = 0,75$, y con Cabri se encuentra que el mínimo se alcanza en $x = 0,76$. Esto se debe a la manera en que está elaborado el software y su grado de precisión.
2. Si se grafica la función $d(x) = \sqrt{x^2 + b^2} + \sqrt{(a-x)^2 + c^2}$ utilizando los procedimientos ordinarios del cálculo, se obtiene la Figura 8a), mientras que con Cabri se obtiene la Figura 8b), y solicitar a los estudiantes explicar esta diferencia.



a) b)

Figura 8. Gráficas de $d(x)$, obtenidas por dos distintos medios.

Esto pasa porque en a) los valores de *x* son positivos y negativos; en cambio, para b) tenemos distancias, por lo que *x* sólo toma valores positivos. Además, un valor de *x* lo tenemos de dos formas: estando P a la derecha y a la izquierda de A (Figura 9); por lo tanto, para cada valor de *x* tenemos dos valores para *y*.

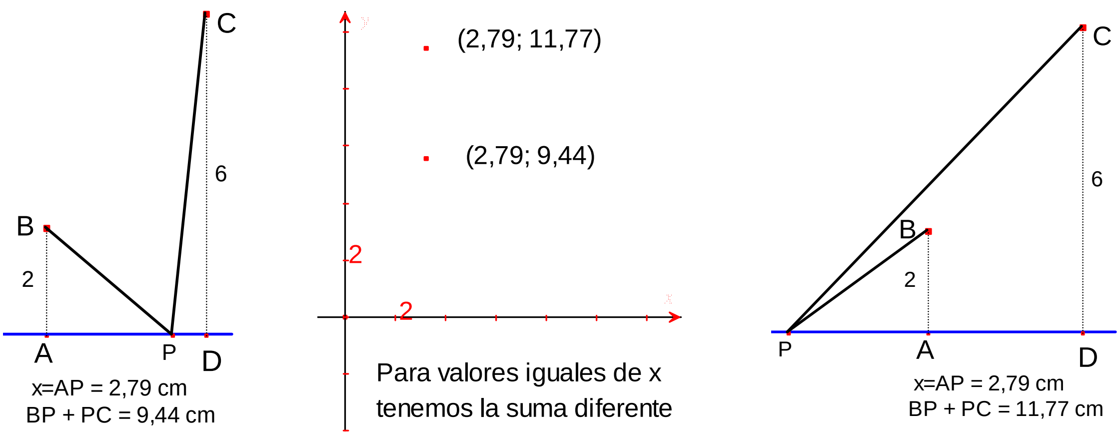


Figura 9. Si *P* es simétrico respecto de *A*, el software toma el mismo valor para x, originando dos resultados diferentes para la suma de distancias *BP+PC*.

3. Podemos asegurar que el mínimo de $d(x)$ no está en los extremos del intervalo $[A,D]$, puesto que se cumple lo siguiente:

$$d'(A)=\frac{0}{\sqrt{0^2+b^2}}+\frac{0-a}{\sqrt{(0-a)^2+c^2}}<0 \qquad (I)$$

$$d'(D)=\frac{a}{\sqrt{0^2+b^2}}+\frac{a-a}{\sqrt{(0-a)^2+c^2}}>0 \qquad (II)$$

Para confirmar esto, basta con argumentar lo siguiente:

El mínimo no se alcanza en A; pues si lo hiciese, como $d(x)$ es derivable en $[A,D]$, entonces tendríamos que:

$$\forall h>0, d(A+h)\geq d(A)\Rightarrow \frac{d(A+h)-d(A)}{h}\geq 0 \;\therefore\; d'(A)\geq 0$$

lo cual contradice (I).

De igual manera, si el mínimo estuviera en D se tendría que:

$$\forall h>0, d(D-h)\geq d(D)\Rightarrow \frac{d(D-h)-d(D)}{-h}\leq 0;\; es\;\; decir,\;\; si\;\; k=-h:$$

$$\frac{d(D+k)-d(D)}{k}\leq 0 \;\therefore\; d'(D)\leq 0$$

lo cual contradice (II).

Finalmente, como $d(x)$ es continua en $[A,D]$, entonces $d(x)$ alcanza su mínimo en $[A,D]$. Si el mínimo no está en A y tampoco en D entonces, por el Teorema de Rolle, existe $x\in(A,D)$ tal que $d'(x)=0$.

Con este procedimiento se puede observar que la estrategia heurística utilizada, básicamente, consiste en usar analogías con problemas habituales desarrollados en cursos y libros de Cálculo, donde se establece una función que modele la situación y optimizar. Los recursos necesarios en este acercamiento son: proponer una función que modele un fenómeno, calcular derivadas sucesivas de una función, racionalizar y resolver ecuaciones cuadráticas y lineales, evaluar funciones; además, se debe conocer el criterio de la primera y segunda derivada para una función.

3.1.4. Solución geométrica

El profesor también podría propiciar la aplicación de un procedimiento geométrico para resolver este problema, lo cual puede lograrse sin encontrar explícitamente el valor de *x*. En este caso, se podrá observar la potencia del acercamiento geométrico, que, básicamente, depende de la aplicación de la estrategia heurística de la simetría y del Teorema de la desigualdad del triángulo.

