

Identificación de figuras geométricas en fotografías de objetos reales. Un estudio con maestros en formación

José María Muñoz Escolano (Universidad de Zaragoza. España)

Antonio M. Oller Marcén (C. Universitario de la Defensa, Academia General Militar. España)

Fecha de recepción: 13 de Diciembre de 2012

Fecha de aceptación: 8 de abril de 2013

Resumen	En este trabajo se analizan (cuantitativa y cualitativamente) las respuestas de 173 estudiantes de Magisterio ante una tarea en la que debían identificar figuras geométricas presentes en 4 fotografías de objetos reales.
Palabras clave	Geometría, Maestros en formación, Identificación de figuras, Terminología geométrica, Visión espacial.

Abstract	In this paper we analyze (both quantitatively and qualitatively) the answers of 173 prospective Primary school teachers in an activity in which they were asked to identify geometric shapes appearing in 4 photographs of real objects.
Keywords	Geometry, Prospective teachers, Identification of figures, Geometric terminology, Spatial vision.

1. Introducción y objetivos

En el currículo de Matemáticas de Educación Primaria se encuentra un bloque íntegramente dedicado a la Geometría. En los epígrafes correspondientes a los contenidos, tanto en el primer ciclo como en el segundo, se leen los siguientes puntos:

- “Figuras planas: reconocimiento en objetos familiares de triángulo, cuadrado, rectángulo y círculo...”
- “Cuerpos geométricos: reconocimiento en objetos familiares – como muebles, logotipos, señales de tráfico, etc. – de pirámide, prisma, cono, cilindro y esfera...”

Además, uno de los criterios de evaluación correspondientes dice: “Reconocer en el entorno inmediato formas y cuerpos geométricos”.

Nos parece importante, y así lo hacemos notar, el énfasis que se hace al hablar de “objetos familiares” y de “entorno inmediato”. La geometría debe servir al alumnado para describir y organizar su entorno y para ello un primer paso debe ser reconocer en dicho entorno aquellos objetos geométricos que ya conocen y que, a su vez, han surgido a partir de un proceso de abstracción de la propia realidad. Prueba de esto son los concursos de fotografía matemática que son convocados asiduamente por un gran número de institutos de enseñanza secundaria u otras instituciones educativas (ver, por ejemplo, (Nomdedeu, 2009)).



En consecuencia, pensamos que la capacidad de detectar figuras y cuerpos geométricos que se encuentran en diferentes entornos cotidianos, así como de describir correctamente y de manera precisa (es decir, empleando terminología geométrica) dichos objetos debe ser una competencia importante para el docente.

Sin embargo, trabajos como el de Barrantes y Blanco (2005) muestran algunas concepciones de futuros docentes que chocan frontalmente con la idea de una geometría que describe el entorno (mayor importancia de la geometría plana y de los aspectos numéricos, separación entre la geometría y otras materias, etc...). Estas concepciones pueden ser debidas al tipo de enseñanza tradicional recibida por dicho alumnado, que presta escasa atención a la geometría espacial, pese a que nuestro entorno y los objetos que nos rodean son tridimensionales. De hecho, recientes estudios (González et al., 2006; Guillén, 1997; Guillén, 2010) muestran los múltiples aspectos positivos de un modelo de enseñanza de la geometría basado en los sólidos.

Por otra parte, tanto los estudios centrados en la evaluación de las competencias matemáticas de los maestros en formación (Tatto et al., 2008; Escolano et al., 2011, 2012), como los más centrados en evaluar el grado de adquisición de contenidos matemáticos propios de la Educación Secundaria (Hernández et al., 2001; Nortes et al., 2009) muestran que los futuros maestros poseen un conocimiento geométrico inferior al que sería deseable de cara a su futura labor docente.

En este sentido, no hemos encontrado estudios que observen y analicen la capacidad de detectar figuras y cuerpos geométricos en objetos cotidianos por parte de maestros (en ejercicio o en formación). Los trabajos antes citados no inciden en este aspecto y, en ellos, las tareas relacionadas con la geometría implican un grado de abstracción relativamente alto y no involucran en ningún caso objetos reales.

En consecuencia, el principal objetivo que se persigue con este trabajo es diseñar un breve test que permita analizar la identificación formas geométricas en imágenes de objetos reales por parte de estudiantes de magisterio. En concreto, se solicitó al alumnado participante que indicara todas las figuras y cuerpos geométricos que fueran capaces de encontrar en cuatro fotografías. El análisis de las respuestas de los estudiantes se centra principalmente en los siguientes objetivos:

- Analizar los términos utilizados por los estudiantes, observando qué términos aparecen y cuántos términos distintos indica cada estudiante.
- Estudiar el uso de términos de geometría plana frente a términos de geometría espacial, analizando si predominan unos sobre otros y dónde aparecen más errores.
- Clasificar los términos incorrectos utilizados por los estudiantes.

De los objetivos anteriores, el tercero tiene especial interés por cuanto permite comprender mejor las causas que provocan los errores detectados y, así, diseñar actividades que contribuyan a que los futuros maestros puedan abordar competentemente actividades similares con sus futuros estudiantes.

El trabajo se organiza del siguiente modo. En la segunda sección se presenta el método que se ha seguido a la hora de abordar la investigación. En la tercera sección se aborda el análisis, cuantitativo y cualitativo, de los datos obtenidos. Finalmente, se concluye con una sección dedicada a presentar algunas conclusiones importantes.

2. Método

2.1. Contexto

Este estudio se enmarca dentro de un proyecto más amplio llevado a cabo por los autores en la Universidad de Zaragoza al respecto de las competencias y conocimientos matemáticos de maestros y maestras en formación (Muñoz y Oller, 2011). El trabajo realizado se centra en estudiantes de segundo curso de la Diplomatura de Maestro (especialidad en Educación Primaria). Más concretamente en estudiantes matriculados durante el curso 2010-2011 en la asignatura “El currículum de matemáticas en Educación Primaria”; asignatura anual del plan de estudios citado anteriormente.

