NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 83, julio de 2013, páginas 131-148

¿Yerra el niño o yerra el libro de Matemáticas?

Pilar Fernández Palop (Universidad de Alcalá de Henares. España)
Presentación Caballero García (Universidad Camilo José Cela. España)
José Antonio Fernández Bravo (Universidad Camilo José Cela y Universidad Complutense de Madrid. España)

Fecha de recepción: 19 de noviembre de 2012
Fecha de aceptación: 8 de abril de 2013

Resumen Analizando los libros de texto de Matemáticas más utilizados en la Comunidad de Madrid, nos dimos cuenta de que contenían errores matemáticos. A partir de aquí, quisimos someter a revisión este material didáctico. En vista de los resultados obtenidos, concluimos que se hace necesario realizar una investigación más seria y objetiva que nos lleve a identificar errores matemáticos en libros de texto, describirlos, clasificarlos y descubrir las relaciones que pudieran existir entre las distintas clasificaciones que se establezcan, así como su incidencia en el rendimiento académico de los alumnos que los utilizan.

Palabras clave Matemática, aprendizaje, materiales y recursos, errores matemáticos, libros de texto.

Abstract When we analyzed the most used mathematics textbooks in Madrid, we noticed that they contained mathematical errors. After that, we revised this didactic material. Considering the results, we see that it is necessary to conduct a serious and objective investigation that leads us to identify mathematical errors in textbooks, describe them, classify them and discover relationships that may exist between the different classifications we could establish.

Keywords Mathematics, learning, materials and resources, mathematic error, textbook.

> *"La causa de mis enormes enfados al examinar los libros estribaba en lo infames que eran éstos. Eran falsos. Estaban escritos con prisas. Pretendían ser rigurosos; pero luego usaban ejemplos que casi estaban bien pero nunca bien del todo; siempre tenían alguna pega. A las definiciones les faltaba precisión. Todo era un poco ambiguo; los autores no eran lo bastante listos como para comprender lo que significa «rigor»; sólo lo fingían. Pretendían enseñar algo que ellos no comprendían, y lo que es más, algo que, de hecho, al alumno le era totalmente inútil en ese momento".*
>
> Richard Feynman[1]

[1] Richard Feynman (1987, pp. 339-340). Premio Nobel de Física en 1965, compartido con Schwinger y Tomonaga.

1. El libro de texto como recurso didáctico

A pesar de la gran variedad de productos existentes en el mercado, la práctica de la enseñanza se sigue apoyando en el libro de texto (Cabero, Duarte y Barroso, 1989; García Mateos y Caballero, 2005). Los libros de texto se utilizan por profesores y alumnos como un instrumento en el proceso de enseñanza-aprendizaje. ¿Se recogen en ellos los contenidos que supuestamente deben aprender los alumnos? ¿Lo hacen de forma ordenada en cada uno de los cursos, según indica la legislación? ¿Proponen actividades que ayuden a profundizar en los contenidos estudiados? ¿Sirven de guía didáctica para el docente, y son un referente para el estudio de las distintas materias?

Su uso está sumamente extendido. Según los datos de la Federación de Gremios de Editores de España (2010, 2011, 2012), el libro de texto no universitario supone entre un 27% y un 30% de la venta global de libros vendidos en España en el período 2009-2011. Y fijándonos en la etapa de Educación Primaria, casi la totalidad de los alumnos los utilizan. Así lo señalan los últimos datos disponibles del Instituto de Evaluación del Ministerio de Educación (2009, pp. 92-93), que indican que el libro de texto es utilizado por un 99,1% de los alumnos de Educación Primaria.

En un estudio sobre el uso del libro de texto de Matemáticas en los centros de Primaria de la Comunidad de Madrid, obtuvimos datos semejantes a los del Instituto de Evaluación. Considerando como población los 1311 centros de Educación Primaria que había en 2011 en la Comunidad de Madrid (Consejería de Educación y Empleo de la Comunidad de Madrid, 2011), se tomó una muestra aleatoria estratificada que nos permitiera trabajar con un nivel de confianza del 95% y asumiendo un error de cálculo del 5%.

En las encuestas a los centros de nuestra muestra, se preguntó si se utilizaba libro de texto de Matemáticas en cada uno de los cursos de Primaria y, en caso afirmativo, qué libro de texto se utilizaba.

Los resultados sobre el uso del libro de texto de Matemáticas en cada uno de los cursos de Educación Primaria fueron los siguientes (Tabla 1):

Libro de texto	1.º EP	2.º EP	3.º EP	4.º EP	5.º EP	6.º EP
Sí usan libro	94,29%	95,71%	95,71%	95,71%	97,14%	97,14%
No usan libro	5,71%	4,29%	4,29%	4,29%	2,86%	2,86%
Total	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

Tabla 1. Porcentajes de uso de libros de texto, por curso

En cuanto a los libros de texto de Matemáticas que se utilizaban[2], se obtuvieron los siguientes resultados[3]:

[2] Por respeto a los autores, se omiten los títulos y editoriales de los libros analizados. Ponemos a disposición de quien lo requiera los datos utilizados en este estudio.

[3] Por errores de redondeo, no coincide el total de los libros de texto utilizados con la suma de los porcentajes que aquí aparecen, ya que para calcular el total se han tomado los porcentajes sin redondear.

Editoriales	1.º EP	2.º EP	3.º EP	4.º EP	5.º EP	6.º EP
Editorial 1	35,71%	37,14%	38,57%	40%	38,57%	38,57%
Editorial 2	24,28%	22,85%	21,42%	20%	22,85%	22,85%
Editorial 3	22,85%	24,28%	21,42%	21,42%	21,42%	21,42%
Editorial 4	4,28%	4,28%	7,14%	5,71%	7,14%	7,14%
Editorial 5	2,85%	2,85%	2,85%	2,85%	2,85%	2,85%
Editorial 6	1,42%	1,42%	2,85%	2,85%	1,42%	1,42%
Editorial 7	2,85%	2,85%	1,42%	1,42%	2,85%	2,85%
Editorial 8	0%	0%	0%	1,42%	0%	0%
Total	94,29%	95,71%	95,71%	95,71%	97,14%	97,14%

Tabla 2. Porcentajes de uso de libros de texto, por curso y editorial

Como puede observarse en la Tabla 2, el libro de texto de Matemáticas es utilizado, según nuestros datos, en un 97,14% de los centros de Primaria de la Comunidad de Madrid.

