NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 82, marzo de 2013, páginas 89-100

Ejemplos de visualización y uso de materiales manipulativos en textos matemáticos antiguos

Vicente Meavilla Seguí (Universidad de Zaragoza. España)
Antonio M. Oller Marcén (Centro Universitario de la Defensa, Academia General Militar. Zaragoza. España)

Fecha de recepción: 16 de noviembre de 2012
Fecha de aceptación: 23 de enero de 2013

Resumen La enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, sobre todo en los niveles educativos preuniversitarios, necesita el apoyo de ciertos recursos complementarios (materiales didácticos manipulativos, interpretaciones diversas de un mismo objeto matemático, etc.) que pueden ayudar al aprendiz a la hora de comprender conceptos y procedimientos. La historia de la Matemática está llena de ejemplos (álgebra geométrica, demostraciones visuales, rompecabezas geométricos para transformar figuras en otras equivalentes, etc.) que se pueden usar en el aula y proporcionan al estudiante nuevas oportunidades de aprendizaje. En este artículo presentamos algunos ejemplos extraídos de textos antiguos.

Palabras clave Historia de la Educación Matemática, Historia de la Matemática, Formación de profesorado, Recursos didácticos, Visualización.

Abstract The teaching and learning of Mathematics needs, especially in pre-universitary level, the support of several additional resources (manipulative didactic materials, different interpretations of the same mathematical object, etc.) that may help the student to understand concepts and methods. History of Mathematics is provides us with plenty of examples (geometric algebra, visual proofs, geometric puzzles, etc.) that can be used in the classroom and that give the student new learning opportunities. In this paper we present some examples coming from old books.

Keywords History of mathematics education, History of mathematics, Teacher training, Didactic resources, Visualization.

1. Introducción

Una de las mayores dificultades con las que se encuentran los estudiantes al aprender matemáticas suele ser el modo formal, abstracto y descontextualizado en que, en ocasiones, se presentan los resultados en el aula. Esta falta de una referencia real concreta (Ruíz, 2008) puede provocar, al menos, los siguientes fenómenos:

- El alumno concibe las fórmulas como identidades obtenidas "como por arte de magia" y accesibles tan sólo a los "genios".
- Las identidades algebraicas se perciben de un modo puramente formal, sin atender al significado de los símbolos que en ellas aparecen o, incluso, sin pensar que dichos símbolos puedan albergar significado alguno.

- Los resultados matemáticos se consideran apartados por completo del mundo real. No parece existir aplicación práctica posible de las matemáticas a problemas más o menos cotidianos.

Parece claro que si, como educadores, queremos promover un aprendizaje significativo[1], en nuestros alumnos, estos fenómenos deben ser subsanados. Para ello, podemos recurrir al uso de herramientas como la visualización y el uso de materiales manipulativos puesto que (Vygotsky, 2009, p. 49) en el proceso de aprendizaje "los niños resuelven tareas prácticas con la ayuda del lenguaje así como con la de sus ojos y de sus manos".

Estos recursos, en contra de lo que pueda parecer, no han sido descubiertos recientemente. Es posible aprovechar de textos antiguos ejemplos de autores que utilizaron la visualización para descubrir y justificar resultados aritméticos y algebraicos o que recurrieron al uso de materiales tangibles para facilitar a sus lectores la comprensión de ciertos conceptos.

En este artículo vamos a presentar cuatro ejemplos, extraídos de textos de los siglos XVI-XVIII en los que se ilustran las ideas anteriores. Pensamos que el uso de estas fuentes históricas puede resultar interesante en el trabajo con maestros en formación (Jahnke, Arcavi, Barbin, Bekken, Furinghetti, El Idrissi, Silva da Silva y Weeks, 2000).

2. La visualización

La enseñanza escolar de la Geometría suele adolecer desde sus primeros cursos de un proceso de aritmetización que se traduce en una fuerte presencia de contenidos de Geometría métrica; mientras que posteriormente, con la introducción de la Geometría analítica, se produce un proceso de algebrización. Estos procesos, que deberían enriquecer la visión del alumno, acaban por convertirse en un "recetario para una aplicación exclusivamente mecánica" (Arrieta, 1992, p. 12).