La elección de este grupo concreto de alumnado viene motivada por el hecho de que, en este punto de su formación, dichos estudiantes ya han cursado (aunque no necesariamente superado) la asignatura Matemáticas y su didáctica II. Se trata de una asignatura cuatrimestral de 6 créditos que comprende aspectos de geometría euclídea básica (tanto plana como espacial). Consideramos que en el momento de realizar el test los estudiantes han recibido una formación geométrica relativamente importante que se une, además, a su formación preuniversitaria. Los centros donde se realiza la experimentación son los siguientes:

- Facultad de Educación, en Zaragoza.
- Facultad de Ciencias Humanas y de la Educación, en Huesca.
- Facultad de Ciencias Sociales y Humanas, en Teruel.

Esto nos permite ampliar la muestra con estudiantes de una formación similar y de distintos centros. Además, en el momento de la realización del estudio el primer autor se encuentra impartiendo clases en la Facultad de Ciencias Humanas y de la Educación (Huesca), mientras que el segundo lo hace en la Facultad de Ciencias Sociales y Humanas (Teruel).

2.2. Diseño de la actividad

Existen diversos trabajos en los que se presentan pruebas diseñadas para estudiar, entre otros aspectos, la capacidad de estudiantes de diversos niveles educativos de reconocer e identificar diversos objetos geométricos y sus componentes (Usiskin, 1982; Fouz, 2006). Del mismo modo abundan trabajos analizando el modo en que los estudiantes manejan representaciones planas de objetos tridimensionales (Gutiérrez, 1991; 1998).

En la práctica totalidad de los trabajos consultados se presentan actividades en un contexto puramente geométrico y con un alto grado de abstracción. Puesto que nuestro interés se centra en el estudio de la geometría en relación con el entorno, se decide que la prueba consistiera en la identificación libre de figuras y cuerpos geométricos en fotografías de objetos reales. En consecuencia, dada la ausencia de ejemplos en la literatura, el primer paso a seguir es diseñar el test que se plantea a los estudiantes.

La elección del tipo de tarea propuesta al alumnado (indicar el mayor número de objetos geométricos que sean capaces de identificar en una serie imágenes sin darles ningún tipo de guía o indicación) hace que cobre una gran importancia la selección de las imágenes que se presentan a los estudiantes de cara a obtener unas respuestas que proporcionen la mayor cantidad de información posible. Así pues se procede a realizar una búsqueda exhaustiva de imágenes de objetos reales de



Identificación de figuras geométricas en fotografías de objetos reales. Un estudio con maestros en formación

J.M. Muñoz Escolano y A.M. Oller Marcén

carácter geométrico a través de internet. Los criterios seguidos a la hora de seleccionar las imágenes son:

- Que los objetos representados posean la mayor riqueza posible en cuanto a figuras geométricas a identificar a partir de sus fotografías.
- Que aparezcan algunas figuras geométricas “ambiguas” y no habituales.
- Que se aprecien en las imágenes figuras geométricas tanto planas como espaciales.
- Que las fotografías muestren perspectiva.

Tras el proceso de búsqueda las imágenes seleccionadas son las siguientes:

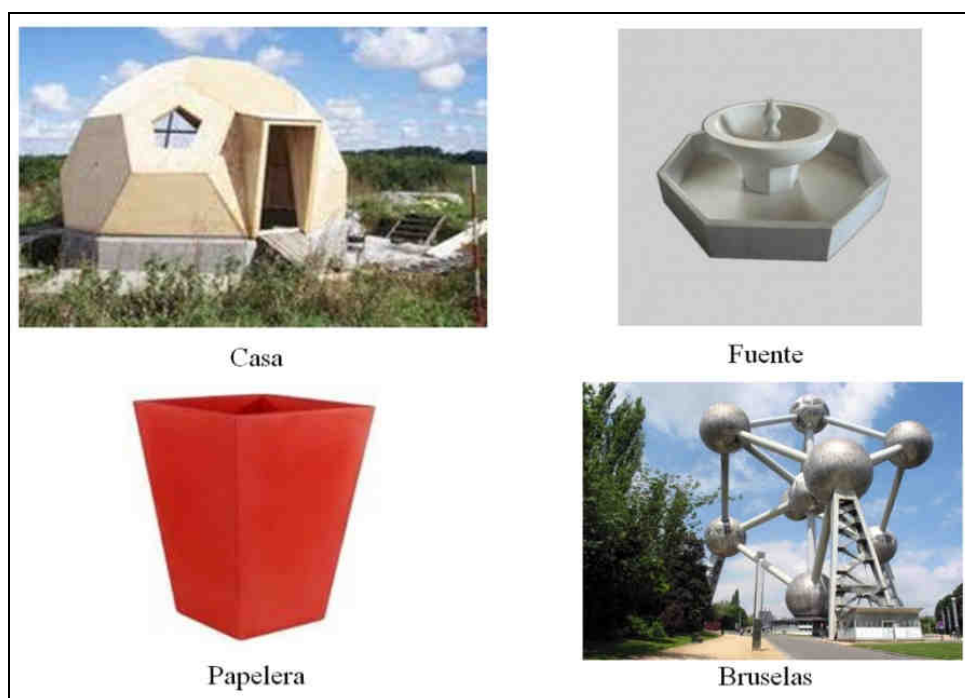


Figura 1. Imágenes elegidas y sus denominaciones.

Finalmente señalar que, en los test entregados a los estudiantes, cada una de las imágenes tiene una altura real de 5 cm. y una anchura que varía entre los 4,75 cm. y los 7,5 cm. dependiendo de la imagen. Todas ellas son impresas en una impresora láser a color de alta definición.

2.3. Análisis previo

Una vez elegidas las fotografías, se procede a realizar un análisis previo de términos esperados por parte de los estudiantes, tanto de geometría plana como de geometría espacial. En este punto no se entra a valorar si las respuestas son (o se consideran) correctas o incorrectas; tan sólo nos preocupamos por imaginar qué respuestas pueden dar los estudiantes ante las fotografías.