El primer dibujo de los estudiantes podría ser el señalado en la Figura 2. Siendo L la recta determinada por las bases de los postes A y D, y los puntos B y C las partes superiores de los mismos, se localiza C' (simétrico de C respecto a L) y se traza PC' como se muestra en la Figura 10 a); por el criterio de congruencia LAL, se forman los triángulos congruentes CDP y C'DP. Entonces PC = PC', luego:

$$BP + PC = BP + PC'$$

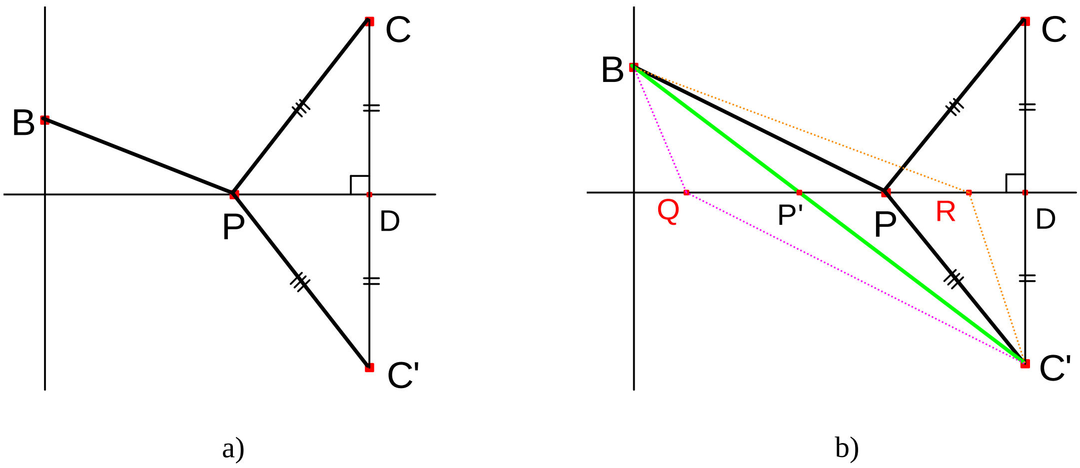


Figura 10. Ilustración de algunas alternativas de la ubicación de P.

Sea P' la intersección de BC' con la recta L, por el teorema de la desigualdad del triángulo, BC' es menor que cualquier otra manera para ir de B a C'. La Figura 10b) muestra otras formas de llegar de B a C'. Por ejemplo, en ΔBQC', ***BC'<BQ+QC'***. Por lo que la longitud mínima de B a C pasando por un punto P de L, se da cuando P coincide con P'.

La estrategia heurística utilizada en este procedimiento consistió en establecer la simetría de un punto respecto a una recta. El uso de recursos requeridos fueron: Congruencia de triángulos, Teorema de la desigualdad del triángulo.

Una vez obtenida la solución, se puede proceder a encontrarla distancia AP. Para ello se puede propiciar el trazo de EC' paralelo a AD (Figura 11a), entonces se tendría que los triángulos ABP y EBC' son semejantes por criterio de semejanza AAA, y se cumple que:

$$\frac{AP}{EC'} = \frac{AB}{EB} \Rightarrow AP = \frac{AB}{EB}(EC') = \frac{ab}{b+c};$$

lo cual coincide con la solución anterior.

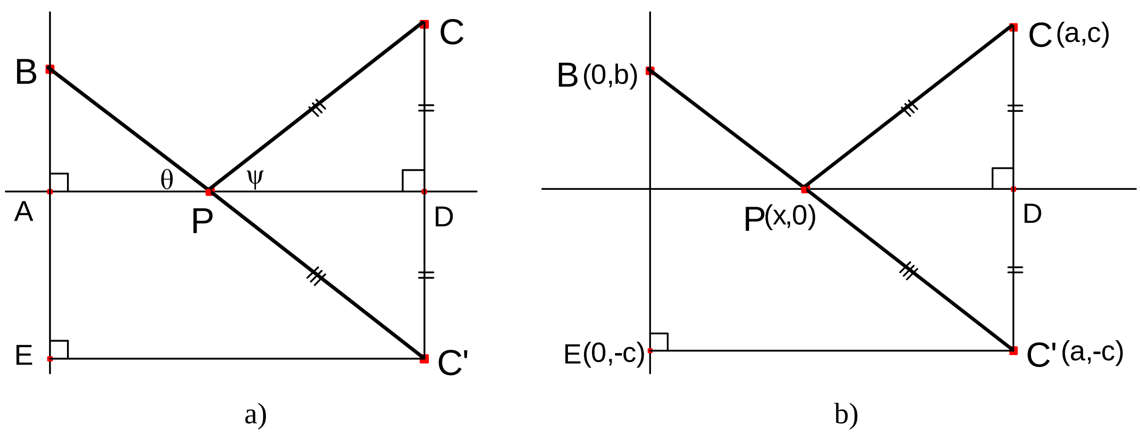


Figura 11. Esquema de da la solución.

Ahora bien, para que los estudiantes encuentren la distancia ***x=AP***, pueden situar los ejes *x-y* con el origen en el punto *A* (Figura 11b). Como ***d = BP + PC***, entonces:

$$\sqrt{x^2+b^2}+\sqrt{(a-x)^2+c^2}=\sqrt{a^2+(b+c)^2}$$

Elevando al cuadrado, despejando y reduciendo:

$$\sqrt{(x^2+b^2)[(a-x)^2+c^2]}=bc+ax-x^2$$

Elevando nuevamente al cuadrado, despejando y reduciendo tenemos:

$$x^2(b+c)^2-2abx(b+c)+a^2b^2=0$$

Resolviendo la ecuación:

$$x_1=x_2=\frac{ab}{b+c}$$

La estrategia sugerida para encontrar la distancia *x* fue igualar dos expresiones a un mismo segmento; y el uso de recursos fue: Herramientas utilizadas: Distancia entre dos puntos, simplificar la expresión de una función, resolver ecuaciones cuadráticas.

