ENSEÑANZA CONSTRUCTIVISTA, CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL PROFESOR Y ANÁLISIS DIDÁCTICO EN MATEMÁTICAS. EL CASO DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Cristina Carulla, Pedro Gómez
"una empresa docente" • Universidad de los Andes
mcarulla@uniandes.edu.co • pgomez@valnet.es

Si el profesor de matemáticas asume una posición constructivista del aprendizaje, entonces se enfrenta a varios interrogantes: ¿cómo debe ser mi enseñanza?; ¿qué conocimientos debo tener para poder diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de clase?; ¿qué tipos de análisis debo hacer para lograrlo? En este capítulo abordamos algunos de estos interrogantes al reflexionar sobre el conocimiento didáctico del profesor de matemáticas y mostrar el papel del análisis didáctico en el diseño, puesta en práctica y evaluación de actividades de clase. En particular, profundizamos en el papel que pueden jugar las nociones de estructura conceptual, sistema de representación y mapa conceptual como herramientas conceptuales y metodológicas para la práctica docente del profesor de matemáticas.

INTRODUCCIÓN

Los profesores de matemáticas nos enfrentamos diariamente a problemas complejos dentro de nuestra aula de clase. Estos problemas parecen ser problemas de enseñanza o de contenido. Pero, en realidad, casi siempre son de aprendizaje. Nos referimos a los problemas de lograr que nuestros estudiantes construyan, de la mejor manera posible, su conocimiento matemático. En algunos casos, nos cuesta trabajo comprender por qué algunos de nuestros estudiantes no pueden avanzar en la construcción de su conocimiento. Y en muchas ocasiones (con o sin razón) tendemos a culpar a los estudiantes de esta situación, al afirmar que vienen mal preparados o que no tienen la actitud apropiada hacia las matemáticas. Pero, ¿qué podemos hacer nosotros, como profesores de matemáticas, para apoyar a nuestros estudiantes para que avancen en su formación matemática?

Un primer paso consiste en convencernos a nosotros mismos de que el centro de nuestra preocupación debe ser el aprendizaje. Lo que nos debe preocupar es la calidad de la formación matemática que nuestros estudiantes están logrando gracias a nosotros. Y, para poder preocuparnos por el aprendizaje, debemos intentar comprender, en la medida de nuestras posibilidades, la problemática de la comprensión en matemáticas. ¿Qué significa comprender matemáticas? Esta es una pregunta muy compleja que podríamos responder de manera sencilla: comprender matemáticas significa ser capaz de resolver problemas en los que las matemáticas están involucradas. De esta manera, podemos reformular nuestro problema al preguntarnos ¿por qué nuestros estudiantes no son capaces de resolver un problema dado?

Existe una respuesta sencilla a esta pregunta: un estudiante no puede resolver un problema porque el conocimiento que tiene no es "suficiente" para permitírselo. Usamos aquí un significado amplio del término "conocimiento". No obstante, nuestra tesis consiste en que buena parte de los problemas que nosotros, como profesores de matemáticas, enfrentamos en nuestra aula de clase, tienen que ver con nuestra capacidad para conocer y comprender el conocimiento matemático de nuestros estudiantes. Esta capacidad nos debe permitir comprender por qué nuestros estudiantes no son capaces de resolver un problema. Adicionalmente, ella nos debe dar luces para diseñar las estrategias con las cuales podremos apoyar a nuestros estudiantes para que ellos avancen en la construcción de su conocimiento matemático y puedan llegar a resolver los problemas que antes eran insolubles para ellos.

La comprensión en matemáticas depende directamente de las matemáticas mismas. Aunque hay facetas de la formación matemática del estudiante y de sus actitudes hacia las matemáticas que pueden ser comunes a otras áreas del conocimiento, nos preocupamos aquí por aquellos aspectos de la comprensión en matemáticas que están directamente relacionados con las matemáticas mismas. Por esa razón, consideramos que el desarrollo de nuestra capacidad para comprender el conocimiento matemático de nuestros estudiantes depende de nuestra comprensión y nuestro conocimiento de las matemáticas escolares. En otras palabras, consideramos que, para poder resolver los problemas a los que nos enfrentamos en el aula de clase, debemos conocer en detalle la estructura y las principales características del conocimiento matemático que esperamos que nuestros estudiantes construyan. Aunque, al ser profesores de matemáticas, podemos considerar que conocemos suficientemente el tema que enseñamos, es posible que esto no sea cierto. Podemos ser buenos matemáticos, en el sentido de conocer algunos temas con profundidad desde la perspectiva del saber matemático. Pero, ¿conocemos estos temas desde la perspectiva de las matemáticas de la escuela y de nuestros estudiantes?

Las preguntas anteriores y nuestras propias respuestas nos han llevado a identificar diferentes elementos de la realidad escolar y en particular del trabajo en el salón de clase de matemáticas. Pensamos que existe una complejidad en medio de la cual el profesor de matemáticas vive y de la cual no es consciente. Realizamos un proyecto de investigación con el cuál pretendíamos contrastar una hipótesis que surgió a lo largo de la realización de varios programas de formación permanente de profesores. Nosotros percibimos en estos programas, que, cuando los profesores se enfrentan al problema de analizar un concepto matemático desde la perspectiva del análisis didáctico (análisis de contenido, análisis de instrucción y análisis cognitivo) con la ayuda de los sistemas de representación y los mapas conceptuales como eje organizador, los primeros, y como herramienta de representación, los segundos, entonces los profesores se hacen paulatinamente más conscientes de la complejidad del contenido matemático y de la problemática de su enseñanza y aprendizaje.

En el estudio se exploraron las concepciones de profesores de matemáticas de secundaria acerca de la función cuadrática con base en una serie de mapas conceptuales que ellos, organizados por grupos, produjeron con motivo de un esquema de interacción que involucró tres tipos de análisis: de contenido, de instrucción y cognitivo. Los sistemas de representación fueron el eje organizador de estos mapas conceptuales que fueron codificados con base en una serie de atributos que pretendían identificar aquello que el profesor reconoce como esencial del objeto, el tipo de representaciones que él utiliza para abordar el objeto y el conjunto de situaciones, fenómenos y problemas que él asocia al objeto. El análisis de los resultados se hizo con base en una caracterización de los mapas conceptuales y muestra que la utilización de los sistemas de representación, los mapas conceptuales y el análisis didáctico, junto con un esquema de trabajo en el que se trabaja en grupo, en el que se interactúa con investigadores y en el que se contrastan las producciones socialmente, puede afectar las visiones de los profesores sobre el contenido matemático.

En este documento reflexionamos sobre la importancia de las nociones de estructura conceptual, sistema de representación y mapa conceptual como componentes del conocimiento didáctico del profesor de matemáticas y como herramientas para la formación permanente de docentes y la investigación. El proyecto de investigación nos permitió ahondar aun más en el conocimiento de las mismas y lo que presentamos en este documento es una elaboración teórica que surgió durante la realización de la investigación. Creemos que estas herramientas pueden aportar a una mayor comprensión de las matemáticas escolares y a la construcción de estrategias para abordar los problemas a los que el maestro se enfrentan en el aula de clase de matemáticas y en particular los problemas de aprendizaje.

El documento comienza con una descripción de la investigación sobre el conocimiento del profesor y de la preocupación sobre cómo debería ser la enseñanza si se construyera sobre una visión constructivista del aprendizaje. Se discute el modelo de Simon (1995) en este sentido y se propone uno nuevo que lo extiende. Se describe este nuevo modelo con base en la noción de análisis didáctico y se profundiza en dos aspectos centrales de la misma: la estructura conceptual y los sistemas de representación. Tomando como ejemplo, el concepto de función cuadrática se muestra la manera como estas nociones, junto con la idea de mapa conceptual, permiten describir la estructura conceptual del concepto matemático con el propósito de diseñar actividades de clase.

