NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 82, marzo de 2013, páginas 115-129

Consideraciones para el uso del GeoGebra en ecuaciones, inecuaciones, sistemas y funciones

Carlos M. Hernández Hechavarría (Universidad de Ciencias Pedagógicas Frank País García. Cuba)

Resumen Entre las principales dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática se encuentran: no penetración en sus fundamentos, la escasa atención a la creatividad de los escolares y el inadecuado uso de software. El GeoGebra, convenientemente utilizado, permite profundizar en Fundamentos de la matemática escolar pues permite integrar, comprender y utilizar, con facilidad y rapidez, contenidos de distintas áreas para justificar procedimientos y resultados. Los ejercicios y consideraciones que se presentan en la unidad "Ecuaciones e inecuaciones. Sistemas de ecuaciones e inecuaciones" y el tema "Funciones cuadráticas y parábolas" contribuyen a solucionar las dificultades antes señaladas, ilustran la posibilidad de integrar contenidos que generalmente se tratan de manera fragmentada y la posibilidad de diferenciar la enseñanza a partir de estos.

Palabras clave GeoGebra, diferenciación, matemática, fundamentos, aprendizaje.

Abstract Among the main difficulties in teaching and learning of mathematics are: no insight into their rationale, the lack of attention to the creativity on the students' part and the inadequate use of software. The GeoGebra, properly used, can deepen fundamentals of school mathematics can integrate it, understand and use with ease and speed, contents of different areas to justify procedures and results. The exercises and considerations arising in unity "Equations and inequalities. Systems of equations and inequalities" and the theme "Quadratic functions and parabolas" help to solve the difficulties mentioned above, illustrate the possibility of integrating content usually treated in a fragmented manner and the ability to differentiate instruction based on these.

Keywords GeoGebra, differentiation, mathematical, fundamental, learning..

1. Introducción

Aunque la comunidad científica reconoce la importancia de la enseñanza - aprendizaje de los fundamentos de la matemática escolar y aparece de manera explícita en disciplinas, asignaturas y cursos, en la práctica no ocupa un primer plano, en general continúa la prioridad para la enseñanza y el aprendizaje de algoritmos que serán objeto de exámenes y no se utilizan de manera pertinente las nuevas tecnologías y software existentes en este sentido.

La asignatura Fundamentos de la matemática I es la primera de esta importante disciplina que comenzó el pasado curso escolar 2010 – 2011 en la Carrera Matemática - Física en la Universidad de Ciencias Pedagógicas Frank País García, por su importancia y ubicación desde el primer año de la carrera, requiere una atención especial pues la mayoría de los escolares no ingresan con la preparación suficiente y requieren una atención diferenciada; además sienta las bases para otras disciplinas y asignaturas.

A pesar de que en los últimos años investigadores de distintos países, instituciones, de la UCP Frank País García y del territorio han realizado valiosas aportaciones de manera directa o indirecta sobre la utilización de las nuevas tecnologías persisten insuficiencias en su utilización. Entre los doctores impulsores del uso de las nuevas tecnologías se destaca el doctor Alfredo Rebollar que impartió una disciplina propia de la Universidad apoyado en el uso del referido software.

Con el propósito de contribuir al perfeccionamiento de la asignatura Fundamentos de la matemática escolar I, el doctor Carlos Hernández elaboró actividades novedosas, ejercicios y consideraciones para su tratamiento que favorecieron la actividad investigativa y el aprendizaje de los escolares; estos fueron socializados en el colectivo de la disciplina, el evento científico de base del departamento FISMAT 2011 y la Clase Metodológica Instructiva: Enfoque investigativo y utilización del GeoGebra en el tema Relaciones y funciones. Una muestra de ellos, correspondientes a dos temas de la signatura, se expone a continuación.

Primeramente se ejemplifica la utilización del GeoGebra en la unidad “Ecuaciones e inecuaciones. Sistemas de Ecuaciones e Inecuaciones” y posteriormente sobre funciones cuadráticas y parábolas. Si bien los ejercicios fueron concebidos para la asignatura Fundamentos de la matemática escolar I atendiendo a necesidades concretas de los escolares y requerimientos de su formación como docentes, también sirven para educaciones precedentes donde se abordan estos contenidos; las consideraciones didácticas explicadas a partir de los ejemplos resultan de particular interés pues ilustran la posibilidad de integrar contenidos que generalmente se tratan de manera fragmentada y la posibilidad de diferenciar la enseñanza a partir de estos.

2. Ejemplos de utilización del GeoGebra en “Ecuaciones e Inecuaciones. Sistemas de Ecuaciones e Inecuaciones”

Si bien en la literatura científica existen diversos ejemplos de la utilización del GeoGebra, en la práctica escolar se ha constatado su desconocimiento por docentes de distintas educaciones; atendiendo a esta dificultad se brindan algunos ejercicios y actividades elaborados y utilizados por el autor de este trabajo en la unidad “Ecuaciones e inecuaciones. Sistemas de Ecuaciones e Inecuaciones” de la asignatura Fundamentos de la matemática escolar I, que reciben escolares de la Universidad de Ciencias Pedagógicas ¨Frank País García¨. Las consideraciones didácticas que se presentan resultaron valiosas y pueden servir de modelo para los docentes en formación y los que no lo conocen o dominan el referido software.

Las exigencias de algunos ejercicios son relativamente sencillas pues respondieron a las condiciones concretas y conocimientos previos de los escolares de nuevo ingreso a la Universidad, otros resultaron bastante complejos y novedosos para la mayoría, tanto por su formulación como por las vías de solución.

Las consideraciones didácticas que se ofrecen a partir de los ejercicios presentados ilustran la utilización del GeoGebra con enfoque investigativo y en estrecha relación con las vías declaradas en los programas pero sin limitarse a ellas, igualmente variantes de ejercicios que pueden realizar los docentes con vista a la diferenciación de la enseñanza.

1. En la gráfica de la “Figura 1” se representan las rectas “a” y “b”

a) Identifique el punto de intersección de las rectas.

b) Escriba sus ecuaciones.

c) Resuelva el sistema de ecuaciones que estas rectas determinan.