Ahora bien, observemos que en el punto solución los ángulos θ y ψ son iguales (Figura 11a), pues $\angle APB=\angle DPC'$, por ser opuestos por el vértice, y considerando que $\Delta DPC'=\Delta DPC$, se tiene que $\angle DPC'=\angle DPC$. Por transitividad, $\angle APB=\angle DPC$; es decir, $\theta=\psi$.

3.2. Problema del Cuadrado inscrito

Se aborda un problema de geometría, que demanda de quien lo resuelve la comprensión de las propiedades de un cuadrado. Es un problema de variación en el cual se observa una relación de dependencia entre las variables involucradas. El problema se aborda desde diferentes perspectivas, numérica, algebraica y geométrica. Un aspecto que se desea remarcar es la necesidad que existe por propiciar que los estudiantes argumenten sus propios procedimientos.

Problema 2

Dado el cuadrado $ABCD$ (Figura 12), construye un cuadrado $EFGH$ inscrito en él.

Indicaciones: ¿Dónde ubicarías los vértices de este nuevo cuadrado $EFGH$? ¿Qué propiedades tiene un cuadrado? ¿Cómo convencerías a alguien de que tu construcción corresponde a un cuadrado, qué argumentos matemáticos le darías?

a) *¿A qué distancia de los vértices del cuadrado $ABCD$ ubicaste los vértices del cuadrado $EFGH$?*
b) *¿Hay más cuadrados que puedan inscribirse dentro del cuadrado $ABCD$? Construye otro. ¿Cuántos cuadrados más pueden inscribirse al cuadrado $ABCD$? Argumenta tu respuesta y construye otros.*
c) *¿Qué relación hay entre los nuevos cuadrados construidos y el cuadrado inicial $ABCD$, en cuanto a la ubicación de sus vértices? ¿Qué relación hay entre los*

nuevos cuadrados y el cuadrado inicial $ABCD$ *en cuanto a la longitud de sus lados? ¿Qué relación hay entre los nuevos cuadrados y el cuadrado inicial* $ABCD$ *en cuanto a su área?*

d) *¿Varía el área de los diferentes cuadrados inscritos o es constante? Si varía ¿cómo varía? ¿Hay un cuadrado inscrito cuya área sea mínima? ¿Cuál es el cuadrado inscrito de área mínima? Constrúyelo.*

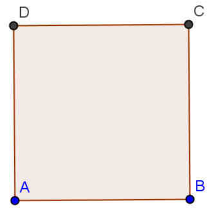


Figura 12. Cuadrado *ABCD*.

Entendimiento del Problema 2

El estudiante puede llevar a cabo la construcción con lápiz y papel, o bien el docente puede sugerir el uso de algún software como Cabri géomètre o bien Geogebra (en este artículo también se incluirán trazos hechos con Geogebra). Una primera construcción podría generarse a partir de una construcción de un cuadrilátero cualquiera inscrito dentro de un cuadrado $ABCD$ (Figura 12). La identificación de los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ del cuadrado $ABCD$ (Figura 13) como posibles vértices de un nuevo cuadrado $EFGH$ inscrito, en el cuadrado dado, sería un procedimiento que cumpliera las condiciones pedidas en el Problema 2. De acuerdo con Ruiz (2012) este es el primer procedimiento de los estudiantes mediante el uso de Geogebra, algunos inclusive en lápiz y papel. Una descripción detallada de cómo pueden proceder los estudiantes para inscribir cuadrados dentro de un cuadrado dado, mediante el uso de Geogebra y con la ayuda del docente, puede verse en Ruiz (2012).

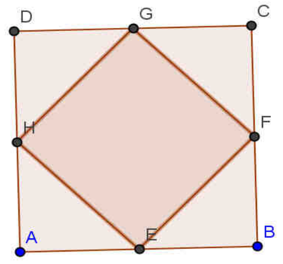


Figura 13. Cuadrado *EFGK* inscrito dentro del cuadrado *ABCD*.

Argumentación de la construcción

La argumentación de los estudiantes para mostrar que la construcción $EFGH$ es un cuadrado y responder a la pregunta: ¿Cómo convencerías a alguien de que tu construcción del cuadrilátero $EFGH$ es un cuadrado, qué argumentos matemáticos le darías? puede centrarse en las mediciones de las longitudes de los lados y los ángulos del cuadrado inscrito, inclusive en la medición de sus diagonales, ya sea que midan con regla graduada en ambiente de lápiz y papel o con el uso de algún software como Geogebra, por ejemplo.

Sin embargo, podrían intentar una demostración menos informal basada en la construcción del cuadrilátero inscrito $EFGH$ con $\overline{AE} \cong \overline{EB} \cong \overline{BF} \cong \overline{FC} \cong \overline{CG} \cong \overline{GD} \cong \overline{DH} \cong \overline{HA}$, y $m\angle A = m\angle B = m\angle C = m\angle D = 90º$. Lo anterior permite determinar la congruencia de los ΔGDH, ΔHAE, ΔEBF, ΔFCG, es decir, $\Delta GDH \cong \Delta HAE \cong \Delta EBF \cong \Delta FCG$. Además, la suma de ángulos suplementarios como $m\angle HEA + m\angle HEF + m\angle FEB = 180º$ permitiría argumentar que

$$\overline{EF} \cong \overline{FG} \cong \overline{GH} \cong \overline{HE} \text{ y}$$

$$m\angle FGH = m\angle GHE = m\angle HEF = m\angle EFG = 90º$$

Cuando E, F, G, H, son puntos medios de los segmentos correspondientes $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ que determinan al cuadrado $ABCD$. El Teorema de Pitágoras sería otra alternativa para la argumentación en cuanto a demostrar la congruencia de los segmentos $\overline{EF} \cong \overline{FG} \cong \overline{GH} \cong \overline{HE}$.