INVESTIGACIÓN SOBRE CONOCIMIENTO DEL PROFESOR Y ENSEÑANZA CONSTRUCTUVISTA*

La investigación sobre el conocimiento del profesor y su relación con la enseñanza de las matemáticas ha pasado por tres fases (Ball, 1991; Cooney, 1994). En la primera fase, llamada "de la enseñanza eficiente", se buscó identificar, con base en las opiniones de los alumnos, las características de los buenos profesores. Se identificaron principalmente características relacionadas con su personalidad. Al tratar de validar estos resultados con el rendimiento de los estudiantes, se entró en una segunda fase en la que se buscó relacionar las características del profesor con el aprendizaje de sus alumnos y se encontró, entre otras cosas, que el conocimiento matemático del profesor (medido, por ejemplo, con el número de cursos que ha tomado o títulos que ha obtenido) no es un buen indicador del rendimiento de los alumnos. En la tercera fase, llamada "del pensamiento del profesor", se parte del supuesto de que lo que el profesor hace en el aula depende de lo que el profesor sabe y piensa. La reflexión se libera entonces de las ideas anteriores que enfatizaban el conocimiento puramente matemático conjuntamente con el conocimiento de algunos aspectos generales de pedagogía.

Cooney (1994) reconoce esta situación y se hace dos preguntas: "¿Qué tipos de conocimientos necesitan los profesores para ser eficientes? ¿Qué tipos de experiencias deben vivir los profesores para construir ese conocimiento?" (p. 608). Promueve la formación de profesores como un campo de indagación sistemática que se está basando en la importancia de la cognición, el contexto y el paradigma constructivista. Considera que se estaban produciendo numerosos relatos de teorías locales de profesores, pero no se estaba pasando de lo local a lo general. "¿Qué perspectivas teóricas nos pueden permitir comprender las experiencias que viven los profesores? ¿Qué perspectivas teóricas nos pueden permitir desarrollar programas de investigación y desarrollo que empujen nuestros esfuerzos hacia adelante?" (pp. 627-628). Por otro lado, al preguntarse acerca de los tipos de experiencias que los profesores deben vivir para construir ese conocimiento necesario para ser eficientes y al reconocer la importancia del paradigma constructivista, Cooney pone de relieve la necesidad de ver al profesor como un agente cognitivo y la necesidad de conceptualizar los procesos mediante los cuales el profesor construye su conocimiento.

Estos son los dos puntos que recoge Simon (1995): la enseñanza basada en los principios constructivistas y el profesor como agente cognitivo. El propósito de Simon es el de "contribuir al diálogo acerca de cómo sería la enseñanza si se construyera sobre una visión constructivista del desarrollo del conocimiento" (p. 115). De hecho, Simon propone, en términos de Steffe y d'Ambrosio (1995), un modelo de enseñanza con esas características. En este modelo, la enseñanza, desde la perspectiva del profesor, está guiada por la trayectoria hipotética de aprendizaje que consiste en la predicción que el profesor tiene acerca del camino por el cual puede proceder el aprendizaje. "Una trayectoria hipotética de aprendizaje le da al profesor criterios para seleccionar un diseño instruccional particular; por lo tanto, yo tomo mis decisiones de enseñanza basado en mi mejor conjetura acerca de cómo va a proceder el aprendizaje" (p. 135). La trayectoria hipotética de aprendizaje tiene tres componentes, relacionados entre sí: la visión que el profesor tiene del objetivo de aprendizaje, la planificación del profesor para las actividades de aprendizaje y las hipótesis del profesor acerca del proceso de aprendizaje. El objetivo de aprendizaje es la guía que le permite al profesor decidirse por unas actividades de aprendizaje. Esa decisión la toma teniendo en cuenta también sus hipótesis acerca del proceso de aprendizaje. Y estas actividades afectan, a su vez, sus hipótesis sobre el proceso.

El centro de la propuesta consiste en sugerir que éste es un proceso dinámico y cíclico. La trayectoria hipotética de aprendizaje no es algo que se determine con anterioridad a la realización de la clase y que permanezca estático durante ésta. Por el contrario, la trayectoria hipotética de aprendizaje estará en permanente evolución a lo largo de la clase porque la puesta en práctica de las actividades y la permanente evaluación del conocimiento de los alumnos, llevará al profesor a revisar dinámicamente la trayectoria hipotética de aprendizaje. El profesor diseña y revisa la trayectoria hipotética de aprendizaje con base en la evaluación de los conocimientos de los alumnos y utilizando su conocimiento. Es aquí donde entra en juego el conocimiento del profesor, con la aclaración adicional, teniendo en cuenta que se supone que el profesor es un agente cognitivo, de que el conocimiento del profesor también evoluciona con motivo de la experiencia que está viviendo en el aula. Esto se debe a que, en muchas ocasiones, lo que sucede en el aula es diferente de lo que el profesor espe-

*Lo que se presenta en los siguientes dos apartados es una adpatación de Gómez (2001).

raba, generando una perturbación que lo obliga a reformular sus hipótesis y su conocimiento.

Steffe y d'Ambrosio (1995), al extender el modelo de Simon, resaltan la importancia de tener en cuenta las acciones de los alumnos como indicativos de su conocimiento y de poner en relieve ese conocimiento matemático. Por lo tanto, el profesor, no solamente hace un seguimiento de estas acciones, sino que también hace conjeturas sobre las acciones que los alumnos podrían ejecutar con ciertas actividades (o situaciones, en términos de Steffe y d'Ambrosio). Estas dos autoras, detallan entonces un poco más dos de los elementos del modelo de Simon: las hipótesis sobre cómo procede el aprendizaje y el proceso de evaluación de los conocimientos de los alumnos. Ellas utilizan el término "zona de construcción potencial" para referirse "a las hipótesis del profesor acerca de lo que el alumno puede aprender, dado su modelo sobre los conocimientos que tiene el alumno" (p. 154).

Simon intenta identificar los tipos de conocimientos del profesor que se ponen en juego en este proceso dinámico. Menciona los siguientes: conocimiento de las matemáticas, de las actividades matemáticas y las representaciones, hipótesis sobre el conocimiento de los estudiantes, teorías de los profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, y del aprendizaje de los estudiantes sobre un tema específico. Según este autor, estos son los conocimientos que se ponen en juego cuando, con base en la evaluación del conocimiento de los estudiantes, el profesor reformula la trayectoria hipotética de aprendizaje. Aunque pretende definir una estructura de la relación entre estos conocimientos y los componentes de la trayectoria hipotética de aprendizaje, esto no se logra puesto que sugiere que todos los tipos de conocimiento, excepto aquel sobre las actividades matemáticas y sus representaciones, afectan los tres componentes de la trayectoria hipotética de aprendizaje.

En resumen, las principales características del modelo son las siguientes. El pensamiento de los estudiantes juega un papel central. El conocimiento del profesor evoluciona permanentemente. La planificación para la enseñanza incluye la generación de una trayectoria hipotética de aprendizaje. El cambio continuo en el conocimiento del profesor crea un cambio continuo en la trayectoria hipotética de aprendizaje. Los tipos de conocimiento del profesor y su papel en el diseño de la trayectoria hipotética de aprendizaje se presentan de manera general.

ANÁLISIS DIDÁCTICO Y CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

A continuación queremos, partiendo de la propuesta de Simon, profundizar en algunos de los aspectos del modelo, con el propósito de identificar los análisis que el profesor debería hacer para diseñar actividades que partan de una perspectiva constructivista del aprendizaje y los conocimientos que el profesor pone en juego cuando realiza esos análisis. Queremos reformular la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje y mostrar con mayor detalle el carácter cíclico y sistémico del modelo.

Suponemos entonces que un aspecto central de la enseñanza de las matemáticas consiste en el diseño, puesta en práctica y evaluación de las actividades por medio de las cuales los alumnos construyen su conocimiento matemático en un ambiente de interacción social. Pensaremos aquí en el proceso ideal de diseño, puesta en práctica y evaluación de una hora de clase o de una actividad que tendrá lugar dentro de una sesión de clase. Por lo tanto, esa actividad forma parte de una estructura curricular más amplia que tiene ya determinados unos propósitos que se desea lograr. A partir de esos propósitos y teniendo en cuenta el estado cognitivo de los alumnos, el profesor debe determinar uno o más objetivos para la actividad. El estado cognitivo de los alumnos es la percepción que el profesor tiene y la descripción que él hace del conocimiento, las dificultades y los errores de los alumnos con respecto a los propósitos que se están buscando dentro de la estructura curricular de la cual forma parte la actividad. Simultáneamente con la definición de los objetivos, el profesor identifica un contenido matemático que también estará determinado, al menos parcialmente, por esta estructura curricular. El contenido, los objetivos y el estado cognitivo de los alumnos componen la información de partida para el diseño de la actividad. El diseño, puesta en práctica y evaluación de la actividad requiere de una serie de análisis que agrupamos en cuatro categorías y que, en conjunto, denominamos de manera genérica como análisis didáctico.