Los términos que, a priori, pensamos que podrían aparecer con una frecuencia alta están recogidos en la tabla siguiente:

	2D	3D
Casa	Pentágono, Trapecio, Hexágono, Rectángulo, Triángulo, Paralelogramo.	Poliedro, Dodecaedro, Semiesfera.
Fuente	Rectángulo, Heptágono, Círculo, Circunferencia, Elipse, Corona circular.	Semiesfera, Esfera, Prisma.
Papelera	Trapecio, Cuadrado, Rombo, Paralelogramo.	Tronco de pirámide, Pirámide, Prisma.
Bruselas	Cuadrado, Triángulo, Trapecio, Círculo, Rombo.	Esfera, Cubo, Pirámide, Cilindro.

Tabla 1. Términos esperados para cada una de las imágenes.

Como se verá más adelante, la variedad de respuestas dadas por los estudiantes fue mucho mayor de lo previsto; lo que obligó a descartar las respuestas emitidas por un porcentaje de los estudiantes menor que el 3% por ser consideradas esporádicas. No obstante, cabe señalar que todos los términos previstos aparecieron entre las producciones del alumnado.

2.4. Desarrollo del test

Dada la naturaleza de la prueba, la participación por parte de los estudiantes es totalmente voluntaria, aunque se trató de que el número de participantes fuera lo mayor posible. De hecho el test es realizado prácticamente por todos los estudiantes que asisten regularmente a clase. El número total de estudiantes participantes es de 173, repartidos entre los tres centros del siguiente modo:

	Huesca	Teruel	Zaragoza
Nº de estudiantes	62	54	57
Porcentaje	35.8%	31.2%	32.9%

Tabla 2. Reparto de los estudiantes por centros.

Los estudiantes participantes en el estudio llevan a cabo el test en una de sus sesiones habituales de clase, para lo cual se cuenta con la colaboración de los profesores de cada uno de los grupos.

Como ya se ha comentado, la compleción y entrega del test es voluntaria y los formularios anónimos. Además, se indica a los estudiantes que en ningún momento los resultados serán utilizados para la evaluación (aunque algunos estudiantes insistieron en conocer sus resultados).

2.5. Unidades de análisis

A la hora de abordar el análisis de las respuestas dadas por el alumnado adoptamos dos enfoques claramente diferenciados. El primero de tipo cuantitativo y el segundo de tipo cualitativo.

En cuanto al estudio cuantitativo, nos centramos en los siguientes aspectos:



- *Estudio de los términos más utilizados*: Nos interesa estudiar cuáles son los términos más utilizados por los estudiantes. Es decir, queremos analizar *qué* ven los estudiantes en las imágenes propuestas. Para ello, se indica cuáles han sido los términos empleados por al menos un 3% del alumnado participante.
- *Análisis de los términos encontrados*: Una vez observados los términos que utilizan los estudiantes, parece interesante abordar un análisis más detallado de los mismos. En concreto nos centramos en dos aspectos:
 - *Uso de términos 2D y 3D*: Un aspecto interesante a analizar es si los estudiantes tienen una mayor predisposición para identificar figuras planas que figuras tridimensionales. Para ello se observa la cantidad de cada uno de los tipos de términos en las respuestas de los estudiantes.
 - *Número de términos correctos*: Otro aspecto importante a tener en cuenta es la cantidad de términos correctos utilizados por los estudiantes y su distribución entre términos de geometría plana y espacial. De la lista prevista de términos presentada en 2.3 se consideran correctos los siguientes:
 - En la imagen “Casa”: pentágono, trapecio, hexágono, rectángulo, triángulo y poliedro.
 - En la imagen “Fuente”: rectángulo, circunferencia, elipse, corona circular, heptágono, semiesfera y prisma.
 - En la imagen “Papelería”: trapecio, cuadrado y tronco de pirámide.
 - En la imagen “Bruselas”: cuadrado, triángulo, trapecio, esfera, cubo, pirámide y cilindro.
- *Número de respuestas por estudiante*: Además de observar *qué* ven los estudiantes, estamos interesados en analizar *cuánto* ven. Para ello se estudia el número de términos distintos que indica cada uno de los estudiantes.

Por otra parte, el análisis cualitativo se centrará en los siguientes aspectos:

- *Análisis de las respuestas correctas no esperadas*: Se estudia aquellos términos dados por los estudiantes que, siendo correctos, no se consideraron probables y se trata de analizar los motivos por los que han aparecido con un porcentaje significativo.
- *Análisis de las respuestas incorrectas y clasificación de errores*: Se presenta algunos de los errores cometidos por los estudiantes, tratando de abordar una clasificación de los mismos. En concreto hemos detectado los siguientes tipos de errores relevantes:
 - Errores en el uso de la terminología.
 - Errores causados por trabajar con una representación plana del objeto (Guillén, 2010).

3. Análisis cuantitativo de los resultados

3.1. Términos más utilizados

En esta sección pretendemos iniciar el análisis de las respuestas del alumnado. Por un lado presentaremos los listados con los términos más utilizados por los estudiantes en cada una de las fotografías. En definitiva se estudia aquí *qué* dicen; sin entrar en el estudio y clasificación detallados de las respuestas, que se abordan en secciones subsiguientes. Para ello se registran las diferentes respuestas dadas por los estudiantes, recogiendo literalmente todos los términos empleados en los diferentes test; así, por ejemplo, se consideran como diferentes respuestas si un estudiante identifica un “trapecio” o un “trapecio rectángulo”.

Como ya avanzamos y se observa en las tablas del Apéndice, se ha encontrado una gran variedad de términos diferentes. En esta sección nos restringimos únicamente a aquellos cuyo porcentaje de aparición supera el 3%; es decir, aquellos utilizados por más de 5 estudiantes de los 173 que realizaron el test.

Casa. En esta imagen se registran hasta un total de 38 términos distintos empleados por todos los estudiantes, sin embargo solo 10 de ellos aparecen con una frecuencia mayor al 3%. Éstos aparecen recogidos en la tabla siguiente:

Términos	Frecuencia total	Porcentaje de estudiantes
Rectángulo	161	93.1%
Pentágono	147	85%
Hexágono	124	71.7%
Triángulo	85	49.1%
Trapezio	64	37%
Cuadrado	14	8.1%
Cilindro	9	5.2%
Dodecaedro	9	5.2%
Semiesfera	8	4.6%
Paralelogramo	6	3.5%

Tabla 3. Términos más usados de la imagen “Casa”.