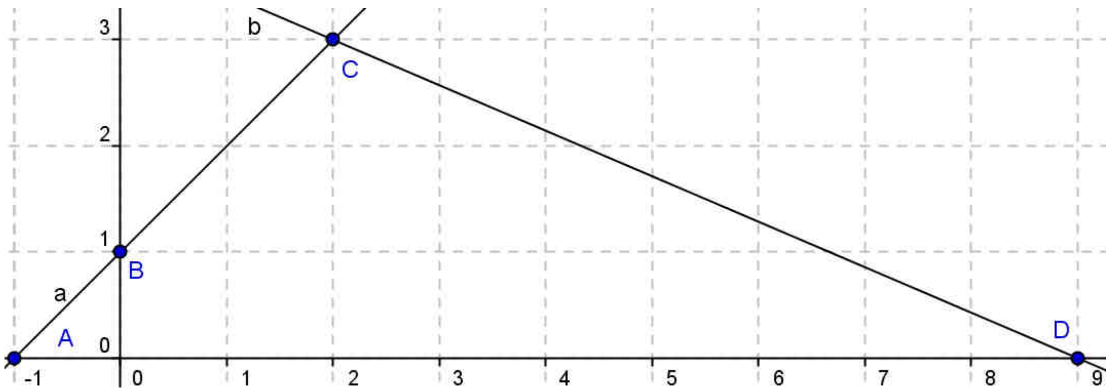

Figura 1. Rectas "a" y "b"

d) Identifique la relación que existe entre el punto de intersección y la solución del sistema de ecuaciones. Reflexione sobre su validez para dos ecuaciones cualesquiera.

e) Resuelva la inecuación $\frac{1}{7}(x+1)(-3x+27)\leq 0$ por dos vías diferentes y valore si alguna de ellas resulta más fácil o conveniente que la otra.

f) A continuación se presenta "ver Tabla 1" el protocolo de la construcción realizada con el GeoGebra. Reprodúzcala y traslade el punto C para que las rectas formen un ángulo de 90º. Apoyado en el gráfico calcule mentalmente el área del triángulo que determinan estas rectas y el eje X.

Nº	Nombre	Definición	Valor
1	Punto A	Punto en Eje X	A = (-1, 0)
2	Punto B	Punto en Eje Y	B = (0, 1)
3	Recta a	Recta que pasa por A, B	a: x - y = -1
4	Punto C	Punto en a	C = (2, 3)
5	Punto D	Punto en Eje X	D = (9, 0)
6	Recta b	Recta que pasa por C, D	b: 3x + 7y = 27

Tabla 1. Protocolo de la construcción

g) Traslade el punto B en el eje Y hasta obtener la ecuación -2x+y=2 y luego el punto C sobre esta recta para que formen un ángulo de 90º. ¿Le llama la atención la relación entre los coeficientes de las variables X e Y, en las ecuaciones de las rectas perpendiculares?; como actividad investigativa complementaria puede representar otros pares de rectas perpendiculares para la búsqueda de alguna regularidad y luego fundamentarla matemáticamente, en este sentido puede resultar conveniente la identificación de ángulos entre estas rectas y reflexionar sobre las transformaciones de su amplitud al desplazar el punto C u otro sobre las rectas mediante el GeoGebra.

2.1. Breves consideraciones sobre el ejercicio presentado

El ejercicio presentado es relativamente muy sencillo para los escolares con la preparación matemática suficiente y que dominen el GeoGebra, fue concebido para escolares con ciertas insuficiencias en cuanto su preparación previa, motivaciones y, disponibilidad de computadora y tiempo; por esta razón en algunos incisos se brindan informaciones o datos que, en otras situaciones, pudieran omitirse en busca de un mayor protagonismo de los alumnos, por ejemplo, el inciso "f" pudiera sustituirse por el siguiente:

h) Escriba un posible protocolo de la construcción realizada con el GeoGebra. Seleccione y mueva convenientemente un punto de estas rectas para que formen un ángulo de 90^{o}. Apoyado en el gráfico calcule mentalmente el área del triángulo que determinan estas rectas y el eje X.

Un aspecto cardinal es la consideración sobre los recursos con que cuentan los alumnos para enfrentar el ejercicio y de aquí la pertinencia de los ejercicios y problemas que se les planteen, en este caso la posibilidad de utilizar el GeoGebra desde el primer momento, pues se facilita o no la solución por determinadas vías, por ejemplo el inciso "b", escribir las ecuaciones, resultaría trivial, solo sería un asunto de identificación mediante la activación de la opción vista algebraica.

Igualmente la resolución de la inecuación $1/7\ (x+1)(-3x+27) \leq 0$ planteada en el inciso "e", con el GeoGebra se facilita extraordinariamente a partir de su representación gráfica, además la orientación de otras actividades con diferentes niveles de exigencias atendiendo a los niveles de desempeño de los escolares, es decir que posibilita la diferenciación de la enseñanza y el aprendizaje a partir de estas, por ejemplo:

i) Represente, con el GeoGebra, la función $f(x)= (x+1)(-3x+27)$ y determine el conjunto de valores de x para los cuales las imágenes son no negativas.

j) Una función es de la forma $f(x)= k(x+1)(-ax+b)$, donde a, b y k son números reales positivos. Determine el conjunto solución de la inecuación $f(x) \leq 0$. Suponiendo que no conociera el procedimiento algebraico para determinar dicho conjunto, exponga una vía alternativa con ayuda del GeoGebra.

k) Trace un segmento desde el punto medio entre los ceros de la función $f(x)=1/7(x+1)(-3x+27)$ hasta el punto $B(m,n) \in f(x)$ que satisface la condición $f(m) \geq f(x)\ \forall x \in \Re$. Reflexione sobre las imágenes de la función a medida x se acerca a 4 y el punto B(4.00, 10.71)

l) Resolver la inecuación $f(x)=1/7(x+1)(-3x+27) \geq 11$

Las exigencias del inciso "i" son mínimas para los colares que saben introducir funciones con el GeoGebra pues obtendrán inmediatamente su representación "ver Figura 2" y con el dominio de conceptos básicos sobre funciones podrán identificar y representar el conjunto solicitado a partir de la información visual. Este inciso está estrechamente relacionado con el "e", si se les da la oportunidad a los escolares que los comparen y reflexionen sobre estos encontrarán fundamentos de las relaciones entre inecuaciones y funciones asociadas a ellas, en este sentido pueden resultar necesarios algunos impulsos del docentes, por ejemplo, ¿coincide el conjunto encontrado con el de las funciones $f(x)= k\ (x+1)(-3x+27)$ donde k en un número real distinto de cero?, ¿qué efecto tiene en el gráfico, la introducción de k?