Menos común resulta observar en el aula el proceso contrario, es decir, el uso de la geometría para obtener y justificar resultados aritméticos y algebraicos. Este recurso a la geometría permite introducir la visualización[2] como "apoyo e ilustración de resultados esencialmente simbólicos" (Arcavi, 2003, p. 223). Abundando en el mismo tema, Simon y Stimpson (1988) puntualizan: "El proceso de dibujar un diagrama obliga […] a centrarse en las relaciones relevantes del problema".

Vamos a presentar dos ejemplos en los que, efectivamente, resultados que admiten un enfoque simbólico adquieren un significado mucho más claro y concreto (Guzmán, 2004) al abordarlos bajo una mirada geométrica.

2.1. La suma de *n* términos consecutivos de una progresión geométrica

Las progresiones geométricas configuran un capítulo que no suele faltar en el currículo matemático de los niveles educativos medios. Se trata además de un concepto matemático que aparece incluso en el Papiro de Rhind (el más antiguo texto matemático que se conserva). Uno de los aspectos

[1] En el sentido de Ausubel (1963), es decir, aquel en el que el nuevo conocimiento se relaciona de manera no arbitraria y sustantiva con la estructura cognitiva de la persona que aprende.
[2] Entendida, siguiendo a Cantoral y Montiel (2003, p. 694) como "la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que se aprende".

a los que se dedica especial atención es a la fórmula que proporciona la suma de términos consecutivos. Esta fórmula es poco intuitiva y suele resultar extraña a los alumnos.

El *Kriyakramakari* (Amma, 1979) es un comentario al *Lilavati* de Bhaskara II (1114 – 1185) compuesto en el siglo XVI. En dicho texto se encuentra una deducción geométrica de la fórmula que permite calcular la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica de razón 4[3]. A continuación presentamos dicha deducción.

Admitamos que el rectángulo ABCD (Figura 1) representa el término $\boldsymbol{a_{n+1}}$ de una progresión geométrica de razón 4.

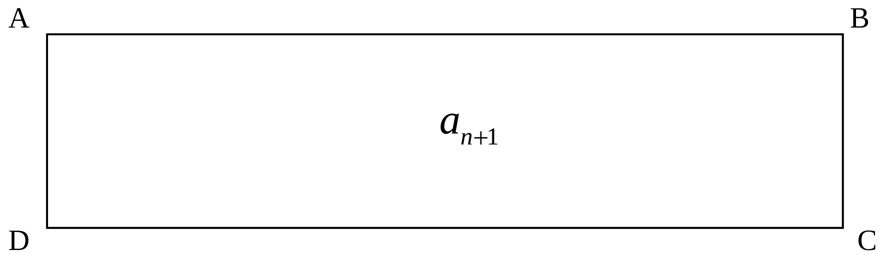


Figura 1.

Dividimos el rectángulo ABCD en tres partes iguales [= 4 – 1]. Entonces, cada una de ellas (Figura 2) es una representación geométrica de $\dfrac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\mathbf{3}}$.

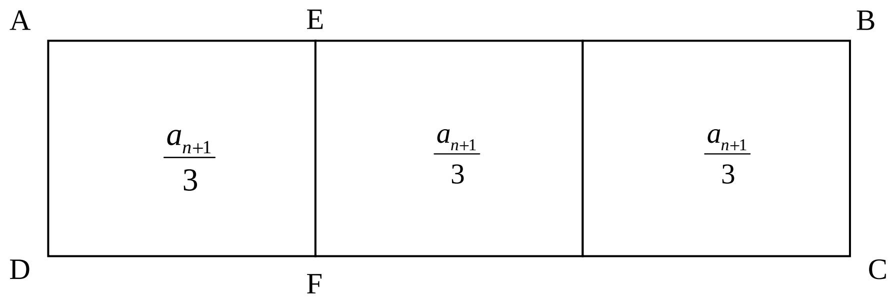


Figura 2.