Fuente. En este caso, se registran 31 términos distintos empleados por el total de los estudiantes donde los que aparecen con una frecuencia mayor al 3% son los 15 siguientes:

Términos	Frecuencia total	Porcentaje
Rectángulo	88	50.9%
Heptágono	71	41%
Círculo	64	37%
Hexágono	53	30.6%
Semiesfera / media esfera	51	29.5%
Circunferencia	50	28.9%
Octógono	47	27.2%
Cuadrado	26	15%
Prisma	15	8.7%
Semicírculo	14	8.1%
Semicircunferencia	12	6.9%
Octaedro	12	6.9%
Corona circular	10	5.8%
Esfera	6	3.5%
Heptaedro	6	3.5%

Tabla 4. Términos más usados de la imagen “Fuente”.



Identificación de figuras geométricas en fotografías de objetos reales. Un estudio con maestros en formación

J.M. Muñoz Escolano y A.M. Oller Marcén

Papelera. De acuerdo con el análisis previo, esta imagen es la que registra menos términos distintos, si bien hay que destacar que aparecen muchos más de los esperados, un total de 28. En la siguiente tabla se encuentran los 9 más representativos al aparecer con una frecuencia mayor al 3%:

Términos	Frecuencia total	Porcentaje
Cuadrado	125	72.3%
Trapezio	78	45.1%
Rectángulo	25	14.5%
Paralelogramo	14	8.1%
Prisma	13	7.5%
Cuadrilátero	10	5.8%
Rombo	9	5.2%
Romboide	7	4.1%
Cubo	6	3.5%

Tabla 5. Términos más usados de la imagen “Papelera”.

Bruselas. Finalmente en esta imagen se emplean 29 términos distintos. Los que aparecen con una frecuencia mayor al 3% son los 13 siguientes:

Términos	Frecuencia total	Porcentaje
Esfera	122	70.5%
Rectángulo	66	38.2%
Cilindro	66	38.2%
Triángulo	57	33%
Cubo	40	23.1%
Cuadrado	35	20.2%
Trapezio	35	20.2%
Círculo	30	17.3%
Circunferencia	17	9.8%
Pirámide	7	4.1%
Pentágono	6	3.5%
Rombo	6	3.5%
Prisma	6	3.5%

Tabla 6. Términos más usados de la imagen “Bruselas”.

En general, aparte de la reflexión acerca de la gran variedad de términos utilizados y la dispersión de los mismos, cabe destacar que el término *rectángulo* es el término más empleado en las dos primeras imágenes y se encuentra también entre los más citados en las otras dos imágenes, incluso cuando no es el más evidente (como en la imagen “Fuente”) o no sea pertinente (como en la imagen “Papelera”). Aunque es objeto de estudio del apartado 3.3, también señalar el predominio de los términos provenientes de la geometría plana frente a los de la geometría espacial. En este sentido, es sorprendente que más de un 75% de los estudiantes no mencionan el término “cubo” en la imagen Bruselas.

3.2. Análisis de los términos encontrados

En la tabla siguiente se indica el número de términos encontrados relativos a geometría plana y a geometría espacial. Además del número total de términos, señalamos el número de términos correctos (ver punto 2.5).

		Número total de términos (distintos)	Número de términos correctos (distintos)	Porcentaje de términos correctos distintos
Casa	2D	644 (27)	590 (8)	29.6%
	3D	43 (11)	4 (1)	9.1%
Fuente	2D	448 (18)	296 (8)	44.4%
	3D	105 (13)	67 (3)	23.1%
Papelera	2D	283 (16)	207 (3)	18.7%
	3D	35 (12)	4 (3)	25%
Bruselas	2D	275 (20)	199 (5)	25%
	3D	246 (9)	241 (5)	55.6%

Tabla 7. Términos 2D y 3D, totales y correctos, en las distintas imágenes.

A la vista de la tabla anterior observamos varios fenómenos interesantes:

- En todas las imágenes el número total de términos distintos provenientes de la geometría plana es muy superior a los de la geometría espacial.
- Respecto al número de términos correctos distintos, este desequilibrio también se da en las imágenes “Casa” y “Fuente”, pero no en las imágenes “Papelera” y “Bruselas” donde se igualan. Sin embargo, en el caso de la imagen “Papelera”, también cabe señalar que el número de términos correctos de geometría plana es 50 veces mayor que el correspondiente número de términos correctos de geometría espacial.
- El número de términos correctos distintos es muy pequeño en comparación con el número total de términos distintos. Tan sólo en un caso supera el 50% y sólo en dos casos supera el 40%. Esto nos indica que aparece una gran variedad de términos incorrectos (tanto relativos a geometría plana, como a espacial) en todas las imágenes.
- En las imágenes “Casa” y “Fuente” el porcentaje de términos correctos distintos relativos a geometría espacial es muy inferior al correspondiente porcentaje en el caso de la geometría plana. Es decir, aparentemente el número de errores es mayor al utilizar términos de geometría espacial.

3.3. Número de términos empleados por estudiante

En este apartado se muestran los resultados de analizar el número de respuestas (totales y correctas) dadas por cada estudiante. Aquí nos centramos pues en estudiar *cuánto* dicen los estudiantes para cada una de las imágenes propuestas.

Casa. El número de términos diferentes utilizados por cada estudiante varía entre 0 y 8. La media de respuestas por estudiante es 4 y su desviación típica es 1.5. En la figura siguiente se muestran las frecuencias absolutas de los posibles números de respuestas:



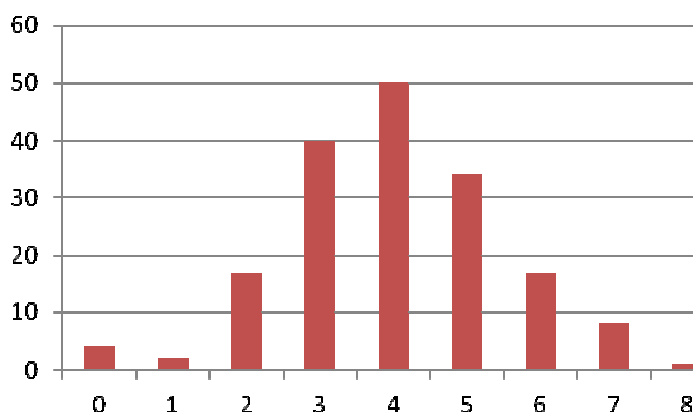


Figura 2. Número de estudiantes dependiendo del número de respuestas en la imagen “Casa”.