2. Errores en libros de texto de Matemáticas

Analizando libros de texto de Matemáticas de 6.º de Educación Primaria de las cuatro editoriales más utilizadas en la Comunidad de Madrid, encontramos lo siguiente. En la exposición de contenidos, vemos errores de concepto, descripciones ambiguas de algoritmos, contenidos en los que se han omitido condiciones de restricción y aparecen como generales… En los ejercicios resueltos, encontramos respuestas en las que el razonamiento que se lleva a cabo es contrario al razonamiento lógico, o bien que se pretende aplicar un concepto erróneo… Por último, en los ejercicios propuestos, vemos problemas mal definidos (Noda Herrera, 2000; Simon, 1973), que pueden ser interpretados de varios modos con distintas soluciones y en la guía didáctica aparece una única solución; o que carecen de los datos necesarios para ser resueltos y en la guía didáctica se utilizan dichos datos; o bien en los que aparecen símbolos matemáticos utilizados con un significado distinto del que la matemática dicta, o cuyo enunciado es absurdo o sin solución y en la guía didáctica aparece una solución…

A continuación, exponemos ejemplos de ellos, justificando en cada caso por qué se trata de un error, y ordenándolos según una serie de características, cuyo listado no pretende ser ni excluyente ni exhaustivo. Las características que han servido para la ordenación son las siguientes:

- Error de concepto
- Ambigüedad
- Problemas con enunciados absurdos
- Problemas en los que faltan datos o que contienen órdenes incompletas
- Enunciados de problemas con error en los datos o que contienen órdenes contradictorias
- Error en la respuesta a un problema

Error de concepto

El primero de los errores de concepto que presentamos es el siguiente:

> “La mediana de un conjunto ordenado de un número de elementos impar es aquel que ocupa el lugar central”. “La mediana de un conjunto ordenado de

> un número par es la media aritmética de los dos valores que ocupan el lugar central".

Justificación: los datos deben ser cuantitativos; esto es, numéricos, y no un conjunto ordenado[4].

Una consecuencia de ese error de concepto la encontramos en el mismo libro, donde aparece el siguiente ejercicio propuesto:

> "En un párrafo se han contado las vocales y se han obtenido los siguientes datos. Vocal a: 45; vocal e: 11; vocal i: 15; vocal o: 24; vocal u: 8. ¿Qué letra representa la mediana?"

La guía didáctica afirma que la letra *i* representa la mediana, algo absurdo (además de que la letra que ocuparía el lugar central de ese conjunto ordenado es la letra *e*). Y para demostrar el absurdo, basta encontrar un contraejemplo. Las vocales pueden ser consideradas como un conjunto ordenado, pero no son datos numéricos. En este caso, el número de datos de la muestra era impar, pero, ¿qué hubiese sucedido si el número de datos hubiese sido par y los dos datos centrales hubiesen tenido valores distintos, por ejemplo, *e*, *i*? Según lo descrito en el libro, ¿cómo se calcularía la mediana? ¿Haciendo la media aritmética de ambas vocales? ¿$\frac{e+i}{2}$? ¿Qué vocal es esa?

Otro ejemplo de error de concepto, en el que se confunde la parte con el todo, es el siguiente:

> "Una fracción representa parte de una unidad. Los términos de una fracción son el numerador y el denominador. El denominador indica el número de partes iguales en que se divide la unidad, y el numerador el número de partes que se toman. Para representar una fracción elegimos una unidad, la dividimos en tantas partes iguales como indica el denominador y marcamos las partes que nos señala el numerador".

Justificación: Según lo descrito, 5/2, por ejemplo, no es una fracción, ya que no representa parte de una unidad. Está confundiendo el término matemático de fracción con el de fracción propia.

El error de concepto puede también ser consecuencia de una omisión en las premisas, como vemos en el siguiente ejemplo:

> "Probabilidad de un suceso. Determinamos la probabilidad mediante una fracción. Para expresar la probabilidad de un suceso, escribimos una fracción: en el numerador ponemos el número de casos favorables, y en el denominador, el número de casos posibles".

---

[4] Diccionario Oxford-Complutense. Matemáticas: Mediana (en estadística). Supongamos que se ordenan los resultados de las observaciones de un parámetro numérico en orden ascendente. La mediana de esa muestra es la observación que ocupa el lugar medio cuando hay un número impar, y la media aritmética de las dos centrales cuando el número de observaciones es par (Clapham, 1998, pág. 230).

Diccionario Akal de Matemáticas: Mediana estadística de un carácter cuantitativo X que toma los valores a_1, a_2,…, a_n sobre una muestra de *n* individuos. Número real *m* tal que el número de valores de X inferiores a *m* sea igual al número de valores superiores a *m*. Si *n* es impar, la mediana *m* es uno de los valores a_1, a_2,…, a_n. Si *n* es par, *m* es un número escogido entre dos valores bien determinados por X (Bouvier y George, 2005, pág. 525).

Justificación: Lo descrito es cierto sólo para sucesos equiprobables, no para sucesos en general. Además, habría que añadir que la probabilidad de un suceso, equiprobable o no, está comprendida entre 0 y 1.

Ambigüedad

La ambigüedad puede aparecer en distintos contextos, ya sea en la exposición de contenidos teóricos, ya sea en un enunciado de un problema o ejercicio. Como ejemplo de ambigüedad en la descripción de un algoritmo, proponemos el siguiente:

> "Para aproximar un número a un determinado orden de unidades: 1.º Se suprimen las cifras que quedan a la derecha; 2.º Si la primera cifra suprimida es mayor o igual que 5, se suma uno a la primera cifra no suprimida".

Justificación: Se dice que "se suprimen las cifras que quedan a la derecha", pero no se indica a la derecha de qué. Tampoco se dice qué se considera "la primera cifra suprimida", ni qué sucede si la primera cifra suprimida no es mayor o igual que 5.

Y como enunciado de un problema ambiguo:

> [*Aparece un escaparate con un cartel que pone "Rebajas: 50% de descuento". En el escaparate hay una serie de artículos con un precio marcado (chándal, 26 euros; zapatillas de deporte, 18 euros; bicicleta, 95 euros), y de un altavoz sale una voz que dice:*] "¡Última oportunidad! Hoy todo a mitad de precio". Abajo pregunta: "¿Cuánto cuesta hoy el chándal? ¿Y los deportivos? ¿Y la bicicleta?".

Justificación: Este problema tiene dos soluciones. Según si los precios marcados están ya rebajados o no, la solución será: "El chándal cuesta hoy 26 euros, las zapatillas de deporte 28 euros, la bicicleta 95 euros", o bien, "El chándal cuesta hoy 13 euros, las zapatillas de deporte 9 euros, la bicicleta 47,5 euros". La guía didáctica da como solución: "El chándal cuesta hoy 13 euros, las zapatillas de deporte 9 euros, la bicicleta 47,5 euros".

Problemas con enunciados absurdos

Hay problemas con enunciados absurdos, a los que no es posible responder de forma lógica, y que, sin embargo, aparecen resueltos de forma unívoca, bien en el propio libro de texto del alumno, bien en la guía del profesor. El hecho de que no se pueda responder de forma lógica puede deberse a diversas causas. Por ejemplo, que no exista relación entre la situación que se plantea y la pregunta a la que se debe responder:

> "Hoy, a las seis de la tarde, el termómetro marcaba 10 grados. Dos horas después bajó tres grados, y siete horas más tarde bajó cinco grados más. ¿Qué temperatura marca ahora?".

Justificación: La primera pregunta que tendríamos que hacernos es: ¿Cuándo es "ahora"? ¿Ahora es el instante en el que estamos leyendo el problema? ¿Ahora es al finalizar esas últimas siete horas que se describen? ¿Cómo vamos a poder responder de forma lógica a una pregunta que no guarda relación con lo descrito en el problema? Para hallar la respuesta, podríamos ir a mirar el termómetro de la clase (o de casa, según dónde y cuándo se esté resolviendo) e indicar la temperatura que marca ahora, algo que no tiene nada que ver con el enunciado del problema[5].