Análisis cognitivo. Con este análisis se busca identificar y describir las dificultades que los alumnos pueden enfrentar y los errores que los alumnos pueden llegar a cometer al realizar las tareas que componen la actividad.

Análisis de contenido. Con este análisis el profesor busca producir una descripción estructurada y sistemática del contenido matemático desde la perspectiva didáctica. Para ello, él debe construir la estructura conceptual de este contenido, en la que sea posible identificar los conceptos y procedimientos involucrados, junto con los sistemas de representación que permiten referirse a esos conceptos y procedimientos. Adicionalmente, el profesor debe realizar un análisis fenomenológico que le permita identificar los fenómenos naturales, sociales y matemáticos que pueden ser modelizados por subestructuras matemáticas contenidas en la estructura anterior.

Análisis de instrucción. En este análisis el profesor produce y evalúa (a la luz de los análisis anteriores) diseños de las actividades que realizarán los alumnos.

Análisis de actuación. Este es el análisis que el profesor hace de las actuaciones recientes de los alumnos y que le permite determinar su estado cognitivo.

La realización de estos análisis es un proceso dinámico, cíclico y sistémico. La información que se produce en uno de los análisis permite reformular otros análisis y los resultados de esta reformulación pueden afectar el análisis original. Los tres primeros análisis interactúan dinámicamente entre sí teniendo a la estructura conceptual como hilo conductor. El análisis de actuación produce información que será utilizada posteriormente en un nuevo ciclo del proceso. No obstante, todos los análisis deben tener en cuenta la especificidad del contenido matemático. Por lo tanto, el profesor debe tener como guía la estructura conceptual de este contenido y el papel de los sistemas de representación dentro de esa estructura. Esta estructura conceptual se irá reformulando en la medida que se avance en los demás análisis.

Al realizar estos análisis, el profesor obtendrá los siguientes resultados: una o más actividades para llevar a la práctica en la clase; una justificación de esas actividades con respecto al estado cognitivo de los alumnos, al contenido y a los objetivos; y una previsión de las posibles actuaciones de los alumnos cuando se lleve a la práctica la actividad.

Vemos entonces que el diseño y puesta en práctica de actividades de enseñanza dentro de la perspectiva constructivista del aprendizaje es un proceso complejo, dinámico y cíclico. La Figura 1 muestra sus principales componentes.

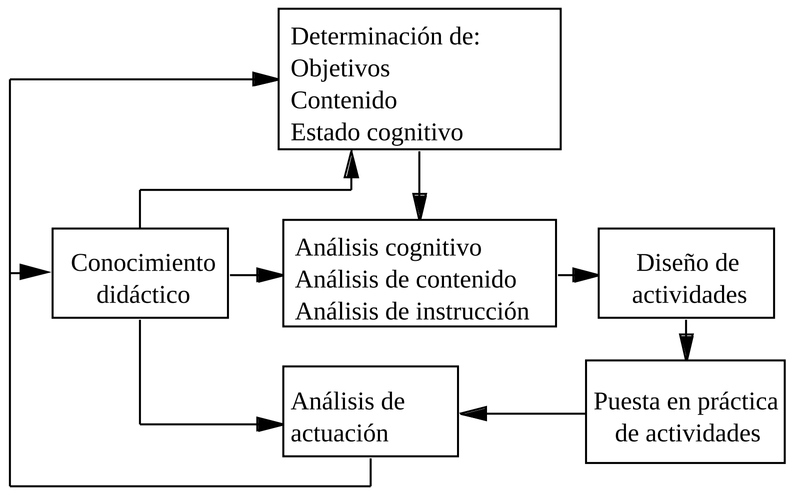

Figura 1. Diseño de actividades, análisis didáctico y conocimiento didáctico

Decimos que el *conocimiento didáctico* es el conocimiento de la didáctica de la matemática que el profesor pone en juego cuando diseña, lleva a la práctica y evalúa actividades de enseñanza. Éste es el conocimiento que el profesor pone en juego cuando realiza el análisis didáctico. Es de *carácter general*, en lo que se refiere a las características de las herramientas conceptuales utilizadas; y es de *carácter particular* en lo que se refiere a la utilización de esas herramientas para una estructura matemática específica.

ORGANIZADORES DEL CURRÍCULO: EL CASO DEL ANÁLISIS DE CONTENIDO

En el apartado anterior hemos identificado algunos de los conocimientos de la didáctica de la matemática que el profesor pone en juego cuando diseña actividades. Las nociones de la didáctica de la matemática a las que se refieren esos conocimientos han sido denominadas *organizadores del currículo* por Rico et al. (1997) quienes las consideran como "aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas" (p. 45). Los organizadores del currículo que estos autores proponen son los siguientes: errores y dificultades y problemas u obstáculos de aprendizaje; diversidad de representaciones y modelización; fenomenología de los conocimientos implicados; diversidad de materiales y recursos para la enseñanza; y evolución histórica de cada campo. Consideramos que la presentación que Rico et al. hacen de estas herramientas teóricas y conceptuales carece de una estructura suficientemente detallada que permita ver la relación entre las diversas herramientas y el papel que ellas juegan en el diseño de las unidades didácticas. Adicionalmente, hemos sugerido la importancia del análisis de contenido basado en los sistemas de representación en la utilización de estas herramientas (Gómez, 2000). Con base en la idea de análisis didáctico propuesta en el apartado anterior, queremos ahora presentar con algún detalle nuestra elaboración sobre el análisis de contenido y, en particular, sobre las nociones de estructura conceptual y sistema de representación. Queremos mostrar la relación de este análisis con los otros análisis (cognitivo, de instrucción y de actuación) y presentar una elaboración de los organizadores del currículo que, en algunos casos, reformula la propuesta por Rico et al. (1997) y, en otros, la extiende.

ESTRUCTURA CONCEPTUAL Y MAPAS CONCEPTUALES

El análisis de contenido tiene como fin la descripción detallada de la estructura matemática del contenido matemático que le permite al profesor dar cuenta de las relaciones existentes entre hechos, conceptos, estructuras conceptuales, destrezas, razonamientos y estrategias. La estructura conceptual es la descripción de estos elementos y relaciones. Dado que todo discurso matemático se realiza en uno o más sistemas de representación (Duval, 1998), la descripción de la estructura conceptual debe hacerse con base en el análisis de las diversas maneras como se pueden representar esos conceptos y procedimientos y las relaciones entre ellos. Y dado el carácter estructural de este organizador, los mapas conceptuales son una herramienta ideal para su descripción.

Mapas conceptuales

Los mapas conceptuales son una técnica para representar visualmente la estructura de la información. Es decir, los mapas conceptuales son un sistema de representación cuyas normas son relativamente sencillas (Lanzing, 1998): "los conceptos se representan por nodos a los que se les da una etiqueta por medio de una palabra o una frase corta que indica el concepto. Las relaciones se representan por líneas (enlaces) que conectan los nodos" (p. 2).

Aunque esta técnica de representación ha sido utilizada desde la Edad Media, se considera que Joseph D. Novak de la Universidad de Cornell fue el pionero en la utilización de los mapas conceptuales en la educación. Él desarrolló esta técnica para determinar cómo ocurren los cambios en la comprensión conceptual de los estudiantes (Novak, 1990, p.937, citado en McGowen, 1998, p. 38). Los mapas conceptuales se han utilizado de manera sistemática en la educación, particularmente como herramienta para describir el currículo y como herramienta de la instrucción.