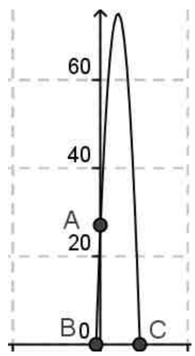

Figura 2. Representación de $f(x)= (x+1)(-3x+27)$

En el inciso "j" las exigencias son superiores pues los coeficientes de las variables no son números fijos y por tanto su solución tampoco, es posible que los escolares se enfrente por primera ves a un planteamiento de este tipo y necesiten algunas interrogantes que estimulen su razonamiento, por ejemplo ¿se asocia la inecuación a una función cuadrática?, ¿podrá aplicarse la formula conocida, que involucra al determinante, para determinar los ceros de f(x)?; si utilizan la fórmula del discriminante y no muestran otras alternativas también se les pudiera estimular con otras preguntas tales como ¿pueden identificar por simple inspección dos ceros de f(x)?; ¿qué valor toma f(x) si x=1 o x=-b/a?. La segunda exigencia del inciso puede inducir a la explicación de una vía inductiva a partir de diferentes casos que puede verse afectada por el dominio del GeoGebra, la disponibilidad de tiempo de máquina y otras razones.

En el inciso "k" exige el dominio de conceptos y procedimientos que se facilitan con el GeoGebra, por ejemplo el reconocimiento de un punto medio entre valores enteros con signos diferentes (en este caso del 4, entre los ceros -1 y 9) puede encontrarse con la opción "punto medio o centro", igualmente la obtención del punto $B(m,n) \in f(x)$ a partir de la ubicación de un punto sobre la gráfica, el trazado del segmento indicado, y los análisis pertinentes mediante el movimiento del referido punto B contemplando la monotonía y el extremo de la función.

La solución de la inecuación $1/7(x+1)(-3x+27) \leq 0$ planteada en el inciso "e" se torna sencilla al introducir la función asociada a esta inecuación, $f(x)=1/7\,(x+1)(-3x+27)$, pues en su gráfica "ver figura 3" se pueden reconocer rápidamente los ceros y los intervalos donde las imágenes de la función son menores o iguales que cero, aspectos suficientes para escribir la solución.

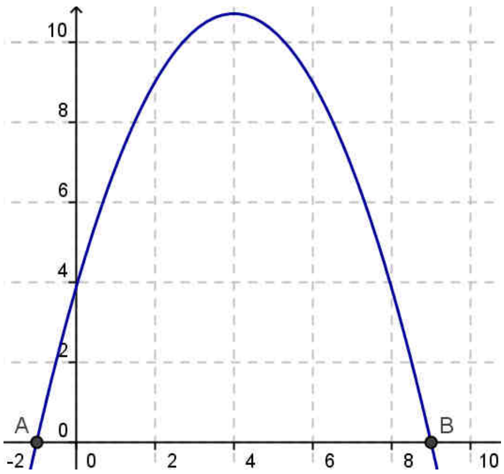

Figura 3. Representación de $f(x)=1/7\,(x+1)(-3x+27)$

Otra vía posible que pudieran utilizar los escolares es reconocer la equivalencia de la inecuación dada $1/7(x+1)(-3x+27) \leq 0$ con un sistema de dos ecuaciones lineales determinado por los factores implicados en la inecuación y luego, apoyado en las facilidades del GeoGebra, realizar una interpretación geométrica a partir de los signos de las nuevas funciones asociadas al sistema; como ejemplo se presenta un sistema y sus funciones asociadas con colores diferentes.

a: $x - y = -1$ ($y = x+1$, color verde) y

b: $3x + 7y = 27$ ($y=1/7\,(-3x+27)$, color rojo),

En la figura 4 se observan las perpendiculares al eje X, con color azul, que pasan por los ceros de ambas funciones, c: $x = -1$ y d: $x = 9$ y dividen al eje X en tres intervalos. Los colores de las funciones permiten distinguir con facilidad sus signos en cada intervalo y por tanto el signo del producto de los factores implicados en la desigualdad. Se observa que para las $x \in [-1;9]$ los gráficos (en verde y rojo) están por encima del eje "x" a diferencia de lo que se observa en los otros dos intervalos. Esta vía posibilita la comprensión de fundamentos acerca de las relaciones entre inecuaciones cuadráticas y los sistemas de dos ecuaciones lineales con una incógnita.

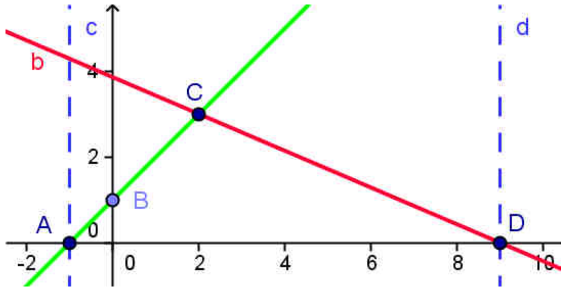

Figura 4. Representaciones de y=x+1, y=1/7 (-3x+27), x=-1 y x=9

En caso de que el inciso "l" constituya un problema para algunos escolares, que no dominen la vía de solución, se les facilita su obtención a partir de las facilidades constructivas y visualización de las variaciones de las coordenadas de un punto que se sitúe y mueva por el gráfico de la función f(x)=1/7(x+1)(-3x+27); igualmente por las relaciones de posición entre el grafico de la función cuadrática f(x) y rectas perpendiculares al eje "Y" que se pueden observar de manera dinámica, para lo cual basta situar un punto sobre el eje "Y", trazar una recta por este perpendicular al eje "Y" y desplazar el punto. Para los que conocen la interpretación geométrica de la desigualdad planteada la vía de solución, se reduce a la observación de la relación entre las gráficas de y=11 y f(x), en este caso las imágenes de f(x) son menores que 11 "ver figura 5" y por tanto el conjunto solución es vacío, es decir, ningún valor de x satisface la desigualdad.

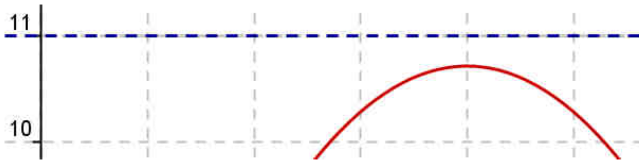

Figura 5. Representaciones de y=11, y=1/7 (-3x+27)

En determinados casos, como en el inciso ¨g¨: "Traslade el punto B en el eje Y hasta obtener la ecuación -2x+y=2 y luego el punto C sobre esta recta para que formen un ángulo de 90^{o}…", las soluciones con apoyo del GeoGebra no son triviales o no se resuelven solamente con la utilización de una de sus opciones, por ejemplo si ponen las cuadrículas en 5x5 o diferentes de 1x1, es muy probable que resulte difícil obtener la ecuación pedida y lograr la perpendicularidad de las rectas a partir del movimiento del punto C como se muestra en la "figura 6", pues no se destacan en ellas el punto de intercepción de la recta con el eje "Y" y el punto donde se logra la perpendicularidad.