Otra causa puede ser que la orden que se dé sea, sencillamente, absurda:

> "Expresa estas situaciones utilizando números positivos o números negativos: Tengo doce euros; he adelgazado 15 kilos; he gastado 20 euros; pues yo he engordado 8 kilos".

Justificación: Dependiendo del contexto, todas esas expresiones que ahí aparecen pueden ser traducidas al lenguaje matemático con un signo positivo o negativo. Por ejemplo: "Hace cinco meses me puse a régimen. El primer mes perdí 4 kilos, el segundo 3 kilos, el tercer mes 4 kilos, el cuarto 2 kilos, y el quinto he adelgazado 2 kilos. ¿Cuánto he adelgazado en total en los últimos cinco meses?" En los últimos cinco meses he adelgazado +15 kilos, o bien, sencillamente, 15 kilos. En el ejercicio, la guía didáctica da como respuesta: +12 euros, -15 kilos, -20 euros, +8 kilos.

En ocasiones, en los libros de texto se puede plantear un problema con vistas a que se utilice un determinado método matemático que lleve a una determinada solución. Sin embargo, puede suceder que se plantee una situación en la que la utilización de dicho método resulte absurda:

> "Amaya ha comido un pastel y un cuarto de otro, y Pablo, dos pasteles y medio de otro. ¿Qué cantidad de pasteles comieron entre los dos? Si había cinco pasteles, ¿qué cantidad dejaron?".

Justificación: Este problema aparece después de otro semejante que está resuelto en el que se sumaban y restaban las fracciones, y en el que sí que tenía sentido realizar esas operaciones con fracciones. La guía didáctica da como solución que se comieron 15/4 de pastel, y que se dejaron 5/4 de pastel. Y, aunque la solución es válida, en este caso, no tiene sentido sumar o restar las fracciones que aparecen (aunque matemáticamente pueda hacerse), ya que se trata de distintos pasteles. Entre los dos se comieron tres pasteles, un cuarto de uno y medio de otro. Si había cinco pasteles, dejaron tres cuartos de un pastel (o quizá la mitad y un cuarto, dependiendo de cómo se hayan hecho los cortes) y medio de otro.

En esta misma línea, puede suceder que se plantee un problema en el que el modo de describir la situación resulte absurdo:

> "Un ciclista ha recorrido en tres etapas 345 km 30 hm. En la primera recorrió 123 km 5 hm, y en la segunda, 87 km 36 hm. ¿Cuánto recorrió en la tercera?".

Justificación: Es absurdo decir que recorre 345 km 30 hm, ya que eso son 348 km, y en este caso no tiene sentido la descomposición que se hace. Y tampoco decir que en la segunda recorre 87 km 36 hm, ya que son 90 km 6 hm.

---

[5] Es necesario añadir que si intentamos situarnos en el tiempo que describe el problema, nos encontramos con lo siguiente. Hoy a las 18:00 marcaba 10 grados. A las 20:00 (dos horas más tarde) marcaba 7 grados (bajó tres grados). Y siete horas más tarde (3:00 del día siguiente, a no ser que ese día tenga más de 24 horas) marcaba 2 grados (bajó cinco grados). Como se observa, la primera palabra que aparece en el problema es "hoy", por lo que se supone que el problema está redactado antes de las doce de la noche de "hoy". Sin embargo, acaba describiendo lo que "pasó" a las tres de la mañana "de mañana". La guía didáctica da como resultado 2 grados.

Otro caso en el que no es posible responder de forma lógica es cuando en el enunciado aparecen símbolos matemáticos utilizados con un significado distinto al que la matemática dicta.

> "¿Cuál es el volumen del contenedor expresado en litros?" [*Y aparece una imagen del signo = que tiene pintado, a su izquierda, una botella con una etiqueta que dice "1,5 litros", y a su derecha un cubo. Del cubo sale una flecha hacia un contendor que contiene 12 cubos semejantes al primero.*]

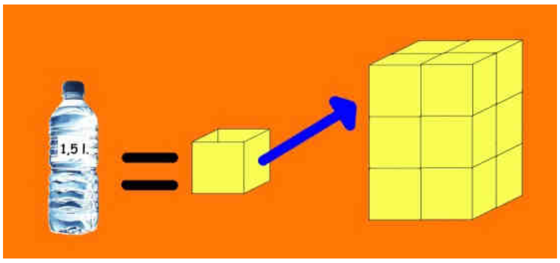

Figura 1. Ejemplo para uso de símbolos matemáticos con distinto significado

Justificación: En el enunciado se afirma que una botella de litro y medio es igual a un cubo, y eso es falso. La respuesta a esa pregunta debería ser algo del tipo: "La imagen es absurda, y no se proporcionan datos para responder a la pregunta". La guía didáctica da como solución 18 litros.

Por último, el origen de que el enunciado resulte absurdo puede ser consecuencia de un error de concepto:

> "Observa el gráfico y responde a las preguntas. a) ¿Qué datos recoge? b) Con los datos del gráfico construye la tabla de frecuencias. ¿Cuál es la frecuencia relativa del quinto partido? ¿Qué datos tienen cero de frecuencia absoluta? c) ¿Cuál es la media de goles que ha conseguido el equipo? ¿Cómo lo has calculado? ¿Cuál es la moda?". [*Y aparece un gráfico de barras que indica los goles metidos por un equipo en quince partidos, ordenados del 1.º al 15.º.*]

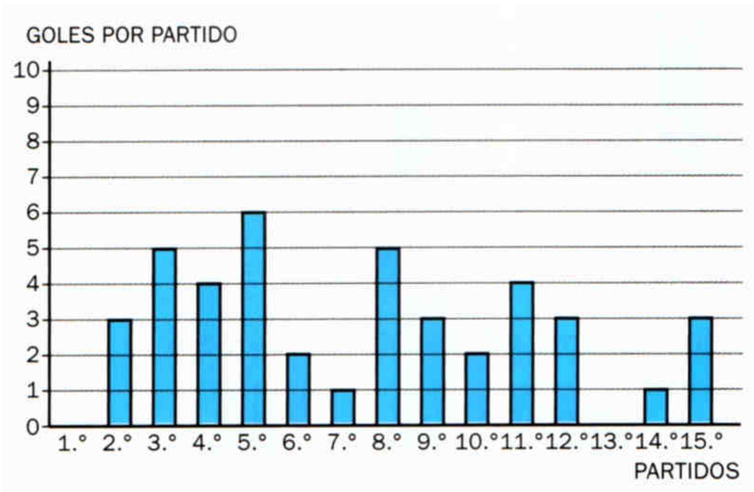

Figura 2. Ejemplo para error de concepto en la solución

Justificación: Aunque el gráfico que aparece tiene el aspecto de un gráfico de barras con las frecuencias de una variable, no lo es. Es la representación de una serie de datos, a saber, goles en cada partido. En la solución, el libro considera que el gráfico representa frecuencias, no datos[6].