Ahora dividimos el rectángulo AEFD en cuatro [= razón] partes iguales.

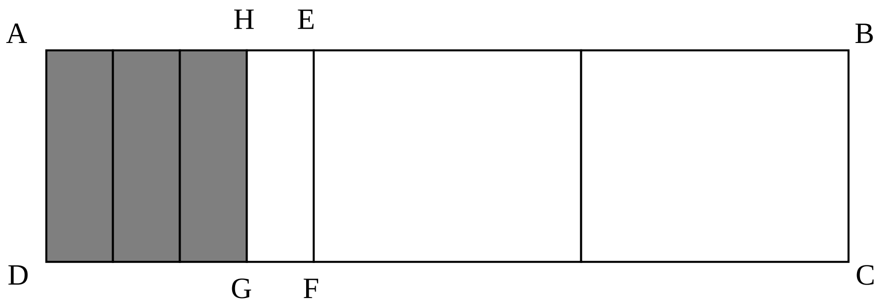


Figura 3.

[3] Dicho procedimiento geométrico puede generalizarse fácilmente cuando la razón de la progresión es arbitraria.

En esta situación, el rectángulo AHGD de la Figura 3 representa tres cuartas partes de $\frac{a_{n+1}}{3}$ Por tanto:

$$AHGD = \frac{3}{4}\cdot\frac{a_{n+1}}{3} = \frac{a_{n+1}}{4} = a_n$$

Además:

$$HEFG = \frac{1}{4}\cdot\frac{a_{n+1}}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a_{n+1}}{4} = \frac{a_n}{3}$$

Acto seguido, dividimos el rectángulo HEFG en cuatro partes iguales.

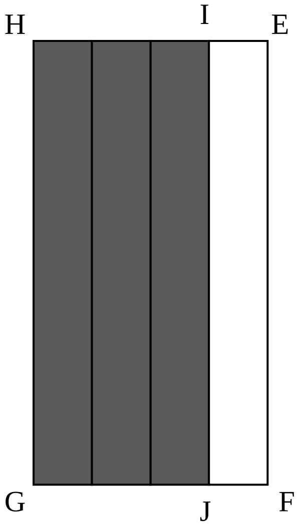


Figura 4.

Con esto, resulta claro que:

$$HIJG = \frac{3}{4}\cdot\frac{a_n}{3} = \frac{a_n}{4} = a_{n-1}$$

$$IEFJ = \frac{1}{4}\cdot\frac{a_n}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a_n}{4} = \frac{a_{n-1}}{3}$$

Procediendo repetidamente de modo similar, al cabo de un número finito de pasos, el rectángulo AEFD contendrá los *n* primeros términos de la progresión más una tercera parte del primero. Es decir:

$$\frac{a_{n+1}}{3} = a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + \frac{a_1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{a_{n+1}}{3} - \frac{a_1}{3} = \frac{a_{n+1} - a_1}{3}$$

Claramente la fórmula anterior se puede generalizar, en función del nivel de los alumnos, para una progresión geométrica de razón r. En este caso se tiene (recordando que, al tratarse de una progresión geométrica, $a_{n+1}=a_1r^n$):

$$S_n = \frac{a_{n+1}-a_1}{r-1} = \frac{a_1r^n - a_1}{r-1}$$

2.2. Suma de raíces cuadradas

El manejo de expresiones algebraicas entraña numerosas dificultades para los estudiantes que se inician en el lenguaje algebraico. Estas dificultades son aún mayores cuando las expresiones son irracionales. En los textos elementales modernos dedicados a la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas únicamente se contempla la suma de radicales semejantes. Sin embargo, en los manuales renacentistas (por ejemplo) se consagraba habitualmente alguna sección a la suma de radicales no semejantes de índice dos.