La pregunta ¿A qué distancia de los vértices del cuadrado $ABCD$ ubicaste los vértices del cuadrado $EFGH$? tiene como objetivo que los estudiantes observen la construcción previa realizada y dar paso a la construcción de nuevos cuadrados inscritos (para contestar las preguntas del inciso b) al cuadrado $ABCD$ dado.

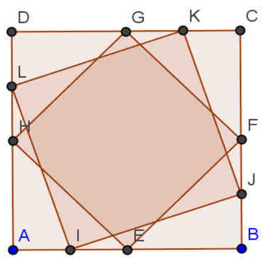


Figura 14. Cuadrado *IJKL* con vértices en los puntos medios de los segmentos $\overline{AE}, \overline{BF}, \overline{CG}, \overline{DH}$.

Algunas preguntas que podrían ayudar al docente a propiciar las construcciones por los estudiantes son las siguientes: ¿El cuadrado $EFGH$ es el único cuadrado que podemos inscribir? ¿Podemos inscribir más cuadrados al cuadrado $ABCD$? ¿Qué pasaría si tomamos los puntos medios de los segmentos $\overline{AE}, \overline{BF}, \overline{CG}, \overline{DH}$ como vértices de un nuevo cuadrado? Los estudiantes podrían enfocarse en el trazo de un nuevo cuadrado con vértices en los puntos medios de los segmentos $\overline{AE}, \overline{BF}, \overline{CG}, \overline{DH}$ (Figura 14). Responder la pregunta ¿Cuántos cuadrados más pueden inscribirse? implicaría hacer varias construcciones las cuales podrían conducir a una generalización. Se debería promover que los estudiantes propusieran la conjetura de que cualquier cuadrilátero determinado por los puntos I, J, K, L (Figura 14) tomados sobre los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ tales que $\overline{AI} \cong \overline{BJ} \cong \overline{CK} \cong \overline{DL}$ (independientemente de que sean o no los puntos medios de estos segmentos) es un cuadrado inscrito al cuadrado $ABCD$ cuyos vértices son los puntos I, J, K, L. El argumento para demostrar esta conjetura podría establecerse con procedimientos aritméticos en ambientes de lápiz y papel, el uso de Geometría euclidiana, o bien del carácter dinámico de la herramienta Geogebra para observar la cantidad infinita de cuadrados que pueden construirse. Para promover una argumentación cercana a una demostración formal, el profesor podría intervenir con preguntas o sugerencias para orientar la observación de los siguientes elementos, los cuales son muy parecidos a los utilizados para argumentar que la construcción del cuadrilátero $EFGH$ era un cuadrado inscrito al cuadrado $ABCD$.

Conjetura. Sea $ABCD$ un cuadrado. Construyamos un cuadrilátero $IJKL$ inscrito al cuadrado dado, tal que $\overline{AI} \cong \overline{BJ} \cong \overline{CK} \cong \overline{DL}$. Por demostrar: el cuadrilátero $IJKL$ es un cuadrado.

La demostración podría basarse en que $ABCD$ es un cuadrado y los lados y ángulos de cualquier cuadrado deben ser congruentes entre ellos, respectivamente. A partir de estas propiedades del cuadrado $ABCD$, de la hipótesis $\overline{AI} \cong \overline{BJ} \cong \overline{CK} \cong \overline{DL}$ y del Criterio de congruencia LAL se sustentaría la congruencia de triángulos $\Delta IBJ \cong \Delta JCK \cong \Delta KDL \cong \Delta LAI$ y, por lo tanto la congruencia de segmentos $\overline{IJ} \cong \overline{JK} \cong \overline{KL} \cong \overline{LI}$; es decir, se identificaría a $IJKL$ como un rombo.

Para encontrar que los ángulos internos del rombo $IJKL$ son de 90º y, por lo tanto, éste es un cuadrado, se puede utilizar la suma de ángulos suplementarios, la suma de ángulos internos de un triángulo y la congruencia de triángulos $\Delta IBJ \cong \Delta JCK \cong \Delta KDL \cong \Delta LAI$. Por ejemplo, $m\angle AIL + m\angle LIJ + m\angle JIB = 180^\circ$ por ser ángulos suplementarios y dado que la suma de ángulos internos de un triángulo es 180º, tomando en cuenta la congruencia de los triángulos $\Delta IBJ \cong \Delta LAI$, se tiene que $m\angle AIL + m\angle JIB = 90^\circ$, y por lo tanto, $m\angle LIJ = 90^\circ$. De igual manera se puede obtener: $m\angle IJK = 90^\circ$, $m\angle JKL = 90^\circ$ y $m\angle KLI = 90^\circ$.

Por lo tanto el cuadrilátero $IJKL$ inscrito al cuadrado $ABCD$ con $\overline{AI} \cong \overline{BJ} \cong \overline{CK} \cong \overline{DL}$ es un cuadrado.

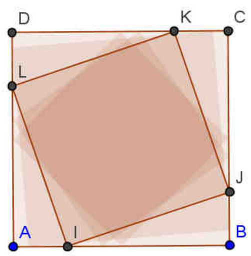


Figura 15. Cuadrados inscrito al cuadrado *ABCD* con vértices tomados sobre los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ tales que $\overline{AI} \cong \overline{BJ} \cong \overline{CK} \cong \overline{DL}$.