Problemas en los que faltan datos o que contienen órdenes incompletas

Un caso de falta de datos es cuando en el enunciado del problema no aparecen determinados datos de cultura general, dándolos por sabidos, y que son necesarios para su resolución:

> "Cuando Tutankamon tenía 17 años fue nombrado faraón de Egipto. Esto ocurrió en el año 1339 antes de Cristo. Su reinado duró 8 años. ¿En qué año nació Tutankamon? ¿En qué año murió?".

Justificación: Las premisas que nos dan son la edad y año en el que accedió al trono, y la duración de su reinado. A partir de esos datos podríamos responder a la primera pregunta, pero no a la segunda. Nada se dice acerca de la muerte de Tutankamon, y tampoco sabemos si se trata de un personaje histórico o ficticio (y hay que tener en cuenta que, en los problemas de los libros de texto, los personajes que aparecen son ficticios la mayoría de las veces), por tanto no tendría sentido intentar averiguar los datos que faltan por otros medios. Se indica la duración de su reinado, pero ese dato es irrelevante, ya que no se indica qué hizo después de ser faraón ni por qué dejó de serlo (pudo haber abdicado, haber sido invadido, haberse vuelto loco y que le hubieran encerrado, o simplemente desaparecer un día sin más y huir a otro país…). Por tanto, la respuesta a esta pregunta es: "con los datos que nos dan no es posible responder de forma única". La guía didáctica da como solución: Tutankamon nació en el año 1356 antes de Cristo y murió en el 1331 antes de Cristo.

---

[6] Para comprender que lo que aparecen son datos y no frecuencias, bastaría pensar qué haríamos para calcular la media: sumaríamos todos los goles y dividiríamos el resultado entre el número de partidos. Es decir, que el número de partidos es el número total de datos, lo que significa que el gráfico está representando datos de la variable goles por partido, no frecuencias.

Para responder a la primera orden del apartado b), habría que hacer la tabla: (n.º de goles, número de partidos): (0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 4), (4, 2), (5, 2), (6, 1). Total de datos: 15. Sin embargo, la solución que aparece en la guía didáctica es: (Partido, Goles, Frecuencia relativa): (1, 0, 0), (2, 3, 3/42), (3, 5, 5/42), (4, 4, 4/42), (5, 6, 6/42), (6, 2, 2/42), (7, 1, 1/42), (8, 5, 5/42), (9, 3, 3/42), (10, 2, 2/42), (11, 4, 4/42), (12, 3, 3/42), (13, 0, 0), (14, 1, 1/42), (15, 3, 3/42). Total de datos: 42 (que es la suma de goles).

Por otro lado, la primera pregunta que aparece en el apartado b) es absurda. No existe la frecuencia relativa de un dato concreto, sino de un valor de una variable. Sin embargo, la guía didáctica afirma que "la frecuencia relativa del quinto partido es 6/42".

La segunda pregunta del apartado b) dice: "¿Qué datos tienen cero de frecuencia absoluta?". Podríamos decir que para cualquier valor mayor o igual que siete, la frecuencia absoluta es cero, ya que el máximo de goles marcados es 6, y hay partidos en los que se han obtenido cada uno de los valores de 0 a 6. Sin embargo, la guía docente afirma que "el primero y el tercer partido tienen cero de frecuencia absoluta".

En el apartado c), la guía didáctica afirma que la media es 2,8 goles, aunque no explica cómo se ha de calcular. Esa media es de la variable goles por partido, y se calcula sumando el total de goles y dividiéndolo entre el número total de datos, es decir, 15. Como puede verse, el número total de datos es 15, no 42 (como afirmaba en la tabla del apartado b)).

Otro caso es cuando en un problema no existe relación entre los datos que se dan y lo que se pide, debido a que se ha omitido una premisa:

> "Jorge cambia con Pepa cromos por canicas. Un cromo cuesta 0,20 euros, y una canica, 0,30 euros. ¿Cuántas canicas recibirá Jorge a cambio de 15 cromos?"

Justificación: El problema nos dice cuánto cuestan, tanto las canicas como los cromos, pero no cómo se va a establecer el trueque, algo que normalmente no se rige por el valor por el que se ha comprado cada producto, por tanto no se puede resolver, a no ser que se añadan hipótesis para el trueque y se den soluciones para cada una de las hipótesis. La guía didáctica da como solución 10 canicas.

O que la omisión de una premisa en el enunciado, que se da por supuesta, lleve a que el problema tenga más de una solución:

> "Escribe ordenados los enunciados de estos problemas y, después, resuélvelos". [*Y aparecen dos recuadros, uno que indica "Problema 1", y el otro "Problema 2". Dentro de cada uno de esos recuadros aparecen varios párrafos, cada uno de ellos enmarcados en un recuadro, y un par de imágenes ilustrativas. En el problema 2, los textos son los siguientes:*] 1.º) "¿Cuántas filas puede hacer? ¿Cuántos muñecos le sobran?". 2.º) "Para jugar, los sitúa en filas de 8 muñecos". 3.º) "Su tío Enrique le regala 15 muñecos más". 4.º) "David colecciona muñecos articulados, y ya tiene 77 modelos distintos".

Justificación: En ningún momento se dice que se tienen que utilizar todos los textos, o que no pueden repetirse. Por tanto, se podrían hacer varias combinaciones, todas ellas válidas, obteniendo distintos problemas con distintas soluciones: 4.º, 2.º, 1.º, 3.º, 1.º, o bien, 4.º, 3.º, 2.º, 1.º, o bien 4.º, 2.º, 1.º. La guía didáctica da como solución: 4.º, 3.º, 2.º, 1.º. Para que la solución fuera única y 4.º, 3.º, 2.º, 1.º, se tendría que haber añadido una premisa del tipo: "Debes utilizar todos los enunciados, y debes utilizar cada uno de ellos solo una vez".

También puede suceder que la omisión de una premisa lleva a que el problema tenga infinitas soluciones:

> "Para embalar un paquete, se necesitan 0,75 metros de cinta. ¿Cuántos paquetes se pueden embalar con seis rollos de cinta de 30 metros cada uno?".

Justificación: No nos dicen que los paquetes tengan que ser iguales, por tanto, el problema tiene infinitas soluciones. La guía didáctica da como solución 240 paquetes.

Incluso, el hecho de que se omita una premisa puede llevar a que la solución que se plantee en la guía didáctica sea errónea.

> "Indica qué números están representados en la recta". Y aparece una recta numérica en la que vienen representados los siguientes números: –2, 0 y +2. También aparece una letra "A" sobre el que sería el punto –5, y una letra "B" sobre el que sería el punto +6".

Justificación: La respuesta a esa pregunta es –2, 0 y +2, y no –5 y +6, tal y como aparece en la guía didáctica. "A" y "B" no son números, y en ningún momento se ha indicado que representen número alguno. Sólo en el caso de que en el enunciado apareciese la premisa "si suponemos que A y B representan números de la recta numérica" podríamos decir que A es –5 y B es +6.

Por último, presentamos un caso en el que la falta de un dato en el enunciado puede inducir a un error de concepto en el sujeto que responde:

> "Averigua, sin hacer la división, cuáles de los siguientes números son divisibles por 9", y aparecen los siguientes números: 45, 126, 234, 351, 236, 468, 738, 2340. A continuación, dice: "¿Cuáles son también divisibles por 3? ¿Qué observas?".