El siguiente texto[4] proviene del *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria* (1567) del portugués Pedro Núñez[5]. En el mismo se demuestra geométricamente la expresión algebraica.

$$\sqrt{A}+\sqrt{B}=\sqrt{A+B+2\sqrt{AB}}$$

Figura 5. Pedro Núñez (1502 – 1578).

[4] En el texto que presentamos hemos respetado el vocabulario y la sintaxis del texto original pero hemos actualizado su ortografía.

[5] Pedro Núñez, de origen judío, nació en Alcázar da Sal (Portugal). Estudió filosofía y medicina en Lisboa, donde recibió el grado de doctor y explicó filosofía. Fue catedrático de Matemáticas en la Universidad de Coimbra desde 1537 hasta 1562, año en que se jubiló. También se le conoce como Petrus Nonius y Pedro Nunes Salaciense.

"Que la raíz simple siendo sumada con otra haga una raíz universal por el modo que habemos dado, demostraremos por esta arte. Sean las dos líneas a.b. y b.c. lados cuadrados o raíces de dos números conocidos, las cuales líneas juntas constituyen la línea a.c. que de entrambas es compuesta.

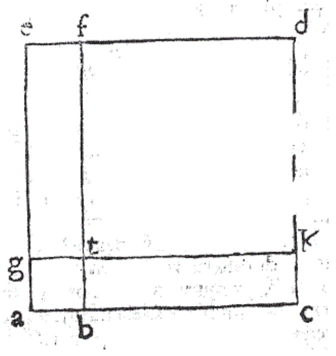


Figura 6.

Y queremos por la dicha Regla saber de qué cantidad esa línea a.c. es lado cuadrado, a que al presente llamamos raíz.
Constituiremos pues sobre a.c. el cuadrado a.c.d.e. y sobre a.b. el cuadrado a.b.t.g. y extenderemos las líneas b.t. y g.t. hasta que hagan concurso con d.c. y e.d. en f. y en k. Y manifiesto es que los dos rectángulos e.g.t.f. y b.c.k.t., a que llamamos en geometría suplementos, son entre sí iguales y que f.t.k.d. es cuadrado de b.c. y que cualquiera de esos suplementos es lo que se hace multiplicando la raíz o lado a.b. por el lado b.c. lo cual todo se demuestra por la igualdad de las líneas opuestas equidistantes. Y por cuanto, por la regla de multiplicar raíces, cada uno de los dichos suplementos y ambos juntos hacen raíz de número conocido, por esta causa si les juntamos los dos cuadrados a.b.t.g. y f.t.k.d. que son los números cuyas raíces son a.b. y b.c. hará todo esto una figura conocida, la cual es el cuadrado a.c.d.e. y será por tanto la línea a.c. raíz universal de la tal suma, como la Regla nos decía. Pero esta demostración no sirve sino cuando las dos raíces van entrambas declaradas por más." (Segunda parte principal. Segunda parte, cap. 6, fols. 54r – 54v)

El diagrama siguiente (Figura 6) ayuda a clarificar el discurso del texto de Núñez:

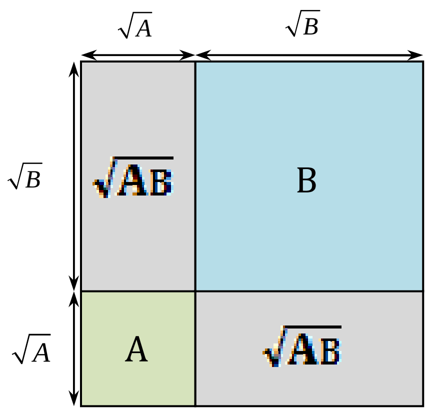


Figura 7.

A partir del mismo, resulta bastante claro que:

$$\sqrt{A}+\sqrt{B}=\sqrt{A+B+2\sqrt{AB}}$$

puesto que $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ es justamente el lado del cuadrado construido con una piezas de área A (en verde en la Figura 6), otra de área B (en azul) y dos copias de área $\sqrt{AB}$ (en gris).