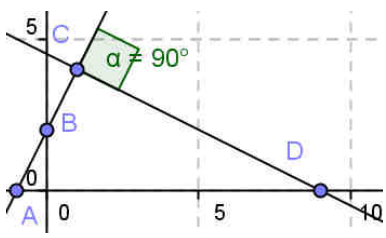

Figura 6. Rectas perpendiculares en cuadrículas de 5x5

La limitación señalada, no significa que no sea provechosa la utilización del GeoGebra por los docentes y los escolares, para orientación y desarrollo de actividades investigativas de búsqueda de variadas alternativas y vías de solución, es necesario que los docentes den las orientaciones o ayudas estrictamente suficientes atendiendo a los conocimientos previos e ideas de los escolares, por ejemplo, en el inciso “g” pudieran concretarse de la siguiente manera:

- Impulsos dirigidos a reconocer que A(-1,0) es un punto de la ecuación pedida, que para x=0, y=2 y por tanto B(0,2); de aquí solo resta darle la entrada a B = (0, 2) para obtener la ecuación -2x+y=2.
- Si al desplazar a C con el propósito de obtener el ángulo de 90^0, con las cuadrículas de la vista gráfica en 5x5 observa que el ángulo pasa de 89.98^0 a 90.28^0 y otras parejas de valores que no contienen a 90^0, el docente pudiera ofrecer impulsos para que reconozcan la conveniencia de las cuadrículas de 1x1, entre los que pudieran figurar las interrogantes ¿sucede lo mismo si las cuadrículas tienen otras dimensiones?, ¿ofrecen alguna ventaja las cuadrículas de 1x1?
- ¿Existe alguna relación entre la razón de los coeficientes de las variables X e Y de dos ecuaciones perpendiculares? Observen la vista algebraica para diferentes casos. ¿Puede utilizarse dicha relación en para una nueva vía de solución?
- ¿Cuál opción del GeoGebra permite determinar las coordenadas del punto de intersección de estas rectas donde forman un ángulo de 90^0?, ¿podrá ser “punto y recta perpendicular”?, si se tiene la recta -2x+y=2 ¿cuál punto utilizaría para trazar la perpendicular a esta?

3. Funciones cuadráticas y parábolas con apoyo del GeoGebra. Ejercicios y consideraciones

A continuación se presentan ejemplos de órdenes y problemas sobre funciones cuadráticas y parábolas con apoyo del GeoGebra, además algunas consideraciones y comentarios para la solución o tratamiento didáctico pensando en posibles ideas o vías que pudieran redescubrir y plantear los escolares a partir de sus conocimientos previos y el trabajo en equipo, es decir, inicialmente se centra la atención en las iniciativas con vista a propiciar su creatividad de manera diferenciada. Aunque la racionalidad de la vía y el aprovechamiento óptimo del GeoGebra resulta importante debe resaltarse en el momento oportuno, de manera que estimule las potencialidades de los escolares.

En general los ejercicios difieren de los que generalmente se les presentan a los alumnos en la enseñanza precedente (preuniversitaria) y en la propia universidad por su enunciación y carácter abierto, de esta manera se da respuesta a exigencias del programa de la disciplina Fundamentos de la Matemática Escolar, tienen un carácter complementario e integrador que generan actividades investigativas por los docentes en formación.

1. Dada una función $f(x)=ax^2+bx+c$, $\{a,b,c\}\in \Re$

a) ¿Qué relación debe existir entre a, b y c para que f(x) tenga dos ceros?
b) ¿Cómo proceder para determinar el eje de simetría de f(x)?
c) ¿Cómo determinar las coordenadas del vértice de f(x)?
d) Si a>0, ¿En cuál subconjunto del dominio de f(x) se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$, $\forall\ x_1<x_2$?
e) ¿Cómo determinar en el dominio de f(x) el conjunto en el cual f(x) es positiva?
f) Si $f(x)= x^2-4x+c$ y $-4\leq c<15$, para cuáles valores de C, f(x) tiene dos ceros enteros.
g) Luego de dar respuesta a las anteriores interrogantes por las vías ya conocidas, elabora nuevas vías de solución, principalmente con el apoyo del GeoGebra u otro software conveniente y explicita los fundamentos matemáticos y constructivos utilizados.

Con los conocimientos de la enseñanza preuniversitaria es posible dar rápidamente respuestas formales a las anteriores interrogantes, por ejemplo, el primer inciso "a" mediante la aprendida, generalmente de memoria, condición del discriminante: b^2-4ac>0, en este sentido cabe preguntarse ¿están en condiciones los alumnos de fundamentar esta aseveración?, si los alumnos no están preparados para fundamentar múltiples afirmaciones como estas son pertinentes las siguientes interrogantes:

- ¿Cuáles medios y métodos se están empleando?
- ¿Se está centrando la atención en los fundamentos de la matemática o en la nivelación de los escolares en cuanto al dominio de algoritmos?
- ¿Se están utilizando juiciosamente las nuevas tecnologías y software?

Dificultades diagnosticadas evidencian que se requiere una mejor atención al dominio que poseen los alumnos sobre los fundamentos de las matemáticas escolares y a la incidencia que en este sentido tienen las relaciones entre distintos contenidos matemáticos que actualmente se trabajan de forma fragmentada.

Esta pregunta fue elaborada teniendo en cuenta los conocimientos previos y potencialidades de un grupo escolar con vista a promover juicios y razonamientos acerca de fundamentos de la matemática; centra la atención en aspectos procedimentales, la utilización de conceptos esenciales y las posibilidades de obtener informaciones por diferentes vías, entre ellas la experimentación con el GeoGebra. Este software permite generar y corroborar ideas, estudiar con gran facilidad y rapidez el comportamiento de las funciones al variar determinados parámetros.