Justificación: Todos los números que aparecen en el enunciado, a excepción del 236, son divisibles por tres y por nueve, y el 236 no es divisible ni por tres ni por nueve. Por tanto, como los números que aparecen, si son divisibles por tres también lo son por nueve, podríamos extraer la conclusión de que es lo mismo ser divisible por tres que divisible por nueve. La guía didáctica da como solución: "Si un número es divisible por nueve, entonces es divisible por tres". Pero esa conclusión no se obtiene de forma lógica del enunciado. Habría sido necesaria la inclusión de un número que fuera divisible por tres, pero no por nueve.

Enunciados de problemas con error en los datos o que contienen órdenes contradictorias

Hay ocasiones en las que los datos que han sido utilizados para llegar a la solución en la guía didáctica no coinciden con los que aparecen en el enunciado del problema:

> "Aprende a resolver problemas. Escribe tú los enunciados. Inventa, para cada problema, el enunciado, de forma que se resuelva con las operaciones que aparecen en ellos". Y aparece un escaparate con dos partes. En la parte de la izquierda hay un cartel que dice: "Rebajas del 30% sobre el precio marcado", y aparece una camisa que marca 36 euros, una chaqueta que marca 68 euros y un pantalón que marca 59 euros. En la parte de la derecha hay otro cartel que dice: "Sin rebajar", y aparece una cazadora que marca 180 euros, un gorro que marca 12 euros, unos guantes que marcan 18 euros y unas botas que marcan 75 euros. A continuación, aparecen cuatro apartados con distintas operaciones, para que, a partir de ellas, se inventen los distintos problemas. Las operaciones del cuarto apartado son las siguientes: 180+75=255 euros; 36:100=0,36 euros; 0,36x30=10,8 euros; 255+10,8=265,8 euros; 300-265,8=34,2 euros. "Solución: A David le sobraron 34,2 euros".

Justificación: Según las operaciones que aparecen, David paga el 30% de un producto de 36 euros, pero eso significa que el producto está rebajado un 70%, y el cartel lo que dice es que las rebajas son del 30% sobre el precio marcado. Por tanto, no existe ningún enunciado posible cuyas operaciones sean las que se proporcionan. En la guía didáctica se da como solución un problema en el que David compra una camisa, una cazadora y unas botas, y pregunta que si tenía 300 euros, cuánto dinero le sobró.

Otras veces, puede suceder que los datos que se extraen del gráfico que acompaña al enunciado del problema no se corresponden con los que han sido utilizados para hallar la solución de la guía didáctica.

> "Calcula la superficie de esta fuente". [*Y viene dibujada una fuente con forma hexagonal no regular, ya que los lados superior e inferior son claramente más cortos que los otros cuatro. En el gráfico se indica que el lado inferior*

> *mide 10 metros, y la distancia del centro del hexágono a la mitad de ese lado es 8,66 metros.*]

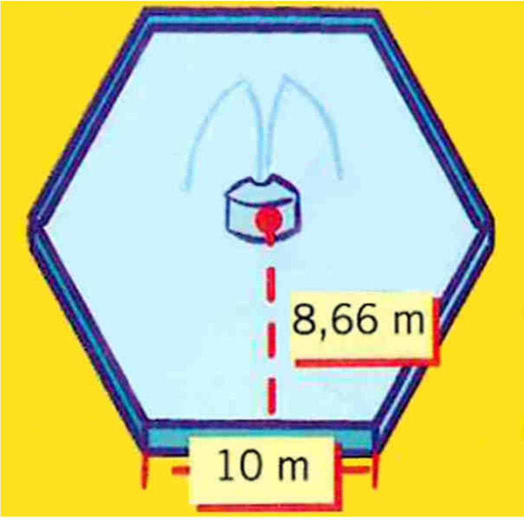

Figura 3. Ejemplo para error de gráfico carente de información

Justificación: El hexágono no es regular.[7]

Por último, en ocasiones podemos encontrar un problema en el que aparecen órdenes contradictorias:

> "Averigua, sin hacer la división, si podemos repartir 234 tuercas en cajas de 3 sin que sobre ninguna. ¿Y en cajas de 9 tuercas? ¿Cuántas cajas son necesarias en cada caso?".

Justificación: Es posible responder a las dos primeras cuestiones sin hacer la división, aplicando las propiedades de la divisibilidad. Sin embargo, no es posible responder a la última cuestión, a no ser que se fueran probando productos por tanteo hasta que se diera con la solución. La guía didáctica da por respuesta: "*Sí se pueden repartir en cajas de 3 y 9 tuercas. Necesitaríamos 78 cajas de 3 tuercas o 26 cajas de 9 tuercas*".

Error en la respuesta a un problema

El error en la respuesta a un problema se puede deber a múltiples causas. Por ejemplo, que se haya cometido un error en la inferencia:

---

[7] Al no tratarse de un hexágono regular, la única forma de resolverlo sería medir con una regla las distancias que nos dan, comprobar que ambas distancias, las que nos dan numéricamente y las que aparecen en el dibujo, guardan la misma proporción (en caso de que no guarden la misma proporción, el problema no tendría solución) y calcular la escala en la que se ha pintado; medir el resto de lados y las diagonales, y así calcular el área, algo que excede los contenidos de Educación Primaria. La guía didáctica da como solución 259,8 m^2, que sería la solución en el caso de que se tratara de un hexágono regular, algo que es falso.

> “Daniela adorna las mesas del restaurante con 37 claveles. ¿De cuántas formas las puede repartir para que todas tengan el mismo número de flores?”
> “Divisores 37=1 y 37. De una, pues 37 es primo”.

Justificación: En el problema nos dicen que repartamos mesas en función de una cantidad de claveles, algo que inicialmente puede resultar absurdo (¿de dónde salen las mesas?, ¿con cuántas contamos para poder repartirlas?). Tomándolo por válido, y contando con que podemos poner el número de mesas que necesitemos, el problema tendría dos soluciones: precisamente por ser primo, 37 tiene dos divisores, el 1 y el 37, y, por tanto, podremos poner una mesa con 37 claveles, o bien, 37 mesas con un clavel cada una. La respuesta que da el problema es absurda pues, al contar 37 con dos divisores, las posibles soluciones son dos, no una. Está obviando una de las soluciones (y no se sabe cuál de las dos, ya que no se especifica).

Otra causa de error de la respuesta puede ser que, para hallar la respuesta, se haya partido de unas premisas distintas a las que se daban:

> "Utiliza tu ingenio: Divide el tablero en cuatro partes iguales de forma que en cada parte haya una pera y una manzana". [*Y aparece un tablero formado por cuatro filas y cinco columnas de casillas. En cada una de las casillas que forman las esquinas del tablero hay una pera (cuatro en total), y en cada una de las casillas de la columna central hay una manzana (cuatro en total). El resto de las casillas están en blanco.*]

Justificación: En este problema se podrían hacer cuatro partes con la misma cantidad de peras, manzanas y casillas en blanco, pero esas partes no son iguales, ni siquiera semejantes. Por tanto, cualquier solución distinta a “El problema no tiene solución” es un error. La guía didáctica da como solución dividirlo en cuatro partes que contienen cada una de ellas una manzana, una pera y tres casillas en blanco.