3. Materiales manipulativos

Idealmente la Matemática aspira a servir como un lenguaje útil a la hora de describir el mundo que nos rodea. Esta aspiración resulta especialmente cierta respecto a la Geometría. No se comprende, por tanto, una enseñanza de la Geometría aislada de los objetos que nos rodean y carente de aplicaciones a la hora de localizar, medir, diseñar, etc. (Bishop, 1988).

El uso de materiales en geometría no sólo permite manipular objetos que de otro modo no serían más que ideas de existencia puramente platónica. También permite observar y comprender propiedades geométricas que, en ocasiones, son difíciles de intuir.

3.1. Comparación de las áreas de figuras isoperimétricas

La desigualdad isoperimétrica es una notable propiedad de la circunferencia (de entre todas las curvas planas cerradas de perímetro fijo, la circunferencia maximiza el área encerrada). Se trata de una propiedad que puede llegar a conjeturarse sin demasiada dificultad pero cuya demostración general es sumamente compleja. Posiblemente esta complejidad explique su ausencia en el aula de Primaria y Secundaria, a pesar de resultar muy fácil de enunciar.

En la *Arithmetica practica, y specvlatiua* de Juan Pérez de Moya[6] (1562), encontramos el siguiente discurso al hilo de esta propiedad:

¶Nota acerca deſtas figuras, que la que mas ſe
allegare a la cirçular es mas capaz, que la que ſe
apartare,y de aqui viene a dezir ſe, que la figu
ra redonda es muy çapaz. Puede ſe prouar eſto
tomando quatro tablas de çaxero, que ſean y-
guales en latitud,y longitud, digo que ſi de v-
na deſtas tablas ſe hiziere vna caxa đ.3.eſquinas,
como el triangulo,y de otra vna de quatro,y de
la tercera vna de.5. y de la vltima vna redonda,
ſi ſe mide lo que cada vna cabe, hallaras çaber
mas la de.4.eſquinas,que la de.3.y mas la de.5.
que la de.4.y mas la redonda, que otra alguna.

Figura 8. Texto original de la *Arithmetica practica, y specvlativa.*

---

[6] Natural de Santisteban del Puerto (Jaén), Pérez de Moya nació probablemente en 1512. Estudió en Salamanca y Alcalá de Henares, no fue profesor universitario pero se dedicó a la enseñanza de las Matemáticas. En 1536 obtuvo una capellanía en su pueblo natal y, ya muy mayor, fue canónigo de la Catedral de Granada, ciudad en la que murió en 1596.

Aunque la lectura del texto original se puede entender, para mayor claridad proponemos una adaptación al español moderno:

> "Nota acerca de estas figuras [las isoperimétricas], que la que más se allegare [aproxime] a la circular es más capaz [tiene mayor área] que la que se apartare, y de aquí viene a decirse que la figura redonda es muy capaz. Puede probarse esto tomando cuatro tablas de cajero, que sean iguales en anchura y longitud. Digo que si de una de estas tablas se hiciere una caja de tres esquinas, como el triángulo, y de otra una de cuatro, y de la tercera una de cinco, y de la última una redonda [= circular], si se mide lo que cabe en cada una, hallarás que cabe más en la de cuatro esquinas que en la de tres, y más en la de cinco que en la de cuatro, y más en la redonda que en cualquier otra." (Libro cuarto, cap. II, p. 309)

En definitiva, el autor propone la fabricación de varias cajas de la misma altura e igual perímetro, pero de diferentes formas (triángulo, cuadrado, etc.). Al tener todas la misma altura, sus volúmenes están en relación directa con las áreas de sus bases. Así pues, para "comprobar" la desigualdad isoperimétrica "basta" con observar que la caja redonda tiene un volumen mayor que las demás. Esto puede hacerse experimentalmente, por ejemplo, comparando las capacidades de las cajas mediante llenados y trasvasados.