Existe una técnica, relacionada a los mapas conceptuales, llamada "mapas mentales". Esta técnica desarrollada por Buzan, requiere que los mapas conceptuales tengan una jerarquía: "un mapa mental consiste en una palabra o concepto central, alrededor del cual se dibujan de 5 a 10 ideas principales que se relacionan con esa palabra. Este proceso se puede después repetir para cada una de las palabras hijas, tantas veces como se quiera" (Buzan, 1995, citado por Lanzing, p. 4). Williams

(1998) llama a estos mapas los “mapas araña”.

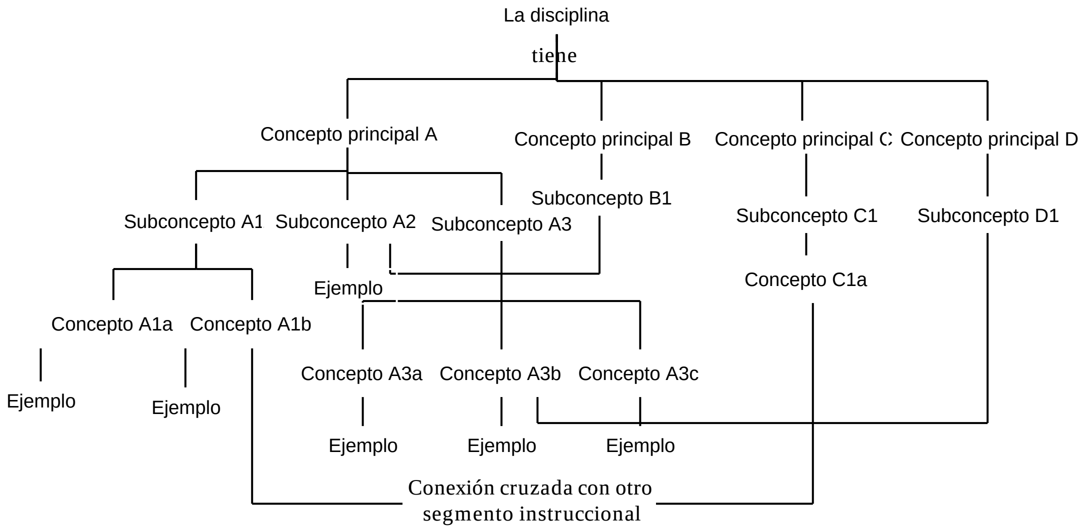

Figura 2. Ejemplo de un mapa conceptual

La Figura 2 muestra parte de un ejemplo de Novak (1988) de un “mapa conceptual para planificar un programa de instrucción. En un plan de estudios completo se incluirían también conceptos subordinados y conexiones cruzadas adicionales, además de ejemplos concretos de conceptos” (p. 103). En este caso, vemos que éste es un mapa tipo “araña” puesto que presenta una jerarquía partiendo de un concepto inicial, “la disciplina”.

Como sistema de representación, los mapas conceptuales tienen dos ventajas importantes:

- Permiten descripciones no lineales del objeto.
- Al tener un carácter gráfico, permiten observar la estructura de la información.

Mapas conceptuales y estructura conceptual en matemáticas

Las dos cualidades que acabamos de mencionar son muy importantes para la descripción de objetos matemáticos y su correspondiente discurso matemático. La estructura del contenido matemático no es lineal. Por un lado, todo concepto se encuentra relacionado con otros conceptos y, en general, todo procedimiento está relacionado con uno o más conceptos y procedimientos adicionales. Por otro lado, y como veremos más adelante, una representación de un concepto (u objeto) puede estar relacionada con otras representaciones de ese mismo u otros conceptos (u objetos). Por consiguiente, hay una estructura que representa la manera como los conceptos, los procedimientos y las representaciones se relacionan unos con otros. Aunque éstas son características bien conocidas de los objetos matemáticos y su correspondiente discurso, este último se hace, en general, dentro de un texto. Esto implica, por un lado, que la descripción tiene que ser lineal, y, por el otro, que no es posible ver “gráficamente” la estructura del discurso. Hay que deducirla de la lectura del texto. En consecuencia, en contraposición con la descripción textual, los mapas conceptuales resultan muy potentes para la descripción de la estructura conceptual y, como veremos más adelante, cuando se conjugan con la noción de sistema de representación, esta potencia se multiplica.

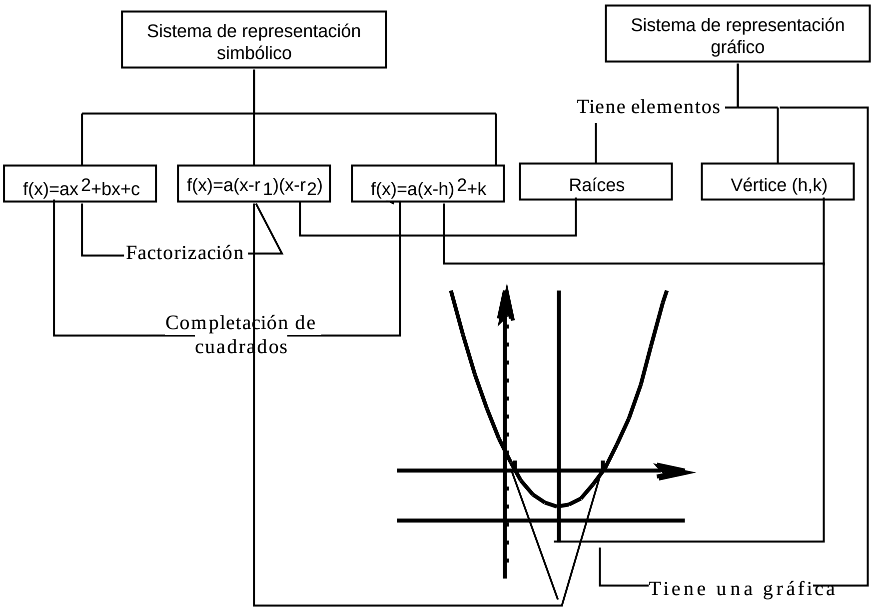

Figura 3. Mapa conceptual en matemáticas

La Figura 3 muestra una porción de un mapa conceptual para la función cuadrática. En ella se aprecia la identificación de elementos en dos sistemas de representación y la relación de estos elementos con otros elementos del mismo sistema de representación o con representaciones del mismo elemento en otros sistemas de representación.

Características de los mapas conceptuales en matemáticas

Cuando se utilizan para describir contenido matemático, los mapas conceptuales pueden tener unas características que dependen, al menos parcialmente, de ese contenido y que caracterizan la estructura conceptual del mismo. Introducimos aquí las nociones de familia, submapa y nivel.

En el caso de la descripción de un concepto matemático por medio de mapas conceptuales, los mapas serán de tipo “araña”, dado que siempre habrá una idea inicial: el concepto mismo. Esto implica que se puede introducir el concepto de *familia* dentro de un mapa o submapa y que, al interior de la estructura jerárquica que se construye, existe un sentido natural de la mayoría de las conexiones. Estas van de padres a hijos (ver figura 5).

Un mapa conceptual con contenido matemático permite identificar *submapas*. Estos son porciones del mapa global en las que se desarrolla una parcela particular y fácilmente identificable del contenido en cuestión.

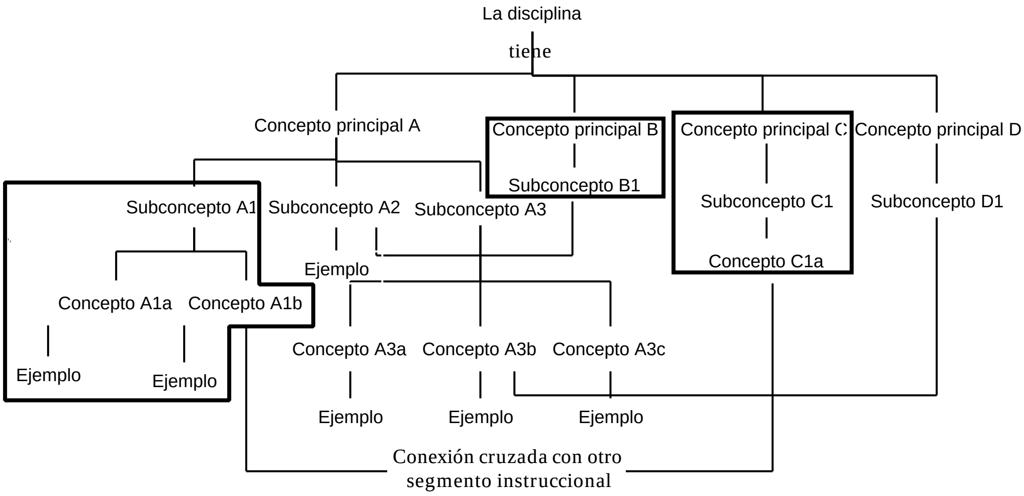

Figura 4. Ejemplos de submapas

La Figura 4 presenta el mapa del comienzo de este apartado. En él hemos resaltado algunos posibles submapas.