Por otro lado, el número de términos correctos utilizados por cada estudiante varía entre 0 y 7, con una media de 3.45 y una desviación típica de 1.35. En la figura siguiente se muestra las frecuencias de cada número de aciertos.

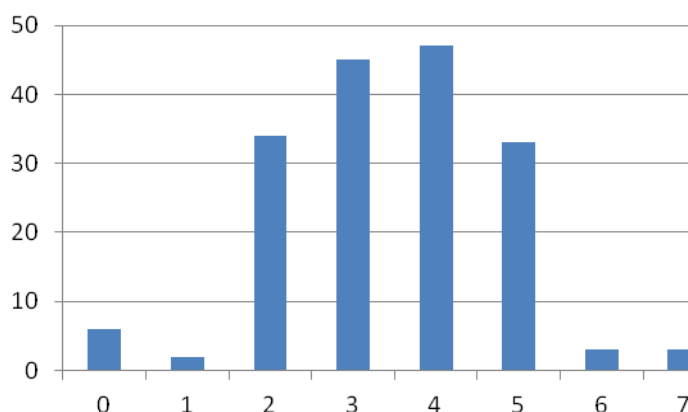


Figura 3. Número de estudiantes dependiendo del número de aciertos en la imagen “Casa”.

La mayor riqueza de esta fotografía respecto a las posteriores, hace que, en promedio, el número de respuestas (tanto totales, como correctas) por estudiante sea mayor en esta imagen que en cualquiera de las otras.

Fuente. De nuevo encontramos que el número de términos diferentes utilizados por los estudiantes varía entre 0 y 8. Aquí se observa que la mayor parte de los estudiantes utilizan entre dos y cuatro términos distintos ya que la media es de 3.2 términos y la desviación típica es 1.2. En la figura siguiente se muestran las frecuencias absolutas de los posibles números de respuestas:

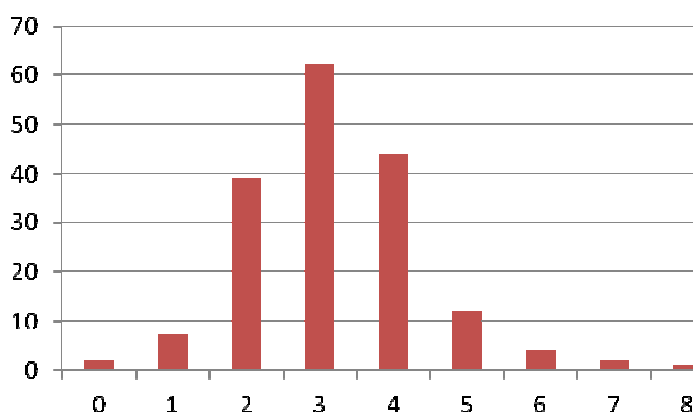


Figura 4. Número de estudiantes dependiendo del número de respuestas en la imagen "Fuente".

En este caso, el número de términos correctos utilizados por cada estudiante varía entre 0 y 6, con una media de 2.1 y una desviación típica de 1.19. En la figura siguiente se muestra las frecuencias de cada número de aciertos.

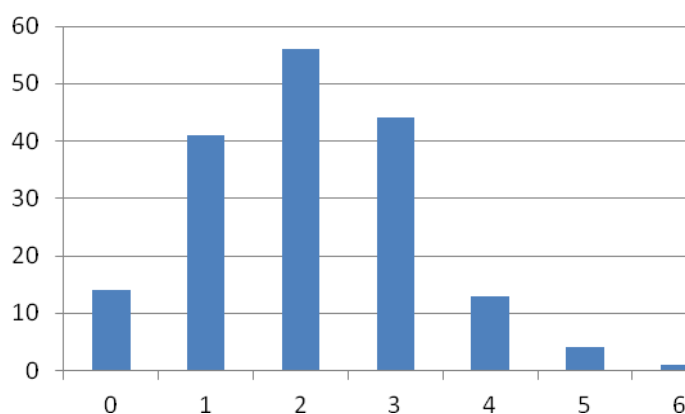


Figura 5. Número de estudiantes dependiendo del número de aciertos en la imagen "Fuente".

Papelera. Esta es la figura menos rica de las escogidas a la hora de plantear la actividad. Esto que ya se reflejó en el menor número de términos empleados por los estudiantes se refleja también en el número de términos diferentes que utiliza cada estudiante donde el número de términos empleado por cada estudiante varía entre 0 y 5. La media se reduce a 1.9 y su desviación típica a 0.9. Se observa un valor medio claramente inferior y un mayor agrupamiento de los datos; no en vano el 55% de los estudiantes dio dos respuestas. Las frecuencias absolutas aparecen en la figura que sigue:

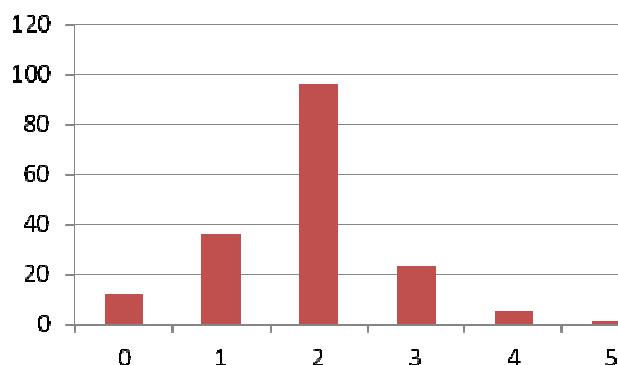


Figura 6. Número de estudiantes dependiendo del número de respuestas en la imagen “Papelerá”.

Un fenómeno similar se observa al analizar el número de aciertos por estudiante. En este caso, esta variable varía entre 0 y 3, con una media de tan sólo 1.25 y una desviación típica de 0.75 (ver figura siguiente).