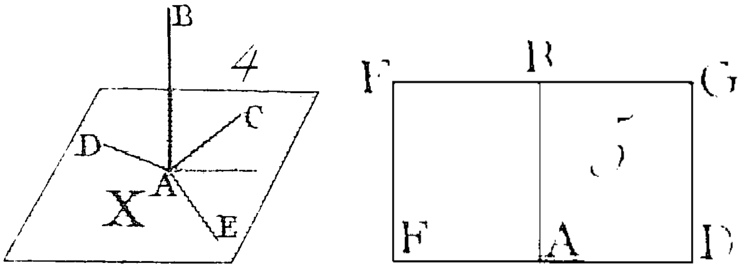
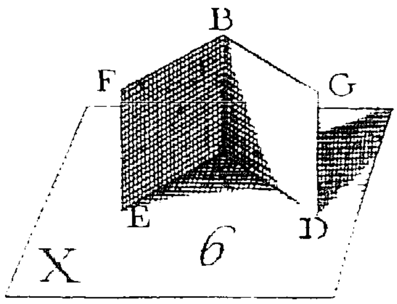
3.2. Recta perpendicular a un plano

Pese al hecho evidente de que el espacio que nos rodea no es plano, la geometría espacial recibe muy escasa atención en los planes de estudio actuales. Tan sólo en el último curso de bachillerato se aborda la geometría del espacio, aunque desde un punto de vista analítico y muy orientado hacia el Álgebra lineal.

No son de extrañar pues los problemas de visión espacial (Gutiérrez, 1991) o las dificultades de los alumnos cuando se trata de estudiar y describir posiciones relativas de rectas y planos en el espacio.

Figura 9. Alexis Claude Clairaut (1713 – 1765).

En su obra *Élémens de géométrie* el matemático francés Alexis Claude Clairaut[7] hace uso de un sencillo material didáctico manipulativo para ilustrar la situación en que una recta es perpendicular a un plano en el espacio. A continuación transcribimos parte de dicho texto:

> "Para representar de una forma sensible cómo la línea AB puede ser perpendicular a todas las líneas que parten de su extremo A basta con hacer una figura en relieve de la manera siguiente:
>
> 
>
>
> **Figura 10.**
>
> Con alguna materia lisa y fácil de plegar, como cartón, se construye un rectángulo FGDE dividido en dos partes iguales por la recta AB perpendicular a los lados ED y FG.
> A continuación, se pliega este rectángulo a lo largo de la línea AB, y se coloca el rectángulo doblado sobre el plano X.
>
> 
>
>
> **Figura 11.**
>
> Es evidente que, cualquiera que sea la abertura que se dé a las dos partes FBAE y GBAD del rectángulo plegado EADGBF, estas dos partes siempre permanecerán pegadas al plano X sin que la línea AB cambie de posición en relación a dicho plano. Por tanto, la recta AB será perpendicular a todas las líneas que parten de su pie y están contenidas en el plano X, dado que los

[7] Admitido en la Academia de Ciencias francesa cuando aún no tenía dieciocho años de edad, por su trabajo *Recherches sur les courbes a double courbure* que fue publicado en 1731. A lo largo de su corta vida también perteneció a la Royal Society of London, a la Academia de Berlín, a la Academia de San Petersburgo, y a las Academias de Bolonia y Upsala. Desde el 20 de abril de 1736 al 20 de agosto de 1737, Clairaut participó en una expedición a Laponia, liderada por Maupertuis, cuyo objetivo era medir la longitud de un meridiano en la tierra. En 1743, publicó su famoso trabajo *Théorie de la figure de la terre* donde confirmó la hipótesis de que la tierra estaba achatada en los polos, defendida por Newton-Huygens. Además de sus contribuciones a la ciencia en general y a las Matemáticas en particular, Clairaut escribió dos textos dedicados a la enseñanza que alcanzaron varias ediciones: uno de álgebra y otro de geometría.

lados AE y AD del rectángulo plegado se apoyan sucesivamente sobre cada una de dichas líneas, durante el movimiento que acabamos de describir.
De la construcción anterior se deduce un procedimiento muy cómodo para levantar desde un punto dado de un plano una línea perpendicular a dicho plano, o para bajar desde un punto dado exterior a un plano una perpendicular a este plano.