Como conclusión se debe observar que se pueden inscribir una cantidad infinita de cuadrados $IJKL$ al cuadrado dado $ABCD$ siempre y cuando se cumpla la condición $\overline{AI} \cong \overline{BJ} \cong \overline{CK} \cong \overline{DL}$. Esto contesta las preguntas del inciso b y la pregunta del inciso c: ¿Qué relación hay entre los nuevos cuadrados construidos y el cuadrado inicial $ABCD$ en cuanto a la ubicación de sus vértices? Una pregunta interesante sería también ¿es posible que todas las diagonales de todos los cuadrados inscritos coincidan en un punto? (Figura 18).

¿Varía el área de los diferentes cuadrados inscritos o es constante? Si varía ¿cómo varía? ¿hay un cuadrado inscrito cuya área sea mínima? Las preguntas que pueden apoyar al docente para orientar la discusión en el aula y responder estas preguntas, correspondientes al inciso d del Problema 2, son las siguientes: ¿Qué relación hay entre los nuevos cuadrados y el cuadrado inicial $ABCD$ en cuanto a la longitud de sus lados? ¿Qué relación hay entre los nuevos cuadrados y el cuadrado inicial $ABCD$ en cuanto a su área? ¿Cuál es el cuadrado inscrito de área mínima?

3.2.1. Acercamiento con el método numérico

Para responder a las preguntas señaladas en el párrafo anterior (o inciso d del Problema 2) se puede inducir a los estudiantes a que observen cómo varía la longitud de uno de los lados del cuadrado inscrito (por ejemplo de $\overline{KL}$) cuando varía la posición de los vértices K, L sobre los segmentos $\overline{CD}, \overline{DA}$

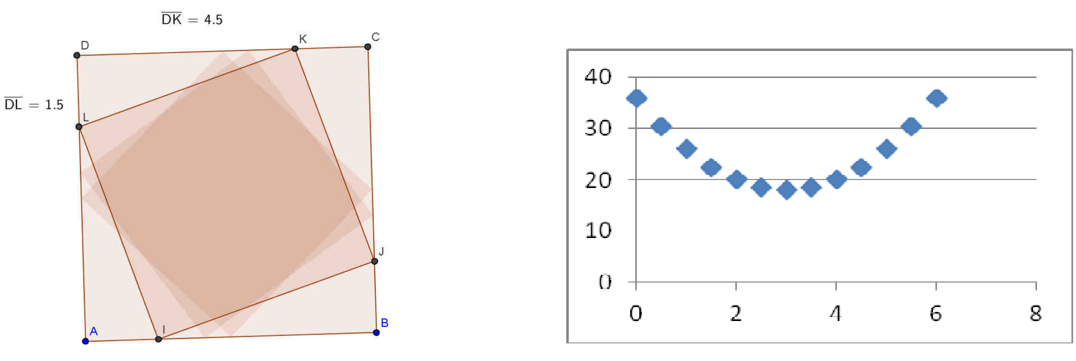
respectivamente y cómo esto determina la variación en el área del cuadrado $IJKL$, la cual se puede comparar con el área del cuadrado $ABCD$.

El plan de solución puede contemplar tomar un cuadrado $ABCD$ de dimensiones específicas, por ejemplo de 6cm de lado. Con una regla graduada (o con las herramientas de Geogebra) se pueden considerar varios cuadrados inscritos, por ejemplo, partir de que la medida de los segmentos $\overline{KD}, \overline{DL}$ son de 4.5 y 1.5cm, respectivamente (Figura 16). Con la misma regla graduada o bien con cálculos derivados a partir del Teorema de Pitágoras se pueden obtener las mediciones de los lados de cada cuadrado inscrito y obtener el área de cada uno. Se pueden registrar en una tabla los resultados de las mediciones y cálculos. Los estudiantes podrían obtener resultados como los de la Tabla 1, en lápiz y papel o usando otras herramientas tecnológicas.

DK	DL	LADO	AREA
6	0	6	36
5.5	0.5	5.523	30.5
5	1	5.099	26
4.5	1.5	4.743	22.5
4	2	4.472	20
3.5	2.5	4.301	18.5
3	3	4.243	18
2.5	3.5	4.301	18.5
2	4	4.472	20
1.5	4.5	4.743	22.5
1	5	5.099	26
0.5	5.5	5.523	30.5
0	6	6	36

Tabla 1. La tabla muestra la longitud de los lados de varios cuadrados inscritos en función de la ubicación de sus vértices ***K, L,*** así como el área correspondiente.

Con este procedimiento los estudiantes podrían encontrar el cuadrado inscrito cuya área es mínima. Este cuadrado de área mínima se identifica en la Tabla 1 cuando la posición de los vértices K, L del cuadrado son puntos medios de los segmentos $\overline{CD}, \overline{DA}$, respectivamente. Algo interesante que se podría promover ya sea con o sin tecnología es la graficación de los datos de las columnas de la tabla correspondientes a $\overline{DK}$ y al área del cuadrado inscrito. Los estudiantes bosquejarían una parábola (Figura 16a).



a) b)

Figura 16. Cuadrados inscritos al cuadrado *ABCD*. Gráfica de los datos de las columnas de la tabla correspondientes a $\overline{DK}$ y al área del cuadrado inscrito.

La estrategia heurística es denominada “toma de casos particulares”. Para identificar la solución siguiendo este acercamiento, se requiere hacer varios trazos de cuadrados inscritos para distintas posiciones de los puntos K, L (vértices del cuadrado inscrito) sobre los segmentos $\overline{CD}, \overline{DA}$, respectivamente, y buscar los valores más pequeños del área de este cuadrado. Para ello el uso de Geogebra puede ser de gran ayuda, ya que permite al estudiante analizar varios casos particulares rápidamente. Desde luego que el conocimiento y habilidad para trabajar con el software, son aspectos esenciales que deben cuidarse y potenciarse, ya que el desarrollo de habilidades en el uso de tecnología está estrechamente relacionado con el desarrollo de conocimiento matemático, de acuerdo con las perspectivas instrumentalistas. Por ejemplo, podría agregarse a este enfoque numérico, la gráfica de los datos de la tabla.