Estos submapas pueden tener una *estructura*. La noción de estructura se puede caracterizar con base en el número de niveles del mapa o submapa. En el ejemplo de la figura 5, observamos un ejemplo de un mapa con dos niveles y de otro mapa con cuatro niveles. Resulta evidente que el número de niveles de un submapa da una indicación de la complejidad de la descripción que se pretende hacer con él.

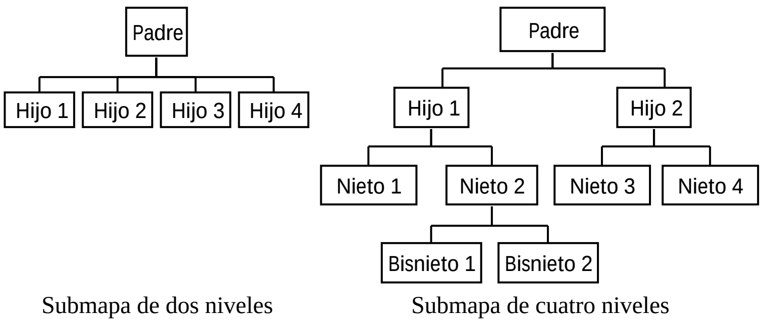

Figura 5. Estructuras de submapas

Relaciones (conexiones)

Los mapas conceptuales también se pueden caracterizar de acuerdo con el tipo de conexiones que presentan. Las conexiones *básicas* son aquellas que definen la jerarquía de familia de las ramas de un mapa o un submapa. Estas conexiones básicas caracterizan la estructura lineal de las ramas y la relación de familia expuesta en la figura 5. Las conexiones *internas* son aquellas que establecen relaciones entre dos elementos diferentes pertenecientes a un mismo submapa por fuera de la relación jerárquica de familia. Las *externas* son aquellas que establecen relaciones entre representaciones de un mismo elemento en diferentes submapas. Las conexiones (tanto

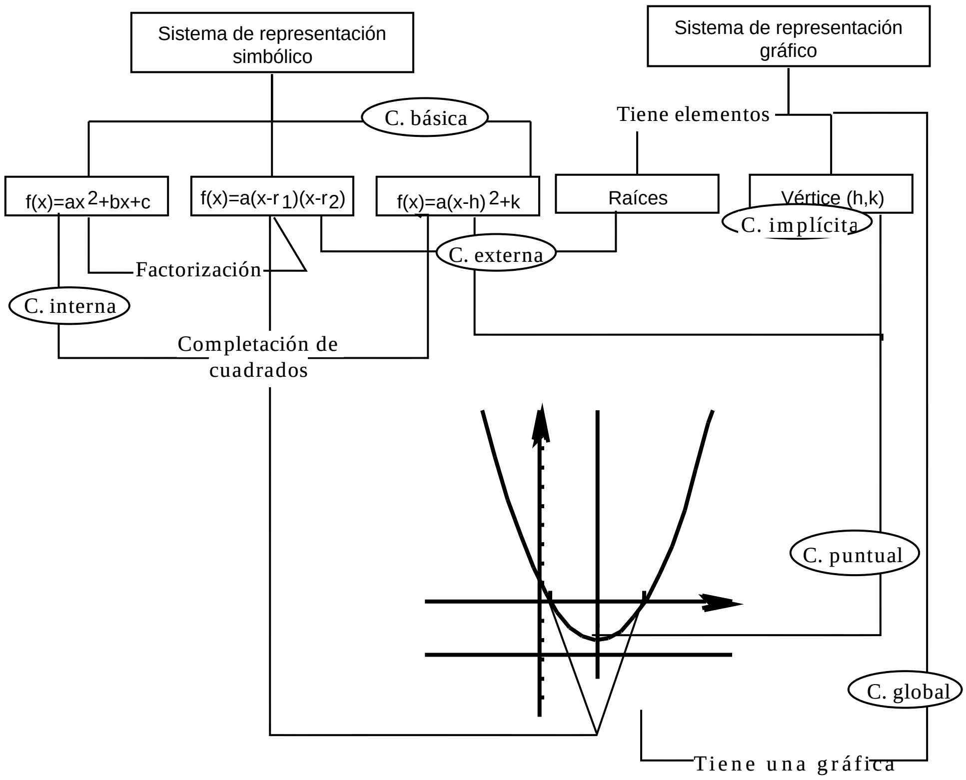

Figura Nº 6. Ejemplos de conexiones

internas, como externas) pueden ser *implícitas* o *explícitas.* Las conexiones explícitas se expresan con líneas que explícitamente establecen la conexión entre dos elementos. Las conexiones implícitas se expresan dentro de la caja de un mismo elemento al referirse a otro elemento. Las conexiones pueden ser *puntuales* o *generales.* Las conexiones generales van de un elemento o grupo a otro grupo de elementos. Las conexiones puntuales van de un elemento a otro elemento.

La Figura 6 presenta, para el mapa presentado anteriormente, ejemplos de los diferentes tipos de conexiones (relaciones). En este caso, vemos un mapa que *no* es de tipo "araña" y por lo tanto en el que es evidente la existencia de dos submapas principales.

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

La discusión sobre los sistemas de representación en la educación matemática puede llevar a una serie de paradojas (Rico, 2000). Algunas de estas paradojas tienen que ver con el estatus ontológico de los objetos matemáticos y con la dualidad entre las representaciones internas y externas. Con respecto a la existencia de los objetos matemáticos, suponemos, siguiendo a Sfard (2000) y Dörfler (2000), que ellos no existen por fuera del discurso matemático. Sin embargo, "la sensación de los participantes [en el discurso] de que los objetos existen es una condición necesaria para el uso eficiente de los significantes" (Sfard, 2000, p. 91). Por lo tanto, aunque los objetos matemáticos no existen por fuera del discurso, quienes participan en él se comportan como si existieran. Para Cobb, Yackel y McClain (2000) la dualidad entre representaciones internas y externas desaparece: símbolo y significado se construyen dinámicamente. Lo importante es la actividad de simbolización en la que el sujeto se hace capaz de actuar socialmente compartiendo significados. El significado para un sistema de símbolos se construye en la medida en que se llegan a acuerdos sociales sobre la manera como se manejan los símbolos. Estas aclaraciones nos permiten regresar ahora a la noción de sistema de representación y resaltan el papel de esta noción en las actividades de profesor y alumnos en el aula y en la construcción del conocimiento matemático.

Un mismo objeto matemático puede representarse en diferentes sistemas de representación. Por ejemplo, en el caso de las funciones, éstas pueden representarse en el sistema de representación simbólico ($f(x) = x^2 - 4x + 3$), en el sistema de representación gráfico (ver Figura 7) y en el sistema de representación tabular (ver figura 8), entre otros.

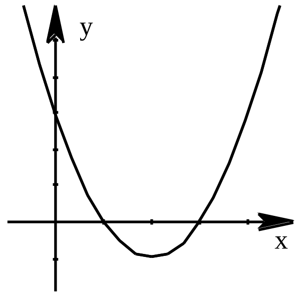

Figura Nº 7. Representación gráfica

x	y
-1	8
0	3
1	0
2	-1
3	0
4	3
5	8
6	15

Figura Nº 8. Representación tabular

En el caso del ejemplo del comienzo de esta sección, cada una de las representaciones de ese objeto matemático (una función cuadrática específica) resalta algunos aspectos particulares del objeto en cuestión. Como nosotros no podemos "ver" el objeto, debemos buscar conocer todas sus características. Para ello, resulta importante estudiar sus diversas representaciones.