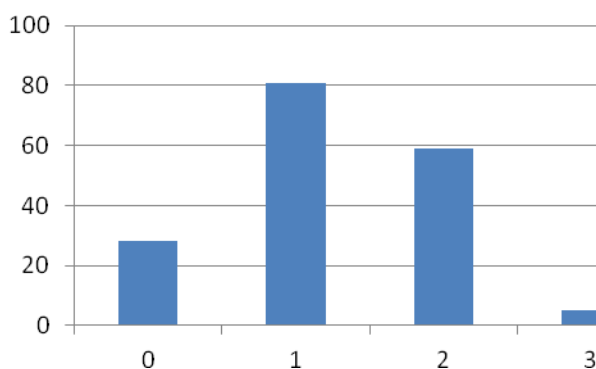


Figura 7. Número de estudiantes dependiendo del número de aciertos en la imagen “Papelerá”.

Bruselas. Curiosamente aquí el número de términos diferentes utilizados por cada estudiante vuelve a variar entre 0 y 8. Como en el caso de la imagen “Fuente”, se observa claramente que la mayor parte de los estudiantes utilizan entre 2 y 4 términos distintos ya que la media es 3 y la desviación típica es de 1.4. En la figura siguiente se muestran las frecuencias absolutas de los posibles números de respuestas:

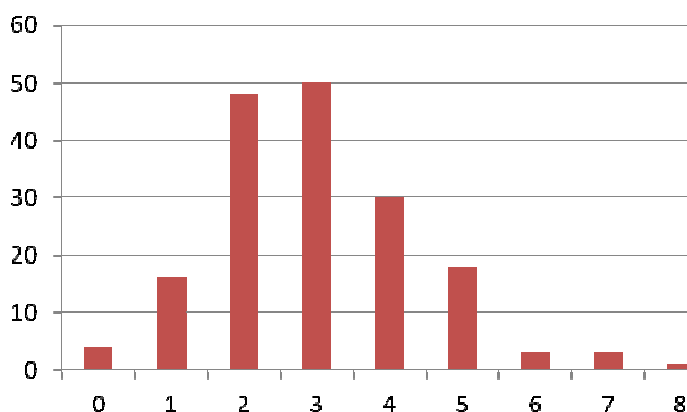


Figura 8. Número de estudiantes dependiendo del número de respuestas en la imagen “Bruselas”.

Resulta sorprendente que, en esta imagen, la distribución del número de aciertos por estudiante se mantiene casi invariante con respecto a la distribución del número de respuestas. El número de aciertos varía entre 0 y 7 con una media de 3 y una desviación típica de 1.4. En la figura siguiente se muestran las frecuencias correspondientes.

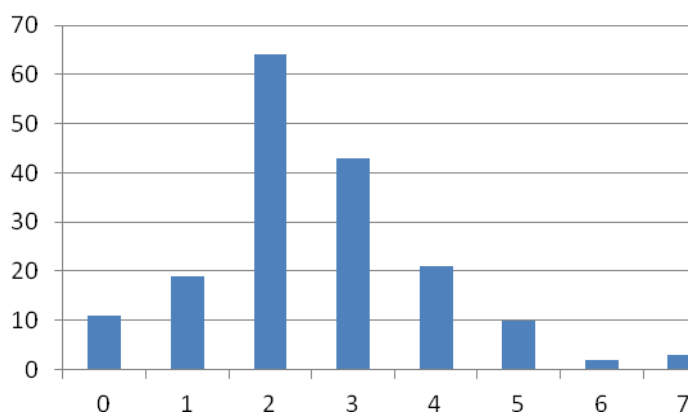


Figura 9. Número de estudiantes dependiendo del número de aciertos en la imagen “Bruselas”.

Como comentario general, resaltar el bajo número medio de respuestas por estudiante, que en ninguna de las imágenes llega a 4. El número de aciertos por estudiante es aún menor, con el caso extremo de la imagen “Papelera” en la que, en promedio, los estudiantes no llegan a señalar ni dos términos correctos.

4. Análisis cualitativo de los resultados

4.1. Términos correctos no esperados

En el apartado 2.3 se presentaron los términos que, tras un análisis previo de las imágenes, resultaban esperados por parte de los investigadores. Además, en el apartado 2.5 se indicó cuáles de ellos se considerarían como correctos al ser utilizados por los estudiantes.



Identificación de figuras geométricas en fotografías de objetos reales. Un estudio con maestros en formación

J.M. Muñoz Escolano y A.M. Oller Marcén

Sin embargo, tras el estudio cuantitativo de las respuestas de los estudiantes que se abordan en la sección anterior, aparecen términos que deben ser considerados correctos pero que no eran esperados por los investigadores. En concreto aparecen los siguientes.

	Términos correctos esperados	Términos correctos inesperados
Casa	Pentágono, trapecio, hexágono, rectángulo, triángulo y poliedro.	Trapezio isósceles, triángulo isósceles y triángulo rectángulo.
Fuente	Rectángulo, circunferencia, elipse, corona circular, heptágono, semiesfera y prisma.	Cuadrado, heptágono, octógono, óvalo y superficie de revolución.
Papelera	Trapezio, cuadrado y tronco de pirámide.	Trapezio isósceles, pirámide truncada y pirámide sin punta.
Bruselas	Cuadrado, triángulo, trapecio, esfera, cubo, pirámide y cilindro.	Rectángulo, pentágono y prisma.

Tabla 8. Términos correctos, esperados e inesperados, en las distintas imágenes.

Estos aciertos inesperados tienen, a nuestro juicio, un cuádruple origen:

- Existen términos que provienen de un “exceso” de precisión inesperado por parte de los estudiantes. Tal es el caso, por ejemplo, de los estudiantes que señalan el término trapecio isósceles para referirse a las caras laterales en la figura “Papelera”.
- Aparecen términos que deben ser tomados como correctos debido a que la imagen no proporciona todos los elementos necesarios para determinar unívocamente el objeto señalado. Este es el caso de la imagen “Fuente”, donde no puede saberse con total certeza si la forma de la misma es de heptágono o de octógono.
- Algunos estudiantes utilizan términos que no son usuales en la enseñanza de la Geometría al nivel de primaria y que, por ello, no se esperaban. Es el caso, por ejemplo de los términos óvalo y superficie de revolución.
- Por último, algunos estudiantes se fijan en partes de la imagen que los investigadores pensaban que iban a ser pasadas por alto. Así, por ejemplo, encontramos estudiantes que indican el término prisma en la imagen “Bruselas” refiriéndose a la caseta de la zona inferior derecha de la imagen.