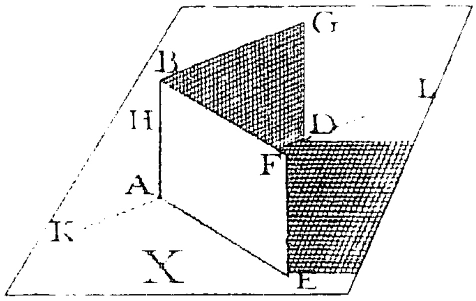


Figura 12.

Si el punto dado está en el plano, por ejemplo en A, o fuera de él, como en H, siempre se podrá desplazar el rectángulo EFBGDA sobre el plano X, hasta que el pliegue AB toque el punto dado. En los dos casos, AB será la perpendicular pedida.
También se sigue de ello que una línea AB es perpendicular a un plano X siempre que lo sea a dos líneas AE y AD de dicho plano. Porque entonces AB puede considerarse como el pliegue de un rectángulo, uno de cuyos lados plegados se aplica sobre AE y el otro sobre AD. De modo que este pliegue no puede dejar de ser perpendicular al plano X.
Si se quiere levantar un plano perpendicular a X sobre una línea cualquiera KL, contenida en el plano X, también se puede hacer uso del rectángulo plegado GBFEAD. Para ello basta con poner el lado AD de una de las partes ADGB de este rectángulo plegado sobre la línea KL. Con esto, ADGB es el plano que se pide.

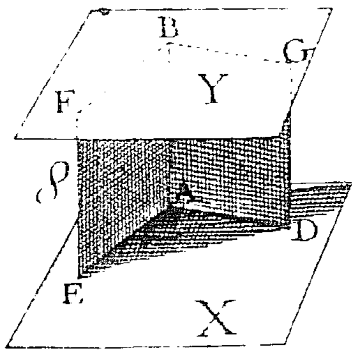


Figura 13.

También se ve fácilmente que si se coloca un tercer plano Y sobre los lados FB y BG del mismo rectángulo plegado, entonces el plano Y es perpendicular a la línea AB y, por consiguiente, paralelo al plano X.
Entonces, si en un plano X se levantan tres perpendiculares EF, AB y DG de la misma longitud y que no estén situadas en línea recta, el plano Y, que pasa por los puntos F, B y G es paralelo al plano X." (Cuarta parte, pp. 151 – 155).

4. Conclusiones y reflexiones didácticas

En las secciones anteriores hemos presentado algunos ejemplos provenientes de textos antiguos en los que los autores recurren a la visualización o utilizan materiales manipulativos a la hora de tratar de transmitir ciertos conceptos a los lectores de sus obras. Además de su interés intrínseco desde el punto de vista de la historia de la educación matemática, la lectura de estos fragmentos ilustra claramente algunas de las bondades de estas dos herramientas didácticas:

- Sirven para dotar de significado a expresiones simbólicas, facilitando así su comprensión y asimilación (el ejemplo de la fórmula para la suma de una progresión geométrica ilustra este hecho especialmente).
- Permiten mostrar las interrelaciones entre diversas ramas de la matemática, evitando la concepción de dichas ramas como compartimentos estancos (el ejemplo de Pedro Núñez sobre las expresiones radicales muestra el interés de unir la aritmética (o el álgebra) con la geometría).
- Pueden presentar la matemática como fuente de aplicaciones prácticas interesantes e, incluso, con un punto de vista experimental. Así se fomenta la percepción de una matemática próxima a la realidad (el discurso de Pérez de Moya sobre la desigualdad isoperimétrica es paradigmático en este sentido).
- Evitan la equivocada idea de que los resultados matemáticos o las propiedades de ciertos objetos surgen sin más del razonamiento deductivo. Se presenta una matemática más inductiva, más cercana al auténtico quehacer del matemático (el ejemplo de Clairaut nos muestra esto vívidamente).