3.2.2. Solución usando herramientas de Cálculo diferencial

Las preguntas del inciso d pueden responderse, también, a partir de las herramientas de Cálculo diferencial. Estudiantes de nivel universitario, inclusive de nivel bachillerato, podrían alentarse por los profesores a resolver el problema de la siguiente manera. Primero deberían llevar el trazo del cuadrado a un plano cartesiano y posteriormente, analizar la situación con base en la ubicación del sistema de referencia. Por ejemplo, los estudiantes podrían empezar de la siguiente manera.

Sean las coordenadas $(0,0),(L,0),(L,L),(0,L)$ los vértices del cuadrado $ABCD$ cuyos lados tienen a L como su longitud. Sean las coordenadas $(x,0),(L,x),(L-x,L),(0,L-x)$ los vértices del cuadrado inscrito (Figura 17). El área de cualquier cuadrado puede obtenerse a partir de la fórmula $A=l^2$ donde A es área y l es el lado del cuadrado. En particular, para los cuadrados inscritos podemos representar el área como $l^2=(L-x)^2+x^2$ (Figura 17), es decir, l está en función de x : $l=l(x)$. Dado que $A=l^2$, encontrar cuál es el cuadrado de área mínima, es equivalente a encontrar cuándo $l(x)$ adquiere un valor mínimo.

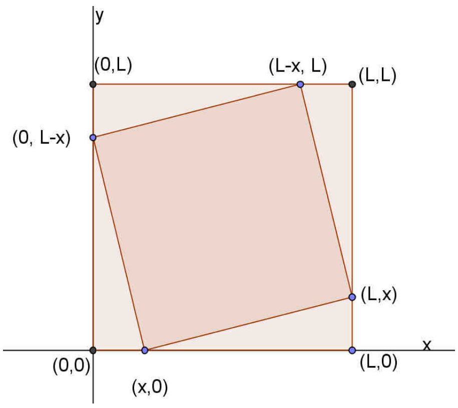


Figura 17. Cuadrado inscrito en el cuadrado cuyas coordenadas son **(0,0),(*L*,0),(*L*,*L*),(0,*L*)**.

Los estudiantes deberían poder derivar la función $l^2=(L-x)^2+x^2$ y encontrar el o los puntos críticos, es decir, deberían resolver $l'=0=\dfrac{-L+2x}{\sqrt{(L-x)^2+x^2}}$. En este caso encontrarían que $x=\dfrac{L}{2}$ es el punto crítico. A partir, de este valor, podrían usar el criterio de la segunda derivada y encontrar que

$l''(\frac{L}{2})>0$ y por lo tanto, el cuadrado de área mínima es aquel cuyos vértices son $(\frac{L}{2},0),(L,\frac{L}{2}),(\frac{L}{2},L),(0,\frac{L}{2})$

Algo interesante que se podría promover es el dibujo de la función $l=l(x)$. Los estudiantes deberían notar que es una parábola y se relaciona con la mostrada en la Figura 15. La estrategia heurística utilizada, básicamente, consiste en establecer una función que modele la situación y optimizar. Los recursos necesarios para este acercamiento son: proponer una función que modele un fenómeno, calcular derivadas sucesivas de una función, racionalizar, resolver ecuaciones lineales y evaluar funciones; además, se debe conocer el criterio de la primera y segunda derivada para una función.

3.2.3. Solución geométrica

Otra manera de responder a la pregunta del inciso d, ¿hay un cuadrado inscrito cuya área sea mínima? ¿Cuál es el cuadrado inscrito de área mínima? es usando Geometría euclidiana. Para ello se puede conjeturar que sí hay un cuadrado inscrito de área mínima y tratar de construirlo.

Sea $IJKL$ cualquier cuadrado inscrito al cuadrado $ABCD$ con los vértices I,J,K,L contenidos en los segmentos $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CD},\overline{DA}$ (Figura 18). Construyamos el cuadrado inscrito de área mínima. Un procedimiento consistiría en que el estudiante trazara las diagonales del cuadrado inscrito $IJKL$ y llamara E al punto de intersección de éstas. Por propiedades de un cuadrado debería observar que $\angle KEJ=90°$, lo que lo llevaría a que el ΔEKJ es un triángulo rectángulo y puede hacer uso del Teorema de Pitágoras, de tal manera que $\overline{KJ}$ (lado del cuadrado $IJKL$) se relaciona con $\overline{EJ}$ y $\overline{EK}$: $|KJ|^2=|EJ|^2+|EK|^2$. Donde, además, por propiedades del cuadrado $IJKL$: $\overline{EJ}\cong\overline{EK}$.

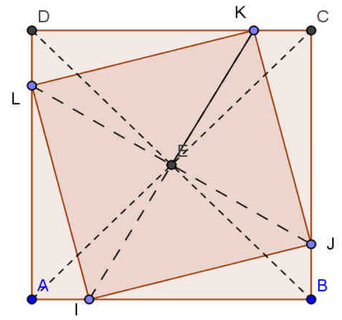


Figura 18. Cuadrado $IJKL$ inscrito en el cuadrado $ABCD$. Se han trazado las diagonales $\overline{KI},\overline{LJ},\overline{AC},\overline{BD}$.