4.2. Análisis de los errores

En este apartado nos vamos a centrar en presentar, clasificar y comentar los errores más importantes que se han constatado. Como ya se indicó en la sección 2.5, hemos detectado esencialmente dos tipos de errores diferentes.

4.2.1. Errores en el uso de la terminología

En este apartado se presentan algunos de los errores cometidos por los maestros en formación al identificar figuras y cuerpos geométricos que se relacionan con el mal empleo o desconocimiento de las definiciones de las figuras y cuerpos geométricos y no con el hecho de trabajar con una representación plana de cuerpos de tres dimensiones. Distinguimos entre esta clase de errores dos

tipos, aquellos que tiene que ver con el desconocimiento de la correcta definición de los términos y los asociados a la errónea formación de la palabra:

Tipo 1: Ciertos estudiantes desconocen la correcta definición de algunos objetos geométricos e identifican erróneamente algunos objetos reales por su semejanza con otros objetos geométricos.

Ya indicamos anteriormente que todos los estudiantes habían cursado una asignatura de contenidos geométricos entre cuyos contenidos están las definiciones de distintas figuras y cuerpos geométricos. Sin embargo, algunos estudiantes parecen desconocer o no atender a estas definiciones e identifican incorrectamente en las fotografías algunos objetos por su semejanza física con otros modelos geométricos que ya han estudiado previamente. En este sentido, en la imagen ‘Casa’, 17 estudiantes (9.8% del total) señalan que la casa tiene forma de dodecaedro o de semiesfera y en la imagen ‘Papelería’, 13 estudiantes (un 7.5% del total) indican que ésta es un prisma.

Dentro de esta categoría de errores también es destacable señalar la común confusión entre nuestros estudiantes entre los términos ‘círculo’ y ‘circunferencia’. Así, en la imagen ‘Fuente’, 64 estudiantes escriben ‘círculo’ (un 37% del total) al señalar el borde de la poza de la fuente, donde otros estudiantes señalan más adecuadamente ‘circunferencia’ o ‘corona circular’. Advertimos, sin embargo, que este fenómeno no puede ser debido únicamente a la confusión entre la correcta definición estos dos términos ya que también entre estos 64 estudiantes, existen algunos que señalan ‘círculo’ en lugar de ‘esfera’ o ‘semiesfera’, identificando de esta forma la representación plana del objeto con el propio objeto real. Este tipo de errores serán estudiados en el apartado 4.2.2.

Tipo 2: Ciertos estudiantes emplean términos o vocablos geométricos mal contruidos o inventados.

En este caso, algunos estudiantes cometen errores en la nomenclatura de los términos geométricos, esto es, se equivocan aplicando las reglas de construcción para formar las palabras o simplemente inventan términos inexistentes.

Así, 18 estudiantes (10.4% del total) indican erróneamente que la base de la imagen ‘Fuente’ es un heptaedro o un octaedro, en vez de un heptágono o un octógono, al emplear el sufijo “edro” en vez del sufijo “gono” para nombrar a los polígonos planos de más de cuatro lados. Aunque de manera mucho más esporádica, también aparecen términos inventados como ‘sexaedro’ o ‘septaedro’, por hexágono y heptágono, y otros de más difícil clasificación como ‘casquete geodésico’ en la imagen ‘Casa’, ‘cubo piramidal’ en la imagen ‘Papelería’ o ‘esfera circular’ y ‘prisma cilíndrico’ en la imagen ‘Bruselas’.

4.2.2. Errores causados por trabajar con una representación plana del objeto

Uno de los aspectos más interesantes de la actividad propuesta a los estudiantes era justamente el trabajo con fotografías de objetos reales, y no con objetos que pudieran manipular. Esto implicaba que los estudiantes tenían que distinguir claramente el objeto de su representación plana en el papel y, eventualmente, necesitaban manipularlo mentalmente a la hora de señalar los términos geométricos que identificaban.

Esta dualidad objeto-representación ha sido, en nuestra opinión, el origen de interesantes errores puesto que “cualquier representación bidimensional de objetos tridimensionales implica la distorsión de alguna de las propiedades del objeto, en el paso del espacio al plano, la comprensión de las representaciones requiere visión espacial y el conocimiento de convenciones que hay que utilizar” (Guillén, 2010, p. 54). Así pues, hemos identificado dos tipos de errores esencialmente diferentes:



Tipo 1: Ciertos estudiantes no diferencian el objeto real de su representación plana en el papel.

Los estudiantes que cometen este tipo de error señalan los objetos geométricos tal cual los ven en la fotografía sin reparar en que lo que tienen ante ellos era en realidad la proyección plana de un objeto tridimensional.

Un ejemplo de este tipo de error lo constituyen los 9 estudiantes (un 5.2% del total) que indican que la parte superior de la figura 'Papelera' es un rombo. Efectivamente dicha figura aparece como un rombo en la fotografía. Sin embargo, se trata en realidad de un cuadrado.

Otro ejemplo interesante lo proporcionan los 47 estudiantes (un 27.1%) que observan círculos o circunferencias en la imagen 'Bruselas'. Los objetos reales serían esferas, pero los estudiantes señalan la proyección de dichas esferas sobre el plano del papel.

Tipo 2: Ciertos estudiantes presentan problemas de visión espacial.

Los estudiantes que comenten este tipo de error sí observan que se encuentran ante una representación plana de un objeto tridimensional y que, por tanto, deben distinguir entre las figuras geométricas que perciben y las que realmente constituyen el objeto. Sin embargo, cuando deben manipular dicho objeto mentalmente (rotándolo, por ejemplo) para poder identificar su forma (o la de alguna de sus partes), una falta de visión espacial les hace identificar incorrectamente algunas figuras.