Una vía posible para determinar el eje de simetría y las coordenadas del vértice de f(x) mediante el GeoGebra se ilustra en la siguiente gráfica "ver figura 7" y protocolo de construcción "ver tabla 2", consiste en: introducir la función y deslizadores para sus parámetros y posteriormente; situar un punto (A) en la función (f) y trazar una recta (d) que pase por este y sea perpendicular al eje Y, con en propósito de buscar dos puntos que permitan determinar el eje de simetría y las coordenadas del vértice, y a partir de aquí respuestas a las interrogantes del ejercicio.

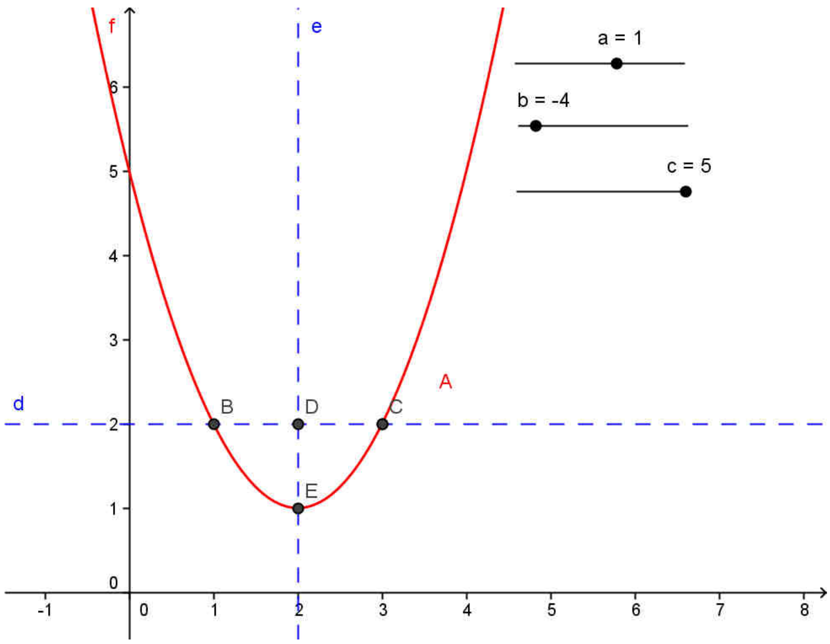

Figura 7. Función $f(x)=ax^2+bx+c$, deslizadores y eje de simetría

Nº	Nombre	Definición	Álgebra
1	Número a		a = 1
2	Número b		b = -4
3	Número c		c = 5
4	Función f	$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$	$f(x) = x^2 - 4\,x + 5$
5	Punto A	Punto en f	A = (3, 2)
6	Recta d	Recta que pasa por A perpendicular al Eje Y	d: y = 2
7	Punto B	Punto de intersección de f, d	B = (1, 2)
7	Punto C	Punto de intersección de f, d	C = (3, 2)
8	Recta e	Mediatriz B, A	e: x = 2
9	Punto D	Punto de intersección de e, d	D = (2, 2)
10	Punto E	Punto de intersección de f, e	E = (2, 1)

Tabla 2. Protocolo de la construcción

Es importante destacar el interés, en este caso, de que el punto A esté sobre f(x) pues permitirá desplazarlo por ella y reflexionar sobre el carácter general del procedimiento, observar que se mantienen las relaciones esenciales entre distintos componentes, además establecer vínculos intra matemáticos, entre conocimientos adquiridos en distintos grados.

Los deslizadores permitirán realizar en breve lapso numerosas y valiosas observaciones, con otras herramientas también se podrán realizar comprobaciones de construcción o constatación de ideas surgidas durante la visualización de los movimientos efectuados, por ejemplo se podrá comprobar y visualizar de forma dinámica si se conserva la longitud de los segmentos DB y DC, la concavidad y el crecimiento de la función.

Para la solución del inciso "f" existen diversas vías, los escolares que dominen el GeoGebra contarán con una muy sencilla: introducir la función $f(x)= x^2-4x+c$ y un deslizador para c, $-4\leq c<15$, que al deslizarlo obtendrán observarán para cuáles valores de C, f(x) tiene dos ceros enteros: para c=0 los ceros x=0 y x=4, para c=3 los ceros x=1 y x=3; además observarán que para c=-4 no tiene ceros enteros, para c=4 tiene un solo cero x=2 y que para valores de "c" mayores que 4 no tiene ceros pues su gráfico se encuentra por encima del eje de las X. El desplazamiento de c también les permitirá observar el efecto de traslación en propiedades de la función.

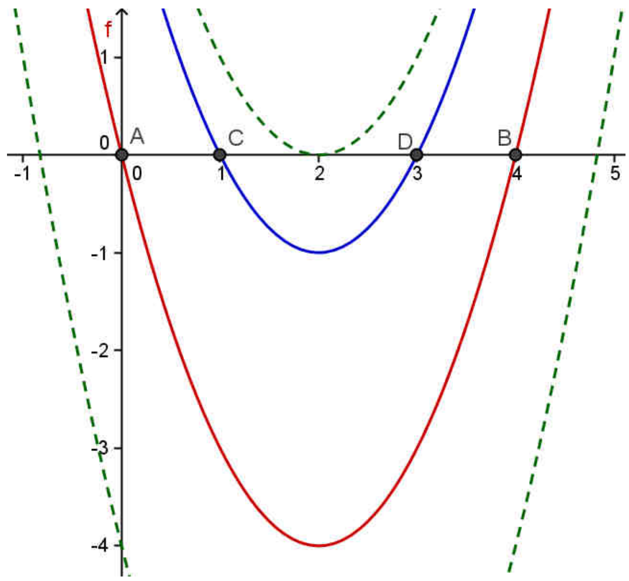

Figura 8. Función $f(x)= x^2-4x+c$ y gráficos para valores de c

Los escolares también pueden utilizar vías de solución que, aunque no sean las más racionales, deben aprovecharse por los docentes con vista a profundizar en el diagnóstico y diferenciar adecuadamente la enseñanza, pues revelan fortalezas y debilidades de los escolares asociadas al dominio, integración y aplicación de contenidos matemáticos, entre otras pudiera estar las siguientes:

- Considerar un valor conveniente para “c”, por ejemplo c=0, trazar la gráfica correspondiente $f(x)=x^2-4x$ para este “aparece con color rojo en la figura 8”y realizar el análisis a partir de traslaciones sucesivas de esta función mediante vectores de módulo 1 paralelos al eje de las “Y” “ver figura 9” que le permitirá determinar los valores de C pedidos.