Pensamos que el trabajo con estos textos es de especial interés con maestros o profesorado de Secundaria en formación. Sin embargo, el trabajo a llevar a cabo debe ir más allá de la lectura (aunque sea reflexiva) de los mismos. Por ello proponemos, a modo de ejemplo, algunas actividades que podrían plantearse y llevarse a cabo al hilo de cada uno de los fragmentos presentados:

1. Analizar el procedimiento hindú para sumar los términos de una progresión geométrica y construir un recortable basado en el mismo que permita presentarlo a nivel de Secundaria.
2. Tratar de generalizar la fórmula de Pedro Núñez para el caso $\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}$. Utilizar para ello policubos u otro material similar.
3. Llevar a cabo el experimento propuesto por Pérez de Moya. ¿Cómo se puede comprobar en la práctica que la capacidad de una caja es mayor o menor que la de otra sin medir sus dimensiones ni hacer cálculos?
4. Idear un material sencillo, similar al usado por Clairaut que permita estudiar las posiciones relativas de tres planos en el espacio.

Bibliografía

Amma, S. (1979). *Geometry in ancient & medieval India*. Delhi: Motilal Banarsidass.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 52, pp. 215-241.

Arrieta, M. (1992). Bases para un planteamiento actual de la Geometría en la Enseñanza Secundaria Obligatoria (12 – 16). *Suma* 10, pp. 12-14.

Ausubel, D.P. (1963). *The psychology of meaningful verbal learning*. New York: Grune and Stratton.

Bishop, A.J. (1988). *Mathematical enculturation*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2003). Visualización y pensamiento matemático. En J.R. Delgado (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 16 Tomo 2, pp. 694-701.

Clairaut, A. C. (1741). *Élémens de géométrie*. Paris: Lambert & Durand.
Gutiérrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. *Memorias del Tercer Congreso Internacional sobre investigación en educación Matemática*. Valencia.
Guzmán, M. de (2004). *Mirar y ver. Ensayos de geometría intuitiva*. Madrid: Nivola.
Jahnke, H.N., Arcavi, A., Barbin, E., Bekken, O., Furinghetti, F., El Idrissi, A., Silva da Silva, C.M. y Weeks, CH. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. En J. Fauvel y J. van Maanen (Eds.) *History in mathematics education: the ICMI study*, pp. 291-328. Dordrecht: Kluwer.
Núñez, P. (1567). *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria*. Anvers: Herederos de Arnoldo Birckman.
Pérez de Moya, J. (1562). *Arithmetica practica, y specvlativa*. Salamanca: Mathias Gast.
Ruíz, J.M. (2008). Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación* 47(3).
Simon, M. A. y Stimpson, V. C. (1988). Developing Algebraic Representation using diagrams. *The ideas of Algebra K-12. National Council of Teachers of Methematics. 1988 Yearbook*, pp. 136-141.
Vygotski, L.S. (2009). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica.

Vicente Meavilla Seguí. Licenciado en Ciencias (Sección de Matemáticas) por la Universidad de Zaragoza (1976) y Doctor en Filosofía y Letras (Pedagogía) por la Universidad Autónoma de Barcelona (1998) con una tesis sobre la influencia de las interacciones verbales sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra elemental. Ha publicado diversos artículos y libros sobre la influencia de la historia de las matemáticas sobre la enseñanza y el aprendizaje de dicha disciplina. En la actualidad es profesor de la Facultad de Ciencias Sociales y Humanas (Campus de Teruel) y miembro del Departamento de Matemáticas (Área de Didáctica) de la Universidad de Zaragoza.
Email: meavilla@unizar.es

Antonio M. Oller Marcén. Licenciado en ciencias Matemáticas (2004) por la Universidad de Zaragoza y Doctor por la Universidad de Valladolid (2012) con una tesis sobre la enseñanza de la Proporcionalidad aritmética en Secundaria. Ha publicado diversos trabajos sobre Educación Matemática, Álgebra y Teoría de Números. Actualmente es profesor del Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza.
Email: oller@unizar.es