A manera de metáfora, podemos imaginarnos que el objeto que estudiamos es la cara de una persona desconocida que se encuentra en otro lugar. Para conocerla, podemos tener diversas representaciones. Por ejemplo, una foto a color, una foto en blanco y negro, una imagen de computador enviada por Internet, un dibujo hecho por un artista y la descripción verbal de un amigo. Es posible que cada una de estas representaciones nos dé información importante sobre lo que queremos conocer y que estas informaciones se complementen. Dado que todas estas representaciones son representaciones de una misma persona, ellas tienen muchas cosas en común. En cada una de las representaciones podremos identificar el hecho de que la persona tiene el cabello oscuro o los ojos claros. En otras palabras, podremos identificar relaciones entre elementos pertenecientes a diversas representaciones.

El hecho de que se represente un mismo objeto de diferentes maneras da lugar a esta relación natural entre elementos pertenecientes a cada una de las representaciones. Dado que es un único objeto y que cada representación tiende a resaltar facetas particulares de ese objeto, podemos establecer relaciones entre los elementos que componen las representaciones. Aunque en el caso de la metáfora de la cara de una persona esto parece evidente, en el caso de las representaciones de un objeto matemático, este punto es muy importante desde la perspectiva didáctica. En el caso del objeto matemático que presentamos al comienzo de esta sección, podemos, por ejemplo, establecer una conexión entre el término "3" de la representación simbólica, el corte de la gráfica con el eje *y*, y el valor en la segunda columna de la fila que en la primera tiene el término "0". Estos tres elementos, pertenecientes a tres representaciones diferentes, se encuentran relacionados porque representan una misma faceta del objeto en cuestión.

Definición de sistemas de representación

El término "sistema de representación" tiene diferentes significados en la educación matemática. De hecho, un grupo de investigadores pertenecientes al PME[*] ha trabajado en el tema y producido una categorización de estos significados (Goldin y Janvier, 1998, p. 1-2).

Buscamos utilizar los sistemas de representación para *representar* diferentes facetas de un objeto matemático y trabajamos con los sistemas de representación bajo el supuesto de que se ciñen a un conjunto de reglas que se encuentran condicionadas por las matemáticas, en general, y por el objeto matemático específico, en particular. Por estas razones, consideramos que la definición de Kaput (1992) sobre sistema de notación se adapta a nuestras necesidades. De acuerdo con esta definición (p. 523)[†],

[*]Las siglas PME representan "Psychology of Mathematics Education". Este es una comunidad de investigadores en educación matemática que se reúne anualmente y que organiza, entre otras actividades, grupos de trabajo en diversos temas.

un sistema de notación es un sistema de reglas para
(i) identificar o crear caracteres,
(ii) operar en ellos y
(iii) determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia)

Esta definición de sistema de representación no es exclusiva de las matemáticas. Por ejemplo, si miramos la definición que dimos de mapa conceptual, podemos percibir que éste es un sistema de representación. La definición de Lanzing (1998) que afirma que en un mapa conceptual "los conceptos se representan por nodos a los que se les da una etiqueta por medio de una palabra o una frase corta que indica el concepto. Las relaciones se representan por líneas (enlaces) que conectan los nodos" se adapta a las condiciones de Kaput para un sistema de representación.

Sistemas de representación y actividades matemáticas

La definición de sistema de representación que acabamos de proponer es muy potente cuando se utiliza en matemáticas. Gracias a ella, Kaput puede describir las actividades matemáticas que tienen lugar en las matemáticas escolares. Él propone que estas actividades matemáticas se pueden clasificar en cuatro categorías:

1) transformaciones sintácticamente restringidas dentro de un sistema particular, con o sin referencia a otros significados externos;
2) traducciones entre sistemas de notación, incluyendo la coordinación de acciones a través de sistemas de notación;
3) construcción y verificación de modelos matemáticos, lo que es equivalente a la traducción entre aspectos de una situación y conjuntos de notaciones; y
4) la consolidación o cristalización de relaciones y procesos en objetos conceptuales o "entidades cognitivas" que pueden ser usadas en relaciones y procesos de un orden más alto de organización.

La primera actividad, las transformaciones sintácticas dentro de un sistema de representación, se refiere a la manipulación de una o más representaciones dentro de un mismo sistema de representación para efectos de transformarlas en otras representaciones (en general, equivalentes). Este es el caso, por ejemplo, de la utilización del procedimiento de completación de cuadrados para transformar la forma simbólica $f(x) = x^2 - 4x + 3$ en la forma equivalente $f(x) = (x-2)^2 -1$. O también, continuando dentro del sistema de representación simbólico, el caso de utilizar la fórmula cuadrática para transformar la expresión simbólica $x^2 - 4x + 3 = 0$ en la expresión equivalente $x = 1$, $x = 3$. También es el caso, dentro del sistema de representación gráfico, de utilizar traslaciones para obtener la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ a partir de la gráfica de la función $f(x) = x^2$.

La segunda actividad tiene que ver con la relación de uno o más elementos pertenecientes a un sistema de representación con otros elementos de otro sistema de representación. Es el caso de la relación del término "3" de la expresión simbólica $(x) = x^2 - 4x + 3$, con el punto de corte de la gráfica con el eje y, y con el valor en la segunda columna de la fila que en la primera tiene el término "0". También es el caso de la relación entre los términos "2" y "1" de la expresión simbólica $f(x) = (x-2)^2 -1$, con las coordenadas del vértice de la parábola representada en el sistema de representación gráfico y con la fila de la tabla cuyo valor en la primera columna es "2". Un ejemplo adicional de esta actividad, es la traducción de los términos "1" y "3" de la expresión simbólica $f(x) = (x - 1)(x - 3)$ –que es equivalente a las dos anteriores– con los cortes de la gráfica con el eje x, y con las filas de la tabla cuyo valor en la segunda columna es "0".

La tercera actividad, la de modelaje, se refiere al proceso de representar, dentro

[†]Complementamos esta definición de Kaput con la primera de las definiciones de Goldin y Janvier, definición que identifica "una situación física externa estructurada, o un conjunto de situaciones estructuradas en un ambiente físico que pueden ser descritas matemáticamente o pueden interpretarse en el sentido de involucrar ideas matemáticas" (p. 1). Esta definición permite introducir, como parte de las características de un objeto matemático, al conjunto de fenómenos reales cuyo análisis puede requerir de modelos matemáticos que involucran dicho objeto. Por esa razón, en los mapas conceptuales que describen un objeto matemático es importante incluir un submapa que hemos llamado "aplicaciones".

de un sistema de representación matemático una situación que no está descrita en estos términos. Tomemos el ejemplo del problema clásico de hallar las medidas de un lote rectangular de tal forma que, teniendo un perímetro fijo (e.g., 40), se obtenga la mayor área posible. Para realizar esta actividad, se hace necesario expresar la condición sobre el perímetro en una expresión simbólica del tipo $2x + 2y = 40$ y, con base en esta relación, expresar el área del lote como función de una de las medidas del mismo: $A(x) = x(20 - x)$. De esta forma, se ha representado en un modelo matemático la situación original, donde el problema consiste en hallar el valor de x para el cual $A(x)$ es máximo. La resolución de este problema, dentro del contexto matemático, requiere, entonces de la aplicación de las dos primeras actividades matemáticas. Hay que transformar sintácticamente la expresión en $A(x) = -x^2 + 20x$, y después en $A(x) = -(x -10)^2 + 100$. Con esta expresión, en el sistema de representación simbólico, se pueden traducir dos de sus elementos (10 y 100) al sistema de representación gráfico para hallar que el punto máximo de la gráfica se encuentra en su vértice (10,100) y regresar a la situación original para responder la pregunta afirmando que el lote debe ser un cuadrado de lado 10 y que tiene área máxima de 100.

La cuarta actividad, la “materialización”, es de carácter esencialmente cognitivo y no la vamos a considerar aquí.