También se puede cometer error en la respuesta debido a que se ha utilizado como premisa un concepto erróneo:

En un ejercicio resuelto, se pide hallar el cociente de la división 1,8:1,3 hasta las centésimas, y lo hace del siguiente modo:

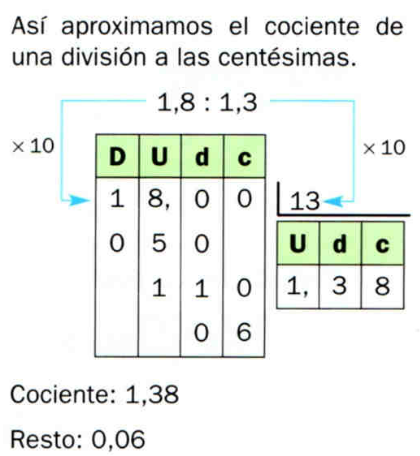

Figura 4. Ejemplo para error de omisión de premisas en aplicación

Justificación: Las divisiones 1,8:1,3 y 18:13 son divisiones equivalentes, el cociente de ambas divisiones es el mismo, pero el resto no.[8]

Por último, presentamos el caso de un problema que, partiendo de un enunciado con datos contradictorios, los toma como válidos, llegando a un resultado absurdo que también da por válido:

> "De los alumnos que viajan en un autobús escolar 2/5 son niños y 4/7 niñas ¿Cuántos niños y niñas viajan en total?". "Para resolver el problema sumamos 2/5 y 4/7. Como las fracciones tienen distinto denominador, antes de operar las reducimos a común denominador (…). Ahora sumamos las nuevas fracciones. 14/35+20/35=34/35. Luego en total viajan en el autobús escolar 34/35 niños y niñas".

Justificación: Antes de empezar a resolver el problema se debería haber dicho algo del tipo: "Si de los alumnos que viajan en el autobús escolar 2/5 son niños, entonces las niñas tienen que ser 3/5. Como nos dicen que son 4/7, existe contradicción entre los datos, por lo que el problema es absurdo: no tiene solución". Además, pregunta cuántos niños y niñas, y no conocemos el total. La pregunta que surge viendo la solución que propone el libro es: ¿qué es ese 1/35 de alumnos que no son ni niños ni niñas?

Un ejemplo de Feynman

Concluimos estos ejemplos de errores con el problema de un libro de texto descrito por Feynman (1987), que se encuadraría dentro de los enunciados absurdos.

En el libro que describe el Premio Nobel, se detallaban las temperaturas de una serie de estrellas que, según su color, tenían una temperatura u otra. A continuación, se enunciaba el problema:

> «Juan y su padre salen a observar las estrellas. Juan ve dos estrellas azules y una roja. Su padre ve una estrella verde, una estrella violeta y dos estrellas amarillas. ¿Cuál es la temperatura total de las estrellas observadas por Juan y su padre?» Y yo reviento horrorizado. (…) Lo que he expuesto no era sólo un ejemplo: era constantemente así. ¡El absurdo perpetuo! Hallar la temperatura total de dos estrellas es algo falto por completo de sentido. ¡Nadie suma la temperatura de las estrellas, salvo tal vez para calcular la temperatura media de un grupo de estrellas, pero jamás para hallar la temperatura total! ¡Era horrible! Todo era una historieta para hacer sumar al niño; los autores no tenían ni idea de lo que hablaban. Era como ir leyendo frases con unos cuantos errores tipográficos, y entonces, de pronto, aparece una frase entera escrita al revés, de fin a principio. Así eran las matemáticas. ¡No había remedio!» (Feynman, 1987, p. 341).

[8] Para dividir 1,8:1,3 multiplicamos dividendo y divisor por diez, obteniendo así la división equivalente a la original 18:13. Si dividimos 18:13 hasta hallar un cociente con dos cifras decimales, obtenemos 1,38 de cociente y 0,06 de resto. Como 1,8:1,3 y 18:13 son divisiones equivalentes, el cociente de ambas divisiones es el mismo, pero el resto no. Para probarlo, basta hacer la comprobación de la división: dividendo es igual a divisor por cociente más resto (D=d*c+r). Según el libro, en la división original, el dividendo es 1,8 (D=1,8), el divisor es 1,3 (d=1,3), el cociente es 1,38 (c=1,38) y el resto es 0,06 (r=0,06). Por tanto, d*c+r=1,3*1,38+0,06=1,854. Pero el dividendo era 1,8, y 1,854≠1,8. El resto de la división original es 0,006. Y la razón es que, al haber multiplicado por diez el dividendo para convertir la división original en una equivalente, como el resto es parte del dividendo, para hallar el resto de la división original tenemos que deshacer el cambio realizado, esto es, dividir el resto que hayamos obtenido en la división equivalente por diez.

3. Posible incidencia en el aprendizaje

Emile Borel, intentando aproximarse a una definición de la matemática, afirma lo siguiente:

> La matemática aparece, de manera cada vez más clara, como la ciencia que estudia las relaciones entre ciertos entes abstractos definidos de manera arbitraria, con la única condición de que estas definiciones no conduzcan a una contradicción (Borel, 1962, p. 25).

Partiendo de esta definición, tendremos un error matemático en un libro de texto, cuando encontremos en la exposición de contenidos un enunciado que esté en contradicción con lo que afirma o niega la matemática, o bien conduzca a contradicción con lo que afirma o niega la matemática.

Ahora bien, ¿qué sucede si lo que tenemos es un enunciado de un ejercicio propuesto?, ¿Podemos hablar de error matemático?

Arce Carrasco aborda el tema del error del siguiente modo:

> Localizado el campo donde puede surgir el error en todo el campo del conocimiento, hay que referirlo (…) entre dos enfoques angulares que se complementan. Uno es el de la panorámica presentada en relación con la falsedad; otro, quizá el definitorio, es el de la conciencia que acepta esa falsedad, presentada como verdadera (Arce Carrasco, 1971, p. 90).

En otras palabras: hay un error si se afirma o niega como verdadero algo que es falso. En nuestro caso, en el del análisis de un enunciado de un ejercicio propuesto en el libro del alumno, será la guía didáctica la que nos indique qué se esperaba por respuesta al enunciado. Es decir, que si se formula una pregunta u orden con la intención de que la respuesta sea una respuesta determinada (y es la guía didáctica quien nos da la respuesta), en el caso de que la respuesta a la pregunta u orden sea distinta a la que aparece en la guía didáctica, diremos que el enunciado es erróneo.

De este modo, podemos considerar que los ejemplos que hemos incluido en el apartado anterior son errores matemáticos. Pero, ¿qué incidencia puede tener esto en el aprendizaje del niño?

Estudiando el error en el sujeto que aprende, Fernández Bravo (2011: 185) afirma que "*cometemos error científico ante una pregunta, cuando hay discrepancia entre: lo que la ciencia espera por respuesta y, la respuesta que nosotros damos*". Así, podríamos afirmar que un sujeto comete un error matemático cuando, ante una pregunta, existe discrepancia entre la respuesta que da el sujeto y lo que la matemática espera por respuesta.