Así, en la imagen 'Papelera' por ejemplo, 25 estudiantes (un 14.5%) señalan erróneamente que los laterales son rectángulos y 14 (un 8.1%) que son paralelogramos. Estos estudiantes, al rotar mentalmente la figura, no han sido capaces de observar que los laterales son, en realidad, trapecios.

Por otra parte, en la imagen 'Fuente' 53 estudiantes (un 30.6% del total) indican que la base de la fuente tiene forma hexagonal. Parte de dicha base queda oculta, por lo que los estudiantes deben imaginar cómo se cierra el polígono correspondiente. Una observación detenida de la imagen permite concluir que, para que la información visual de la que se dispone sea coherente, el polígono debe tener al menos siete lados (podrían ser ocho y de ahí que se admitiera como posible respuesta correcta tanto heptágono, como octógono).

5. Conclusiones

En el presente trabajo hemos realizado un análisis detallado de las respuestas dadas por 173 maestros en formación ante una tarea sencilla, aunque poco habitual para ellos: el reconocimiento de figuras y formas geométricas en fotografías de objetos reales. A partir del estudio realizado, podemos extraer las siguientes conclusiones:

- El número de términos señalados por el total de los estudiantes es bastante alto, especialmente en lo referente a la geometría plana. Sin embargo un buen porcentaje de estos términos (en ocasiones superior al 60%) se corresponde con términos incorrectos.
- El número de términos utilizados por cada estudiante es menor que lo esperado. Por ejemplo, en una imagen bastante rica en posibles respuestas como 'Bruselas' el número medio de términos por estudiante es 3, en ninguna de las imágenes se llega a 4 y en el caso de la imagen 'Papelera' es de tan sólo 1.9.
- Si sólo nos centramos en términos correctos, los datos empeoran. Salvo en la imagen 'Bruselas', el número medio de aciertos por estudiante es claramente inferior al número

medio de términos señalados. El caso más claro se da en la imagen 'Fuente', donde tenemos 3.2 términos distintos por estudiante y 2.1 términos correctos por estudiante; 1 error por estudiante en promedio.

- Dada la gran variedad de términos señalados por los estudiantes han aparecido, por diversos motivos, otros términos correctos no esperados durante el diseño del test.
- En cuanto a los errores cometidos por los estudiantes, aparecen dos tipos de errores: uno, con menor presencia, vinculado al desconocimiento de las definiciones de los términos geométricos o al mal uso del vocabulario y otro, con una mayor presencia en las respuestas de los estudiantes, causado por el manejo de representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales.

Todos estos resultados ahondan en la necesidad de incidir en el trabajo geométrico con objetos reales y muy especialmente con objetos de tres dimensiones y sus correspondientes representaciones planas en la formación de maestros.

Bibliografía

- Barrantes, M. y Blanco, L.J. (2005). Análisis de las concepciones de los profesores en formación sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría. *Números*, 62, 33-44.
- Escolano, R., Gairín, J.M., Jiménez, C., Murillo, J. y Roncal, M.L. (2011). Competencias matemáticas del futuro maestro y perfil emocional. En Román, Carbonero y Valdivieso (compiladores), *Educación, aprendizaje y desarrollo en la sociedad multicultural*, 3661-3677. Ediciones de la Asociación de Psicología y Educación y el Colegio Oficial de Psicólogos de Castilla y León: Madrid.
- Escolano, R., Gairín, J.M., Jiménez, C., Murillo, J. y Roncal, M.L. (2012). Perfil emocional y competencias matemáticas de los estudiantes del Grado de Educación Primaria. *Contextos educativos*, 15, 107-134.
- Fouz, F. (2006). Test geométrico aplicando el modelo de Van Hiele. *Sigma*, 28, 33-57.
- González, E., Guillén, G., Figueras, O. (2006). Estudio exploratorio sobre la puesta en práctica de un modelo de enseñanza para la geometría de los sólidos en Magisterio. En Bolea, P., González, M.J. y Moreno, M. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, 195-204. SEIEM:Huesca.
- Guillén, G. (1997). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje*. Tesis doctoral, (Publicada en 1999 en la Col·lecció: Tesis doctorales en Microfitxes). Universitat de Valencia: Valencia.
- Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV*, 21-68. SEIEM:Lleida.
- Gutiérrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. *Memorias del Tercer Congreso Internacional sobre investigación en educación Matemática*. Valencia.
- Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista EMA*, 3(3), 193-220.
- Hernández, J., Noda, M.A., Palarea, M. y Socas, M. (2001). *Estudio sobre habilidades en matemáticas de alumnos de magisterio*. Tenerife: Universidad de La Laguna.
- Muñoz, J.M. y Oller, A.M. (2011). Evaluando competencias y conocimientos matemáticos de maestros en formación. En Paricio J., Allueva, A.I. y Cruz, F. (coord.), *Actas de las V Jornadas de Innovación e Investigación Educativa en la Universidad de Zaragoza*, En prensa.
- Nomdedeu, X. (2009). Exposiciones de fotografía y matemáticas. *Uno*, 52, 19-25.
- Nortes, A., López, J.A. y Martínez, R. (2009). Pruebas de conocimientos y destrezas en matemática. *Suma*, 60, 43-54.



Identificación de figuras geométricas en fotografías de objetos reales. Un estudio con maestros en formación

J.M. Muñoz Escolano y A.M. Oller Marcén

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R., y Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics*. Michigan: Teacher Education and Development International Study Center.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school Geometry*. Chicago: Department of Education, University of Chicago.

José María Muñoz Escolano. Licenciado en ciencias Matemáticas (2003) y Doctor (2007) por la Universidad de Zaragoza. Ha publicado diversos trabajos sobre Educación Matemática y Álgebra. Actualmente es profesor Ayudante Doctor de la Facultad de Educación de la Universidad de Zaragoza.
Email: jmescola@unizar.es.

Antonio M. Oller Marcén. Licenciado en ciencias Matemáticas (2004) por la Universidad de Zaragoza y Doctor por la Universidad de Valladolid (2012) con una tesis sobre la enseñanza de la Proporcionalidad aritmética en Secundaria. Ha publicado diversos trabajos sobre Educación Matemática, Álgebra y Teoría de Números. Actualmente es profesor del Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza.
Email: oller@unizar.es.