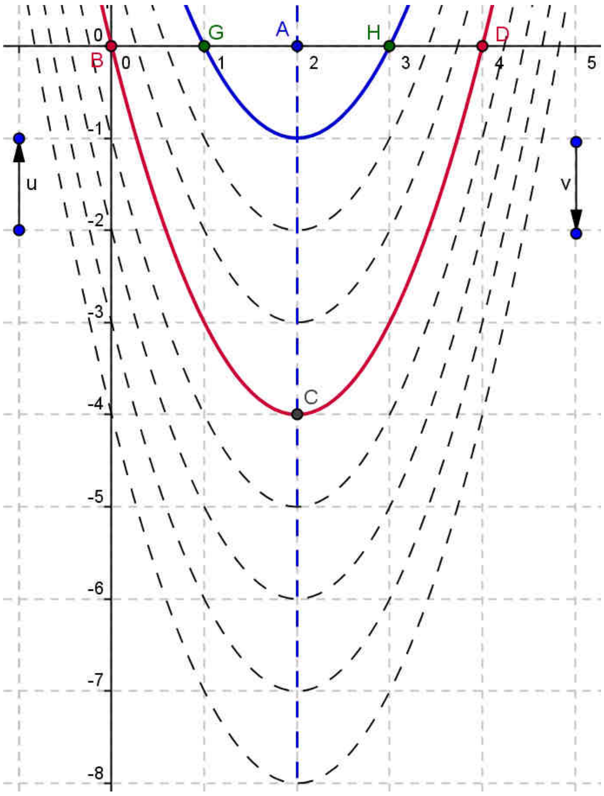

Figura 9. Función $f(x)= x^2-4x$ trasladada sucesivamente mediante vectores de módulo 1

- Otra vía pudiera ser: Reconocer que el eje de simetría es una recta perpendicular al eje “X” que pasa por el punto (2;0), que los ceros equidistan de este y de aquí determinar los valores de “c” mediante la sustitución de valores probables de los ceros, atendiendo a alguna lógica, en la ecuación $x^2-4x+c=0$, por ejemplo: para x=1 se obtiene c=3, para x=0 se obtiene c=0, para x=-1 o cualquier otro cero menor que este c no sería mayor o igual que -4. En este caso la lógica radica en realizar sustituciones sucesivas en orden decreciente de valores enteros a partir de 1 en la referida ecuación para observar los valores de c; el eje de simetría de f(x), la recta x=2, garantiza los ceros a la derecha de esta x=3 y x=4.
- De los alumnos también pudieran surgir algunas ideas a partir de las observaciones de las construcciones que requieren de análisis para determinas si constituyen vías de solución y sus fundamentos, por ejemplo, en la figura 10, se representa, con color negro, la función $f(x)=x^2-4x+3$ (tiene ceros en 1 y 3) y mediante su traslación por el vector “u” de módulo 3 se obtiene la función $g(x)=x^2-4x$ (con color rojo y ceros en 0 y 4), al trasladar esta función g(x) por el vector “v” de módulo 5 se obtiene la función $h(x)=x^2-4x-5$ (con color azul y ceros en -1 y 5), al trasladar esta función h(x) por el vector “w” de módulo 7 se obtiene la función

E N L A R E D

$i(x)=x^2-4x-12$ (con color verde y ceros en -2 y 6), de aquí pueden surgir interrogantes acerca de los fundamentos.

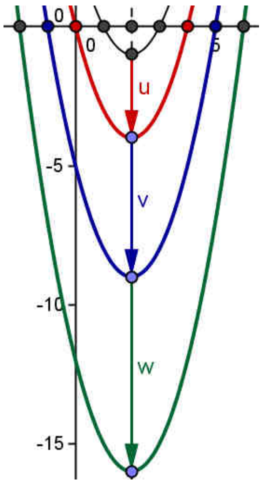

Figura 10. Función $f(x)= x^2-4x$ trasladada sucesivamente por los vectores u, v y w.

El ejercicio y consideraciones presentadas revelan la importancia del GeoGebra en las construcciones geométricas, la comprensión y elaboración de respuestas, la identificación de dificultades y potencialidades en los escolares, la estimulación de su curiosidad y la actividad investigativa de forma individual y colectiva. También ilustran el carácter general o particular de determinados procedimientos y fundamentos que se utilizan, la diferenciación de casos y condiciones.

El desarrollo actual de las tecnologías y software existentes posibilitan la búsqueda de distintas y nuevas vías de solución para los ejercicios que no pueden eludirse en un proceso de enseñanza – aprendizaje desarrollador, en especial en la formación de docentes, no utilizarlas constituye un grave error. La búsqueda de distintas vías de solución para un mismo ejercicio, la reflexión sobre sus características, diferencias y ventajas contribuye a profundizar en los fundamentos de las matemáticas y su didáctica, a continuación se presentan otros ejercicios en esta dirección.

2. a) Abra un archivo con el GeoGebra, trace la recta que pasa por los puntos A (1; 1) y B (8; 1) y la parábola determinada por esta y el foco F(3;2). Mediante transformaciones algebraicas verifique si la función $f(x)=1/2\ (x-3)^2+ 3/2$ representa a la parábola.

b) Mueva a F a distintas posiciones sobre las rectas x=3 y y=2. Describa sus observaciones con respecto al gráfico y su ecuación.

c) Mueva los puntos A y B a distintas posiciones y describa sus observaciones.

d) Trace un punto C sobre la parábola y una recta perpendicular a AB que pase por el; determine el punto de intersección de ambas rectas "D". Trace el segmento CF y compare su longitud con la de CB en distintas posiciones de C.

El inciso "a" es muy sencillo, en particular para los que dominan el GeoGebra, basta utilizar las herramientas "recta que pasa por dos puntos" y "Parábola (con foco y directriz)". En este caso en el área algebraica aparecerá la ecuación $x^2-6x-2y=-12$, luego despejando y haciendo transformaciones algebraicas se obtiene la función en la forma pedida. Con el GeoGebra también es posible visualizar la ecuación en diferentes formas: $y=ax^2+bx+c$ ($y=0.5x^2-3x+6$), $x^2=6x+2y–12$, $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey=f$ (x^2-

6x-2y=-12) y de aquí generar actividades investigativas de aprendizaje atendiendo a la motivación de los escolares, pues generalmente no se abordan o profundiza en ellas.