En cuanto al error de razonamiento, o error lógico, "*se dirá que el sujeto comete error lógico, cuando el razonamiento que utilice sea incorrecto. Es decir, cuando haya desigualdad entre lo que la lógica espera por respuesta o conclusión y, lo que el sujeto expresa por respuesta o conclusión*" (p. 190).

Según si la respuesta es un acierto o un error matemático, y si se ha llegado a ella a través de un razonamiento correcto o incorrecto, podremos tener cuatro situaciones distintas (Fernández Bravo, 2011: 194-197):

> ***Caso 1:*** *Situación que se da cuando el sujeto comete error científico y error lógico.*

La respuesta del sujeto no coincide ni con lo que la ciencia espera, ni con el razonamiento de la lógica. Son situaciones en las que se puede explicar el error científico, principalmente por el error lógico. Las causas de estos errores suelen ser internas al sujeto.

Caso 2: *Situación que se da cuando el sujeto no comete error científico y sí comete error lógico.*

La respuesta del sujeto coincide con lo que la ciencia espera, pero el razonamiento inferido a partir de la condicional utilizada es incorrecto y no coincide con el razonamiento de la lógica. Son situaciones en las que se puede explicar el acierto científico, por diversas razones, entre las que principalmente se pueden citar: el azar y la casualidad, el sujeto ha copiado sin enterarse del por qué de la respuesta, otras personas distintas al sujeto le han dicho la respuesta. Las causas de estos errores suelen ser internas al sujeto.

Caso 3: *Situación que se da cuando se consigue un acierto científico y se razona correctamente; no se comete error científico y no se comete error lógico.*

La respuesta del sujeto coincide con lo que la ciencia espera, y el razonamiento del sujeto coincide con el razonamiento de la lógica. Son situaciones en las que se puede explicar el acierto científico, principalmente por el acierto lógico.

Caso 4: *Situación que se da cuando se comete error científico y no se comete error lógico.*

La respuesta del sujeto no coincide con lo que la ciencia espera, pero el razonamiento inferido a partir de la condicional utilizada es correcto y coincide con el razonamiento de la lógica. Son situaciones en las que se puede explicar el error científico porque es falso el contenido de las condicionales que se utilizan para el razonamiento lógico. Las causas de estos errores suelen ser internas y externas al sujeto. En la mayoría de los casos son externas y se deben a la enseñanza de: contenidos científicamente inciertos, hábitos incorrectos y falsas inducciones.

Estudiando estos cuatro casos, el mismo autor afirma que "*son muchos los alumnos que pueden responder incorrectamente a una pregunta, razonando perfectamente*" (p. 182). Ahora bien, en vista de los errores encontrados en los libros de texto, ¿es posible que estos errores incidan en el bajo rendimiento en Matemáticas de muchos de nuestros alumnos?

4. Conclusión

No siempre los conocimientos que transmiten los libros de texto se corresponden con lo que la ciencia afirma. Centrándonos en el campo de la matemática, vemos que hay autores que han demostrado la existencia de un error matemático en algún libro de texto (Ball, 1984; Gastwirth, 1975; González-Gascón, 1979; Hochberg y Tamhane, 1983; Kolmogorov, 1946; McCallum, 1973; Neumann, 1950; Routley, 1979; Sedov, 1975), los hay que han establecido una clasificación de errores encontrados en libros de texto (Brewer, 1986; Muntean, 2011); otros han manifestado el hecho de haberse encontrado con errores en el transcurso de su investigación (Gairín Sallán y Escolano Vizcarra, 2009; Oliver et al., 2003; Ortiz de Haro, 2002); y, por último, hay quien se ha detenido a analizar un tipo de error en concreto (Beyer y Walter, 2010).

Esta circunstancia ha llevado a algunos gobiernos e instituciones a comprender la necesidad de velar para que los alumnos reciban una enseñanza conforme a lo que la ciencia dicta. Es el caso del Estado de Texas (EE.UU.), donde su Agencia de Educación (2008) cuenta con un amplio programa de revisión de libros y de detección de errores en libros de texto. Asimismo, la Asociación Americana para el Avance de la Ciencia (2012), editora de la revista Science, desarrolla un proyecto de supervisión de libros de texto publicados en EE.UU. sobre materias científicas, entre ellas las Matemáticas.

En España, hasta 1998 estuvo vigente la disposición quinta de la Ley 14/1970, de 4 de agosto, General de Educación y de Financiamiento de la Reforma Educativa, que obligaba a una supervisión de los libros de texto por parte del Estado previa a su edición. Sin embargo, dicha disposición quinta quedó derogada por el Real Decreto 1744/1998, de 31 de julio, sobre uso y supervisión de libros de texto y demás material curricular correspondientes a las enseñanzas de Régimen General, lo que significa que, actualmente, los libros de texto llegan a los alumnos sin que ningún órgano competente verifique previamente que cumplen unos requisitos mínimos.

Según los informes de las pruebas internacionales de matemáticas a las que se han presentado los alumnos españoles (López Varona y Moreno Martínez, 1997; Ministerio de Educación, 2010; Ministerio de Educación y Ciencia, 2004, 2007; Ministerio de Educación y Política Social y Deporte, 2005), el rendimiento de nuestros estudiantes está en todos los casos por debajo de la media de los países participantes. Esto pone de manifiesto el bajo rendimiento de nuestros alumnos en esta materia.

Como indica el Informe Cockcroft (1985: 114), los libros de texto "*constituyen una ayuda inestimable para el profesor en el trabajo diario del aula*". Además, tal y como hemos visto, su uso está sumamente extendido en las aulas de Educación Primaria. Sin embargo, después de analizar libros de texto de las cuatro editoriales que, según nuestros datos, son utilizadas en 6.º de Educación Primaria, en un 90% de centros de la Comunidad de Madrid, vemos que contienen errores. Y nos preguntamos si ésta puede ser una causa de ese bajo rendimiento de nuestros alumnos en Matemáticas.

Son muchas las investigaciones realizadas sobre cómo enseñar matemáticas, pero quizá una de las tareas más urgentes sea investigar qué se está enseñando.

La pregunta fundamental no es ¿cuánto de bien estudia el niño el libro que tiene?, sino ¿cuánto de bien le hace al niño el libro que estudia?

En vista de los resultados, se hace necesario realizar un estudio serio de lo que se les está transmitiendo a nuestros alumnos a través de los libros de texto. Una investigación que nos lleve a identificar errores matemáticos en los libros de texto, describir dichos errores, clasificarlos, ver qué relación existe entre los distintos tipos de error encontrados, comprobar qué bloques de contenido están más afectados por cada uno de los tipos de error, estudiar en qué medida dichos errores repercuten en el aprendizaje de los alumnos.

Bibliografía

American Association for the Advancement of Science. (2012). Project 2061: Tools: Middle Grades Mathematics Textbooks: A Benchmarks-Based Evaluation.

Arce Carrascoso, J.L. (1971). Acercamiento a la problemática del error. *Logos: Anales del Seminario de Metafísica*, *6*, 85-110.

Ball, B.J. (1984). Arcwise connectedness and the persistence of errors. *Amer.Math. Monthly*, *91*(7), 431–433.

Beyer, K., y Walter, O. (2010). *El conocimiento matemático, la transposición didáctica y los "problemas vestidos"*. Comunicación presentada en XII Jornadas de Investigación Educativa y III Congreso Internacional.