Los estudiantes deberían observar e inclusive justificar que las diagonales de todos los cuadrados inscritos, incluyendo las del cuadrado $ABCD$, coinciden en el punto E (Figura 18). Esto se puede demostrar usando contradicción, suponiendo que las diagonales de cualquier cuadrado inscrito se intersectan en un punto E que no es el punto de intersección de las diagonales del cuadrado $ABCD$ y usando congruencia de triángulos. Esto implicaría que cualquier diagonal $\overline{KI}$ (de cualquier cuadrado inscrito) pasa por E. $\overline{KJ}$ entonces será mínimo cuando $\overline{EK}$ sea mínimo, porque $|KJ|^2=2|EK|^2$. Pero $\overline{EK}$ será mínimo cuando $\overline{EK}\perp\overline{CD}$. Lo anterior se justifica porque la distancia mínima de un punto a una recta es la longitud del segmento perpendicular a la recta, trazada desde el punto. Es decir, $\overline{EK}$ se encuentra en la mediatriz de $\overline{CD}$. Por lo tanto, el cuadrado inscrito de área mínima es aquel cuyos vértices están en los puntos medios del cuadrado $ABCD$.

Mediante el uso de Geogebra, teniendo en cuenta el trazo del punto E y la herramienta "rota objeto en torno a punto" puede dibujarse el cuadrado inscrito $IJKL$ una vez dibujado el cuadrado $ABCD$, de tal manera que pueda observarse la variación del área del cuadrado inscrito en función del segmento $\overline{DK}$ y relacionarse con la gráfica de la parábola. También puede hacerse esto con Cabri (Figura 19).

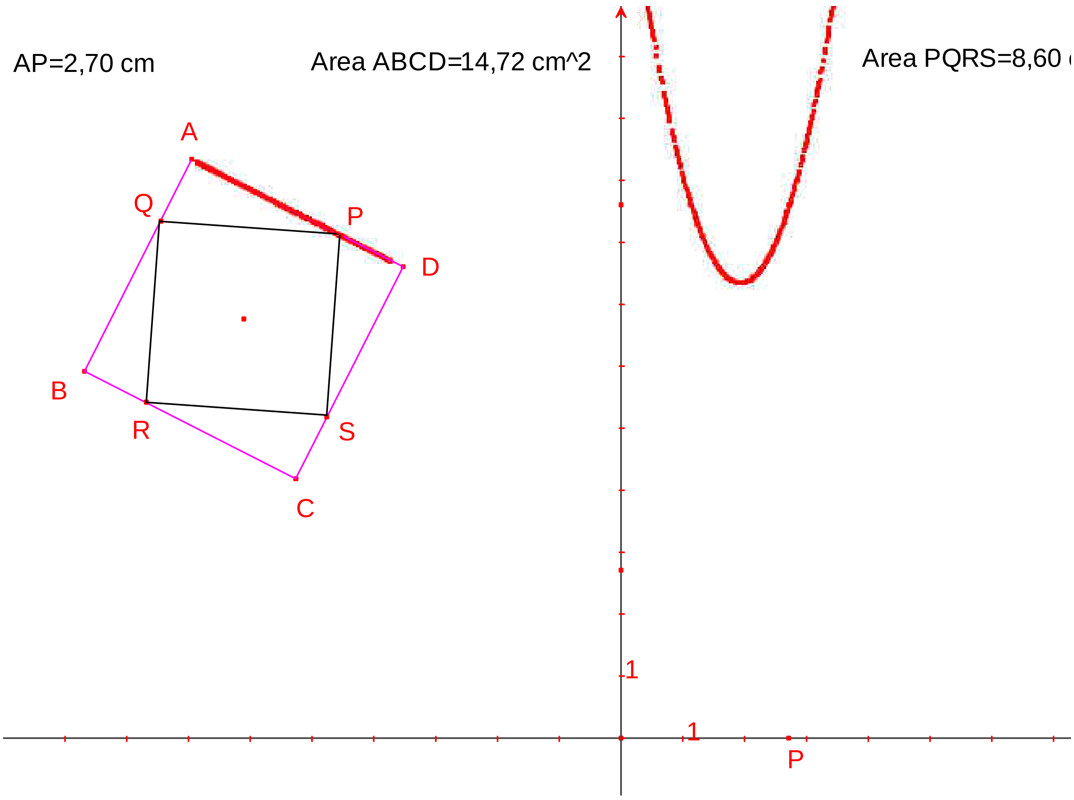


Figura 19. Procedimiento usando Cabrí géomètre, articulado a la gráfica de la función.

Este procedimiento, combinado con los anteriores permite una mejor comprensión tanto del concepto de cuadrado como del concepto de variación, así como se puede destacar la importancia del proceso de argumentación en matemáticas.

4. Reflexiones finales

En la actualidad es común utilizar calculadoras, computadoras y el uso del Internet en la educación escolar. Ante ello, y considerando el contexto teórico de este trabajo, algunas preguntas interesantes que podemos plantearnos son: ¿Cómo utilizar estos instrumentos de manera que se conviertan en herramientas de aprendizaje? ¿Qué tipo de actividades o tareas son útiles para promover el aprendizaje de los estudiantes? ¿Cómo contribuye el establecimiento de una HLT (Trayectoria Hipotética del Aprendizaje) en el desarrollo del conocimiento de los estudiantes?

El análisis de cada tarea o problema desde diferentes heurísticas, integrado con los objetivos de aprendizaje y con el proceso hipotético de aprendizaje, proporciona al profesor información relevante para establecer las directrices que debe dar a los estudiantes para resolverlo y desarrollar el conocimiento matemático deseado. Estas directrices permiten orientar la interacción de los estudiantes con el problema hacia el desarrollo de conocimiento y habilidades consideradas como objetivos educativos. El análisis de estos elementos muestra al profesor los momentos en los que debe intervenir para plantear esas directrices; y también para conocer el nivel de exigencia que puede hacer a los estudiantes respecto al problema y los conocimientos matemáticos a utilizar.