El inciso "b" es abierto y más exigente que el anterior, genera una importante actividad investigativa en los escolares, mediante el desplazamiento podrá observar las variaciones del gráfico de la función y de su ecuación, aunque en este caso no se precisa la profundidad de las observaciones debe estimularse y valorarse en la calidad de la respuesta ofrecida. Es importante que se destaque la conveniencia de situar a F sobre las referidas rectas para poderlo desplazar sobre ellas con facilidad y realizar análisis más profundos, es decir el orden en la construcción es importante, no es lo mismo trazar una de las rectas por F, que situar a F en ellas.

La investigación puede ser menos abierta, no necesariamente menos exigente, si se señalan los elementos o aspectos sobre los cuales deben fijar la atención, entre ellos los que sean esenciales o interesantes respecto a la dinámica, por ejemplo:

e) ¿Qué sucede cuando el foco "F" se coloca sobre: el punto (3;1), el punto (3;0), el punto (3;-1)

Con respecto al punto (3; 1), se favorece que el alumno identifique un caso especial pues la distancia entre el foco y la directriz se hace cero y tiene una notable incidencia en el gráfico.

f) ¿Qué sucede a medida que la ordenada del foco crece sobre la recta x=3?, ¿Qué sucede a medida que la ordenada del foco decrece sobre la recta x=3?, Puedes fijar tu atención en los ceros, monotonía, crecimiento, concavidad, ecuación y otros elementos.

g) En la figura 11 se presenta una parábola, exponga dos procedimientos diferentes para obtener su ecuación, el primero sin la utilización del GeoGebra y el segundo con apoyo del GeoGebra.

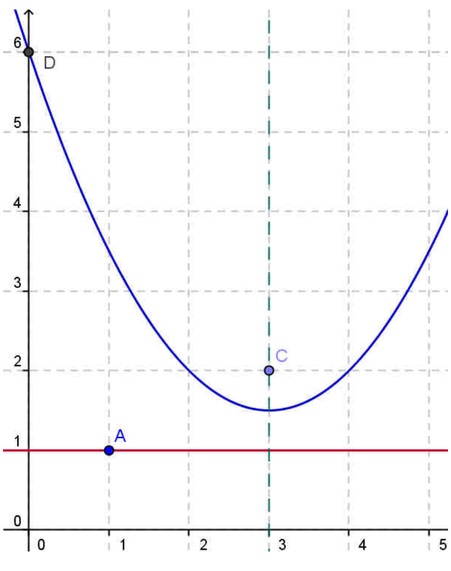

Figura 11. Parábola

3. Explica cómo podrías obtener, mediante construcciones geométricas, varios puntos de una parábola de la que solo conoces la ecuación de la directriz y las coordenadas del foco.

Este tipo de pregunta resulta compleja para la mayoría de los escolares no entrenados en la realización de construcciones geométricas y el trabajo con lugares geométricos. Una solución esperada es la siguiente: Considerar, sin pérdida de generalidad, una directriz y un foco cualquiera, por ejemplo y=-1 y F(1,2) y explicar un procedimiento al que solo se puede llegar a partir de la definición de parábola como lugar geométrico "considerar un punto en la directriz y trazar una perpendicular a la directriz que lo contenga; trazar la mediatriz del segmento que une al foco con este punto y luego determinar el punto de intersección de estas perpendiculares, que es un punto de la parábola, pues la distancia desde este al foco y a la recta es la misma.

Con el GeoGebra el ejercicio se torna más sencillo, ya que los alumnos pueden visualizar sus ideas o generarlas a partir de diferentes ensayos y manipulaciones inteligentes de parábolas y triángulos isósceles. Además se cuenta con una herramienta muy poderosa la de "Lugar Geométrico" que permite comprobar inmediatamente el procedimiento utilizado. A continuación se presenta la gráfica "ver figura 12" y el protocolo de construcción "ver tabla 3".

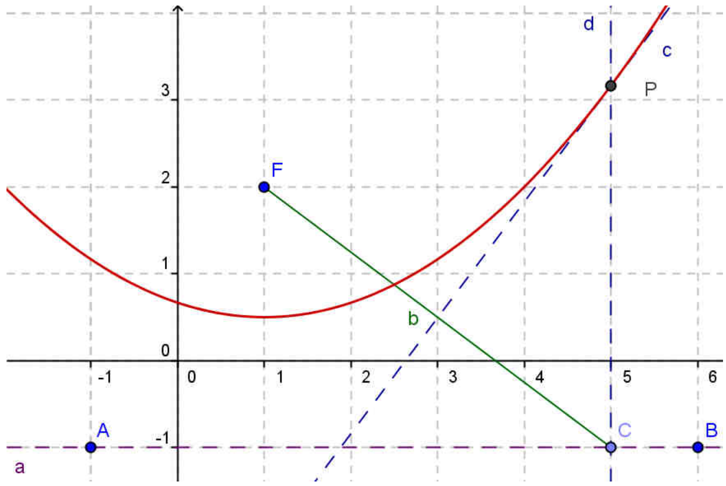

Figura 12. Puntos de una parábola a partir de la directriz del foco

Nº	Nombre	Definición	Álgebra
1	Punto A		A = (-1, -1)
2	Punto B		B = (6, -1)
3	Recta a	Recta que pasa por A, B	a: y = -1
4	Punto F		F = (1, 2)
5	Punto C	Punto en a	C = (5, -1)
6	Segmento b	Segmento [F, C]	b = 5
7	Recta c	Mediatriz F, C	c: -4x + 3y = -10.5
8	Recta d	Recta que pasa por C perpendicular a Eje X	d: x = 5
9	Punto P	Punto de intersección de c, d	P = (5, 3.17)
10	Lugar Geométrico lugar1	Lugar Geométrico [P, C]	lugar1

Tabla 3. Protocolo de la construcción

Para los alumnos entrenados en construcciones geométricas y trabajo con lugares geométricos no necesitarán apoyarse en casos particulares, con altos niveles de abstracción podrán reconocer que los vértices principales de los triángulos isósceles que tienen como base al segmento determinado por el foco y un punto de la directriz y, que uno de sus lados es perpendicular a la directriz, pertenecen a la parábola.

4. En una parábola que abre hacia arriba se denota el foco con F, un punto de ella con P y un punto de la directriz con C. Si FPC es un triángulo rectángulo isósceles responda:

a) Exprese el área del triángulo en función de la distancia del foco al vértice de la parábola.

b) Explique un procedimiento para obtener la ecuación de la recta que pasa por el vértice de la parábola y el punto P. Elabore un fichero GeoGebra que le permita ilustrarlo.

c) Exponga distintas vías para obtener el punto del plano que, conjuntamente con F, C y P forma un cuadrado.