ESTRUCTURA CONCEPTUAL, SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN Y MAPAS CONCEPTUALES EN MATEMÁTICAS

En el apartado anterior pretendimos mostrar la potencia de la noción de sistema de representación como medio para representar la estructura conceptual de un concepto matemático y para identificar las actividades matemáticas que son específicas a ese concepto. No obstante, los sistemas de representación se pueden mirar como un elemento organizador de esta información. En este apartado buscamos mostrar cómo los mapas conceptuales se pueden convertir en un medio representación adecuado de esta información. El primer punto que hay que resolver consiste en decidir cuál es la naturaleza de los elementos y de las relaciones que definen el mapa conceptual en cuestión. Podríamos hablar de conceptos y procedimientos y de relaciones entre ellos. También podríamos identificar las características o facetas del objeto y las relaciones entre ellos. Como se ve, éstas son diferentes aproximaciones a un mismo problema.

Lo que resulta evidente es que los sistemas de representación son el eje organizador de la información que queremos representar. La Figura 9 muestra un mapa conceptual para el problema del área del lote que consideramos en el apartado anterior.

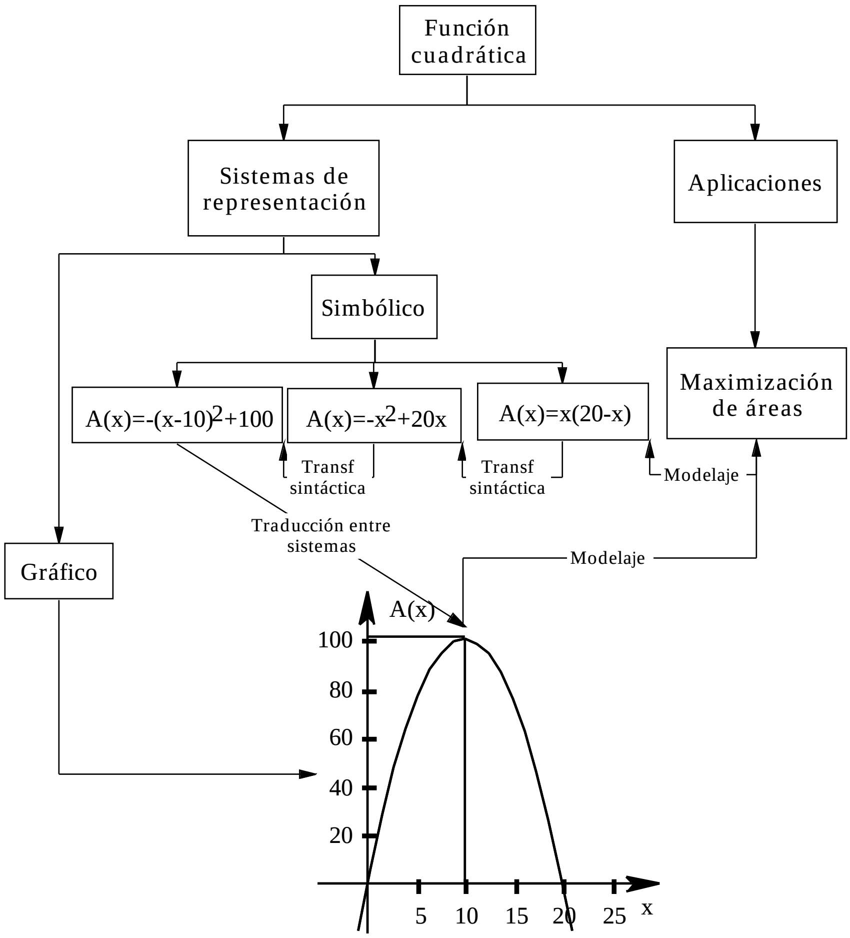

Figura 9. Mapa conceptual para el problema de área

La noción de sistema de representación permite organizar la representación de un objeto matemático en un mapa conceptual. Cada sistema de representación es un submapa. La descripción de los fenómenos o situaciones cuyo análisis requiere de la utilización de un modelo que involucra al objeto es otro submapa, que denominamos "aplicaciones". Cuando el objeto matemático se representa en un mapa conceptual, se identifican dos tipos de objetos en la gráfica: elementos y relaciones (o conexiones). Las relaciones pueden ser de diferentes tipos. En otras palabras, un elemento puede estar relacionado:

a. con otros elementos dentro de la forma particular o dentro del sistema de representación en el que se encuentran;

b. con una representación de ese mismo elemento en otro sistema de representación;

c. con un fenómeno que lo involucra; o

d. con dos elementos interconectados para los cuales sirve de puente.

Vemos entonces que los sistemas de representación y los mapas conceptuales ofrecen una perspectiva para caracterizar las actividades matemáticas escolares. En un mapa conceptual podemos, de acuerdo con la enumeración anterior, identificar cada una de las actividades matemáticas descritas por Kaput. La relación o conexión de elementos dentro de un mismo sistema de representación (a) corresponde a las transformaciones sintácticas (1). Estas transformaciones sintácticas permiten hacer la conexión entre dos o más elementos pertenecientes a un mismo sistema de representación. La relación entre dos representaciones de un mismo elemento en dos sistemas de representación (b) se refiere a la traducción entre sistemas de representación (2). La relación de un elemento con un fenómeno (elemento del sistema de representación de aplicaciones, c) tiene que ver con la construcción de modelos (3). Finalmente, "la consolidación o cristalización de relaciones y procesos en objetos conceptuales o 'entidades cognitivas' que pueden ser usadas en relaciones y procesos de un orden más alto de organización" (4) puede identificarse en un mapa conceptual al analizar el lugar que ocupan los procedimientos dentro de la estructura (d). Estos pueden ser el objeto mismo de la descripción o ser conexiones que establecen relaciones entre dos elementos del mapa.

En la Figura 9 hemos identificado conexiones que corresponden a los tres primeros tipos de actividades matemáticas propuestas por Kaput. Es importante resaltar que lo que hemos presentado en este mapa conceptual es tan solo una porción de lo que podría ser el mapa conceptual de la función cuadrática o de una función cuadrática particular como la que se considera para este problema. El mapa conceptual de la figura 9 presenta únicamente el *modelo matemático* correspondiente al problema. Este modelo parte del submapa llamado *aplicaciones* en el que hemos identificado uno de los múltiples tipos de fenómenos que pueden ser modelados por la función cuadrática. El proceso de modelaje pasa por unas etapas que no están representadas en el mapa y que tienen que ver con la formulación matemática del perímetro y la expresión del área del lote como producto de sus dos dimensiones, para llegar a expresar esta área en función de una de las dimensiones. El mapa nos muestra que la resolución del problema, una vez modelado, requiere de la aplicación de las dos primeras actividades matemáticas. Es necesario transformar sintácticamente la expresión inicial en una expresión intermedia para llegar a la expresión simbólica que identifica el vértice. En seguida, se hace una traducción entre el sistema de representación simbólico y el gráfico para identificar el vértice como el punto máximo de la función y resolver el problema dentro de las representaciones matemáticas. Finalmente, se realiza el proceso inverso de modelaje para obtener la solución al problema original.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y DESCRIPCIÓN DE TAREAS

La descripción de la estructura conceptual del contenido matemático en términos de los sistemas de representación, del análisis fenomenológico y del modelaje permite construir una caracterización del tipo de actividades que es posible realizar para esa estructura matemática, cuando ésta se utiliza como organizador de fenómenos (matemáticos y no matemáticos). Desde esta perspectiva, en el discurso matemático del aula el alumno realiza dos tipos de actividades: la identificación o construcción del modelo y la resolución del problema a partir del modelo dentro de los sistemas de representación. Para la primera actividad es posible clasificar las tareas de acuerdo a la evidencia de la estructura matemática en la descripción que se hace del fenómeno dentro de la actividad:

- La estructura matemática (modelo) se encuentra explícita en la descripción del fenómeno, excepto que no está expresada en lenguaje matemático. Es el caso de problemas de caída libre en los que se menciona que el fenómeno sigue la ley de la gravedad.
- La identificación del modelo depende esencialmente del conocimiento que el alumno tenga de la estructura matemática involucrada. Por ejemplo, la manera de expresar el perímetro y el área de un rectángulo en función de sus dimensiones, para hallar el rectángulo que, con un perímetro dado, tenga mayor área.
- La estructura matemática proviene de las leyes naturales que regulan el fenómeno. Es el caso, por ejemplo, de tareas que se refieren a fenómenos de movimiento parábolico.
- Se requiere de exploración y experimentación para la identificación del modelo. Éste es el caso de la carrera de caballos diseñada por Skovsmose (2000) en que las nociones de probabilidad surgen con motivo de la actuación de los alumnos en una simulación de una carrera de caballos utilizando dados.
- El problema no está descrito en la tarea. El alumno tiene que estudiar y analizar una realidad para, primero, definir con claridad el problema y, después, modelizarlo. Estos son problemas del tipo "proyecto" (Skovsmose, 2000).
- El fenómeno no tiene una estructura predeterminada y parte del problema consiste en evaluar diferentes estructuras posibles. Son el tipo de actividades que Lesh (1997) denomina de obtención de estructuras.Este autor da el ejem-

plo del debate sobre un sistema imparcial para combinar notas de un examen.