El planteamiento de una HLT (Trayectoria Hipotética de Aprendizaje) requiere de una formación matemática adecuada del profesor que le permita realizar el análisis previo de estas tareas, lo cual incrementará la potencia y pertinencia de las actividades de aprendizaje. El análisis de un conjunto de problemas también permitirá definir la trayectoria o el orden en el cual los problemas pueden ser abordados por los estudiantes en un curso. De esta manera, el profesor “no actuará a ciegas” y estará en mejores condiciones de llevar a cabo el proceso de enseñanza, pues estará consciente de posibles dificultades, alternativas de solución, opciones didácticas a implementar, etc.

Finalmente, si alguna esperanza habremos de albergar en el mejoramiento del aprendizaje de los estudiantes, las opciones didácticas no pueden surgir de otro lado más que del actuar consciente de los profesores; el planteamiento de HLT’s es una opción para mejorar su desempeño en el salón de clases, mediante lo cual puede involucrar a los estudiantes en procesos de resolución de problemas y aprovechar las posibilidades que brinda la tecnología para potenciar el aprendizaje.

Este trabajo fue financiado en la Convocatoria *2012*01* del Programa de Fortalecimiento de la Investigación (PROFI) de la Universidad de Quintana Roo 2012-04: “Aprendizaje de las matemáticas en el nivel superior”

Bibliografía

Duval, R. (1996). *Registros de representación semiótica y funcionami ento cognitivo del pensamiento.* Traducción de uso interno realizada por el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav IPN, México. Título original *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5, 37-65, IREM de Stramburgo, 1993.

Goldenberg, P. (2000). *Thinking (and talking) about technology in math classrooms.* Massachusetts, EE.UU: Education Development Center, Inc.

Laborde, C. y Laborde, J-M. (1995). What About a Learning Environment where Euclidean Concepts Are Manipulated with a Mouse? En A. diSessa, C. Hoyles, R. Noss y L. Edwards (Eds.), *Computers and Exploratory Learning*. (pp. 241-261). Berlin: Springer-Verlag.

Mason, J., Burton, L., y Stacey, K. (1987). *Thinking Mathematically*. New York.: Adison Wesley.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards in School Mathematics.* Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton: Princeton University Press.

Polya, G. (1980). On solving mathematical problems in high school. En S. Krullik y R. Reys (Eds.), *Problem Solving in School Mathematics*, 1980 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, (pp. 1-2 y reverso de la portada). Reston Va.: National Council of Teachers of Mathematics. USA.

Ruiz (2012). Resolución de problemas geométricos con GeoGebra en la formación de profesorado de educación primaria: un estudio de casos. *Memoria de la Conferência Latino Americana de GeoGebra, 51- 64.*

Santos-Trigo, M. y Barrera-Mora, F. (2011). High School Teachers' Problem Solving Activities to Review and Extend Their Mathematical and Didactical Knowledge. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies (PRIMUS), 21*(8): 699-718.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouwns (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan Publishing Co. USA.

Simon, M. A. (1995). Reconstruyendo la pedagogía de las matemáticas desde una perspectiva constructivista. *Journal for Research in Mathematics Education. 26* (2):114-145.

Simon, M. A. (2004). Explicating the role of mathematical task in conceptual learning: an elaboration of the hipothetical learning trayectory. *Mathematical Thinking and Learning 6*(2): 91-104.

Steen, L. A. (Ed.). (1990). *On the shoulders of giants. New approaches to numeracy*. Washington, D. C.: National Research Council.

Armando Sepúlveda López. Centro de trabajo: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Lugar de residencia: Morelia, Michoacán, México. Profesor Investigador de la UMSNH. Nació en Celaya, Guanajuato, México, el 17 de Octubre de 1955. Doctor en Educación Matemática por el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV) en México, Maestría en Educación Matemática y Licenciatura en Ciencias Físico Matemáticas. Publicaciones en memorias de congresos internacionales como el PME, PMENA, COMIE, SMM; Publicación de Artículos en Revistas con reconocimiento internacional como: RMIE, Educación Matemática; Publicación de Libros en Editorial Devi Kali y en Editorial Académica Española. email: asepulve@live.com.mx

Verónica Vargas Alejo. Centro de trabajo: Universidad de Quintana Roo. Lugar de residencia: Chetumal, Quintana Roo, México. Profesora Investigadora de la UQroo. Nació en Morelia, Michoacán México el 24 de junio de 1972. Con formación de doctorado en Educación Matemática por el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV) en México, Maestría en Educación Matemática y Licenciatura en Ciencias Físico Matemáticas. Publicaciones en memorias de congresos internacionales como el PME, PMENA, COMIE, SMM, ICTMA, ICME; Publicación de Artículos en Revistas con reconocimiento internacional como Revista Española de Ciencias. Email: vargasalejo@uqroo.mx

César Cristóbal Escalante. Centro de trabajo: Universidad de Quintana Roo. Lugar de residencia: Chetumal, Quintana Roo, México. Profesor Investigador de la UQroo. Nació en Naranjos, Veracruz, México el 25 de febrero de 1953. Con formación de doctorado en Educación Matemática por el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV) en México, Maestría en Educación Matemática y Licenciatura en Física y Matemáticas. Publicaciones en memorias de congresos internacionales como el PME, PMENA, ICTMA, ICME. Email: cescrist@uqroo.mx