5. A continuación se presenta la gráfica de una parábola "ver figura 13" y el protocolo de construcción "ver tabla 4".

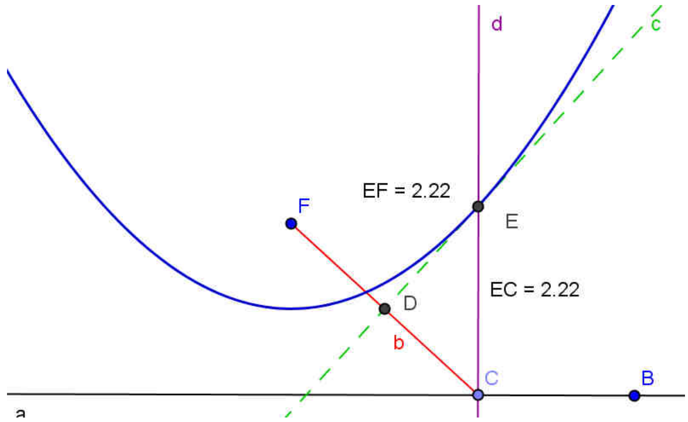

Figura 13. Puntos de una parábola a partir de la directriz del foco

a) Explique sintéticamente los fundamentos matemáticos utilizados.
b) Reflexione brevemente sobre las características generales de la construcción realizada y las posibilidades que ofrece para la enseñanza y el aprendizaje.
c) A partir de la parábola presentada formule y resuelva un problema que involucre conocimientos de otros temas de la disciplina Fundamentos de la Matemática Escolar u otras.

Nº	Nombre	Definición	Álgebra
1	Punto A		A = (-1.4, 0.6)
2	Punto B		B = (6.08, 0.58)
3	Recta a	Recta que pasa por A, B	a: 0.02x + 7.48y = 4.46
4	Punto F		F = (2.04, 2.6)
5	Punto C	Punto en a	C = (4.24, 0.58)
6	Segmento b	Segmento [F, C]	b = 2.98
7	Punto D	Punto Medio de F, C	D = (3.14, 1.59)
8	Recta c	Mediatriz b	c: -2.2x + 2.02y = -3.7
9	Recta d	Recta que pasa por C perpendicular a a	d: -7.48x + 0.02y = -31.7
10	Punto E	Punto de intersección de d, c	E = (4.25, 2.8)
11	Lugar Geométrico lugar1	Lugar Geométrico [E, C]	lugar1
12	Número distanciaEC	Distancia de E a C	distanciaEC = 2.22
13	Texto TextoEC	Nombre[E]+(Nombre[C])+" \, = \,"+distanciaEC	TextoEC = "EC \, = \, 2.22"
14	Número distanciaEF	Distancia de E a F	distanciaEF = 2.22
15	Texto TextoEF	Nombre[E]+(Nombre[F])+" \, = \,"+distanciaEF	TextoEF = "EF \, = \, 2.22"

Tabla 4. Protocolo de la construcción

Como se observa en este ejercicio (5) se retoma la herramienta de "Lugar Geométrico" con una intencionalidad distinta a la del ejercicio 3, se promueve la identificación de fundamentos matemáticos utilizados y de las características generales de la construcción realizada a partir de la información visual, de esta manera se contribuye a la preparación matemática y didáctica de los docentes en formación.

Una variante del ejercicio 5 puede ser la de disminuir la cantidad de información contenida en el gráfico y el protocolo de construcción manteniendo las esenciales y reajustando las interrogantes acorde a los datos, de esta manera se pudieran incrementar las exigencias del ejercicio, hacerlo más abierto, estimular la información visual, la construcción y cálculo geométrico según las necesidades e intereses cognoscitivos.

Los ejercicios y consideraciones expuestos ilustran las ventajas que ofrece el uso del GeoGebra para profundizar en fundamentos de la matemática y el mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje en general a partir de opciones que posibilitan: la integración de diversos contenidos que generalmente se tratan de manera fragmentada; el trazado de gráficos y construcciones auxiliares para facilitar el análisis de propiedades y la generación de nuevas vías de solución; la transformación de ejercicios atendiendo a la diferenciación de la enseñanza acorde a los conocimientos previos de los escolares, los objetivos, los medios y las condiciones objetivas en determinados momentos. También la estimulación de la creatividad en los docentes.

Bibliografía

Hernández H, C. M. (2011). Estimulación y desarrollo de la creatividad mediante el enfoque investigativo. Curso pre evento. II Encuentro bilateral Cuba-México. Ediciones UO. ISBN: 978-959-18-0721-2.Santiago de Cuba.

Hernández H, C. M. (2012). Actividades investigativas escolares en la educación. Ejemplos. Curso pre evento. IV Taller CALIDED sobre Evaluación y Mejoramiento de la Calidad Educativa. Ediciones UO. ISBN 978-959-207-436-1. Santiago de Cuba.

Hernández H, C. M. (2011) y otros. Concepción para el desarrollo de actividades investigativas escolares: Ejemplos. Resultado de Proyecto Educativo "Evaluación y mejoramiento de la calidad educativa en la UCP Frank País García y centros escolares de Santiago de Cuba".

Mayer, R.E. (1983). Thinking, problem solving, cognition. W.H. Freeman and Company, USA, 1983.

Hohenwarter, M. y Hohenwarter, J. (2008). Documento de Ayuda de GeoGebra. Manual Oficial de la Versión 3.2. 18 de Septiembre del 2009 http://www.GeoGebra.org

Carlos Manuel Hernández Hechavarría. Universidad de Ciencias Pedagógicas de Santiago de Cuba. Posee los títulos de Maestro Primario, Profesor de Secundaria Básica, Licenciado en Matemática, Master en Ciencias de la Educación Superior y Doctor en Ciencias Pedagógicas. Ha impartido matemáticas en todas las enseñanzas y otras asignaturas en cursos de pregrado y postgrado, conferencias y cursos en eventos científicos y congresos pedagógicos territoriales, nacionales e internacionales, también en varias maestrías. Ha dirigido investigaciones acerca de la creatividad en los escolares y el enfoque investigativo en la enseñanza. Tiene experiencia de participación y dirección de Proyectos Educativos en Cuba y México, actualmente dirige uno sobre evaluación y mejoramiento de la calidad educativa asociado a un Programa Nacional. E-mail: chernandez@ucp.sc.rimed.cu