Una vez identificado el modelo, la resolución del problema tiene lugar dentro de los sistemas de representación. Es posible clasificar las tareas con base en las operaciones que se ejecutan dentro de los sistemas de representación para su solución. Tenemos entonces tareas en las que:

- El trabajo se restringe a un único sistema de representación y la resolución requiere de la aplicación de uno o más procedimientos de transformación sintáctica. Por ejemplo, hallar la forma expandida de $f(x) = (x-2)^2 -1$.
- Hay que trabajar en más de un sistema de representación (traducciones), pero el problema está definido en un sistema de representación específico. Por ejemplo, hallar el mínimo de la función $f(x) = (x-2)^2 -1$.
- Hay que trabajar en más de un sistema de representación, pero no se favorece ninguno de ellos y el foco de la actividad es el objeto matemático. Estos son problemas por ejemplo, en los que se tiene información parcial acerca de un objeto matemático (una función) en diversos sistemas de representación y se requiere identificar y describir el objeto en esos sistemas de representación. Nosotros denominamos a estos problemas de "construcción de objeto" (Gómez, P., Mesa, V.M., Carulla, C., Gómez, C., y Valero, P., 1996).
- Se exploran las características del objeto matemático en un sistema de representación (por ejemplo, el simbólico) al estudiarlo en otro sistema de representación (el gráfico). Este es el caso de analizar el papel gráfico de los parámetros de la expresión simbólica $f(x) = a(x - h)^2 + k$, cuando se consideran familias de funciones en las que dos parámetros varían y el tercero permanece constante.

CONCLUSIONES

La investigación sobre la formación inicial y el conocimiento del profesor de matemáticas de secundaria ha pasado por varias etapas. Hemos identificado la reflexión de Cooney (1994) y la propuesta de Simon (1995) como puntos importantes de esta producción investigativa. Al considerar al profesor como agente cognitivo y al resaltar la importancia de la enseñanza de las matemáticas basada en principios constructivistas, estos autores abren la posibilidad de formas alternativas de considerar el papel del profesor en la enseñanza y el tipo de conocimientos que se requieren para desarrollar esa enseñanza. El modelo de Simon es una propuesta dentro de estos parámetros. En este artículo hemos querido profundizar y elaborar el modelo de Simon y reflexionar sobre el conocimiento y la actuación del profesor de matemáticas.

Partimos del supuesto de que la enseñanza de las matemáticas surge del diseño, puesta en práctica y evaluación de actividades en las que los alumnos construyen el conocimiento matemático en un ambiente de interacción social. Para realizar esta enseñanza, sugerimos que el profesor debe realizar un análisis didáctico con cuatro componentes: el análisis de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis de actuación.

Al realizar estos análisis el profesor pone en juego una serie de conocimientos que, en conjunto, hemos denominado conocimiento didáctico. Este conocimiento didáctico está compuesto por unas herramientas teóricas y conceptuales que Rico et al. (1997) denominan organizadores del currículo. Hemos desarrollado con algún detalle aquellos organizadores del currículo que son necesarios para el análisis de contenido y hemos mostrado algunas de las relaciones entre los diversos análisis y organizadores del currículo. Al estructurar y elaborar los organizadores del currículo como piezas que conforman el análisis didáctico, hemos buscado mostrar el carácter dinámico, cíclico y sistémico de este proceso y justificar la elección de estos organizadores del currículo como las piezas centrales del conocimiento didáctico del profesor de matemáticas.

Hemos hecho una descripción de lo que consideramos que idealmente debería hacer el profesor al preparar, realizar y evaluar su clase. Es evidente que esta situación ideal es muy distante de la situación real de una gran proporción de profesores en ejercicio. Esta propuesta pretende, en palabras de Simon (1995) "contribuir al diálogo acerca *de cómo sería la enseñanza si se construyera sobre una visión constructivista del desarrollo del conocimiento*" (p. 115). Por otro lado, la propuesta no considera en detalle lo que sucede en el aula cuando se ponen en práctica las actividades de instrucción, al no tener como propósito describir la manera como alumnos y profesor construyen conjuntamente significados con motivo de estas actividades.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ball, D. (1991). Research on teaching mathematics: Making subject matter knowledge part of the equation. En J. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching. Vol. 2. Teacher's knowledge of subject matter as it relates to their teaching practice. A research annual* (pp. 1-48). Greenwich, CT: Jai Press.

Buzan, T. (1995). *The mind map book*. Londres: BBC Books.

Cobb, P. (2000). From representations to symbolizing: Introductory comments on semiotics and mathematical learning. En P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 17-36). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Cooney, T.J. (1994). Research and teacher education: In search of common ground. *Journal for Research in Mathematics Education, 25* (6), 608-636.

Dörfler, W. (2000). Means for meaning. En P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 99-131). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Duval, R. (1998). Signe et objet (I): trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives, 6*, 139-163.

Goldin, G. A., & Janvier, C. (1998). Representations and the psychology of mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior, 17* (1), 1-4.

Gómez, P. (2001). Conocimiento didáctico del profesor y organizadores del currículo en matemáticas. En F. J. Perales, A. L. García, E. Rivera, J. Bernal, F. Maeso, J. Muros, L. Rico, & J. Roldán (Eds.), *Congreso nacional de didácticas específicas. Las didáctiicas de las áreas curriculares en el siglo XXI* (pp. 1245-1258 Vol. 2). Granada: Grupo Editorial Universitario.

Gómez, P. (2000). Los organizadores del currículo en matemáticas. *Revista EMA, 5* (3), 267-277.

Gómez, P., Mesa, V.M., Carulla, C., Gómez, C., y Valero, P. (Eds.). (1996). *Situaciones problemáticas de precálculo. El estudio de funciones a través de la exploración con calculadoras gráficas*. México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

Kaput, J.J. (1992). Technology and Mathematics Education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.

Lanzing, J. W. A. (1998). Everything you always wanted to know about… Concept Mapping. *http://utto212.to.utwente.nl/lanzing/EVERYT~1.HTM, Holanda*, 1-29.

Lesh, R. (1997). Matematización: la necesidad "real" de la fluidez en las representaciones. *Enseñanza de las ciencias, 15* (3), 377-391.

McGowen, M. (1998). *Cognitive units, concept images, and cognitive collages: An examination of the processes of knowledge construction*. Documento no publicado. Warwick: University of Warwick.

Novak (1988). *Aprendiendo a aprender.* Barcelona: Martínez Roca.

Novak, J.D. (1990). Concept mapping: A useful tool for science education. *Journal of Research in Science Teaching, 27* (10), 937-949.

Rico, L. (2000). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática*. Documento no publicado. Granada: Universidad de Granada.

Rico, L. (Coord.), Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L., Sierra, M., y Socas, M. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ice - Horsori.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (2), 114-145.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being –or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. En P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 37-98). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*, *6* (1), 3-26.

Steffe, L. P., & D'Ambrosio, B.S. (1995). Toward a working model of constructivist teaching: A reaction to Simon. *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (2), 146-159.