Borel, E. (1962). La definición en matemáticas. En F.L. Lionnais (Ed.), *Las grandes corrientes del pensamiento matemático* (pp. 25-35). Buenos Aires: EUDBA.

Bouvier, A., y George, M. (2005). *Diccionario Akal de Matemáticas*. Madrid: Akal.

Brewer, J.K. (1986). Behavioral statistics textbooks: Source of myths and misconceptions? En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 127-131): University of Victoria.

Cabero, Duarte y Barroso (1989). La formación del profesorado en nuevas tecnologías: retos hacia el futuro. En J. Ferrés y P. Marqués (Coords.): *Comunicación educativa y nuevas tecnologías*. Barcelona: Praxis

Clapham, C. (1998). *Diccionario Oxford de Matemáticas*. Madrid: Editorial Complutense.

Cockcroft, W.H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Consejería de Educación y Empleo de la Comunidad de Madrid. (2011). *Consulta de Centros y Servicios Educativos de Curso Actual*. Consultado el 25 de marzo de 2011, en http://gestiona.madrid.org/catcent/servlet/Servidor.

Federación de Gremios de Editores de España. (2010). *Comercio Interior del Libro en España 2009*. Madrid: Federación de Gremios de Editores de España.

Federación de Gremios de Editores de España. (2011). *Comercio Interior del Libro en España 2010*. Madrid: Federación de Gremios de Editores de España.

Federación de Gremios de Editores de España. (2012). *Comercio Interior del Libro en España 2011. Avance de resultados*. Madrid: Federación de Gremios de Editores de España.

Fernández Bravo, J.A. (2011). La inestabilidad de la normalidad del error en la actividad escolar. ¿Cuánto de error tienen los errores que cometen los alumnos? *Educación y Futuro*, 181-203.

Feynman, R.P. (1987). *¿Está Ud. de broma, Sr. Feynman?* Madrid: Alianza Editorial S. A.

Gairín Sallán, J.M., y Escolano Vizcarra, R. (2009). Proporcionalidad aritmética: buscando alternativas a la enseñanza tradicional. *Suma*, *62*, 35-48.

García Mateos, A. y Caballero, P.A. (2005). La tecnología digital en el aula: un instrumento al servicio de los procesos de enseñanza-aprendizaje. *Diploma de Estudios Avanzados*. Madrid: Universidad Camilo José Cela.

Gastwirth, J.L. (1975). The estimation of a family of measures of economic inequality. *J. Econometrics*, *3*(1), 61–70.

González-Gascón, F. (1979). Note on the ignorable coordinates of the analytical dynamics. *Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A*, *113*, 130–137.

Hochberg, Y., y Tamhane, A.C. (1983). Multiple comparisons in a mixed model. *Amer. Statist.*, *37*(4), 305–307.

Instituto de Evaluación del Ministerio de Educación. (2009). *Sistema estatal de indicadores de la educación*. Madrid: Catálogo de Publicaciones del Ministerio: educación.es.

Kolmogorov, A.N. (1946). On the proof of the method of least squares. *Uspehi Matem. Nauk (N. S.)*, 57–70.

Ley 14/1970, de 4 de agosto, General de Educación y de Financiamiento de la Reforma Educativa. BOE, n.º 187, de 6 de agosto, pp. 12525-12546.

López Varona, J.A., y Moreno Martínez, M.L. (1997). Ministerio de Educación y Cultura. Consultado el 3 de enero de 2012, en http://www.educacion.gob.es/dctm/ievaluacion/internacional/timssmat.pdf?documentId=0901e72b80110725

McCallum, B.T. (1973). A note concerning asymptotic covariance expressions. *Econometrica*, *41*, 581–583.

Ministerio de Educación (2010). PISA 2009. Informe Español. Consultado el 3 de enero de 2012, en http://www.educacion.gob.es/dctm/ministerio/horizontales/prensa/notas/2010/20101207-pisa2009-informe-espanol.pdf?documentId=0901e72b806ea35a

Ministerio de Educación y Ciencia (2004). Evaluación PISA 2003. Consultado el 3 de enero de 2012, en http://www.educacion.gob.es/dctm/ievaluacion/internacional/pisa2003resumenespana.pdf?documentId=0901e72b80110700

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). PISA 2006. Informe Español. Consultado el 3 de enero de 2012, en http://www.mec.es/multimedia/00005713.pdf

Ministerio de Educación y Política Social y Deporte (2005). Resultados en España del estudio PISA 2000. Consultado el 3 de enero de 2012, en http://www.educacion.gob.es/dctm/ievaluacion/internacional/pisa2000infnacional.pdf?documentId=0901e72b8011069b

Muntean, A. (2011). Sobre algunos errores en libros de texto de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato. *Boletín (Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas), 87*, 30-53.

Neumann, C. (1950). Ein Kapitel aus der Vorlesung von Franz Neumann übermechanische Wärmetheorie. Königsberg 1854–55. *Abh. Bayer. Akad. Wiss.Math.-Nat. Kl. (N.F.)*(59), 27.

Noda Herrera, M.A. (2000). *Aspectos epistemológicos y cognitivos de la resolución de problemas de matemáticas, bien y mal definidos. Un estudio con alumnos del primer ciclo de la ESO y maestros en formación.* Tesis doctoral no publicada, La Laguna: Universidad de La Laguna.

Oliver, M.I., Rocerau, M.C., Valdez, G., Vilanova, S., Medina, P., Astiz, M., et al. (2003). Análisis del tratamiento de algunos temas de geometría en textos escolares para el tercer ciclo de Educación General Básica. *Revista Iberoamericana de Educación, 31*(abril), 1-8.

Ortiz de Haro, J.J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Granada: Universidad de Granada.

Real Decreto 1744/1998, de 31 de julio, *sobre uso y supervisión de libros de texto y demás material curricular correspondientes a las enseñanzas de Régimen General*. BOE n.º 212, pp. 30005-30007.

Routley, R. (1979). Repairing proofs of Arrow's general impossibility theorem and enlarging the scope of the theorem. *Notre Dame J. Formal Logic, 20*(4), 879–890.

Sedov, L.I. (1975). *Theoretical constructions of selection of actual events from the virtual ones.* Comunicación presentada en Joint Sympos., IUTAM/IMU, Marseille.

Simon, H.A. (1973). The structure of ill structured problems. *Artificial Intelligence, 4*(3-4), 181-201.

Texas Education Agency. (2008). Inventory of Known Textbook Errors. Consultado el 16 de junio de 2011, en http://ritter.tea.state.tx.us/textbooks/errorreportingchart.pdf

Pilar Fernández Palop. Profesora de la Escuela Universitaria Cardenal Cisneros (UAH). Licenciada en Matemáticas (especialidad Estadística) por la Universidad de Sevilla. Ha desarrollado su labor docente tanto en el ámbito de la formación profesional, como en centros de Educación Secundaria. En la actualidad está realizando la tesis doctoral en la UCJC sobre errores matemáticos en libros de texto.

Presentación A. Caballero García. Directora del Instituto de Enseñanza y Aprendizaje y Directora de posgrados y profesora de la Facultad de Ciencias Sociales y de la Educación de la Universidad Camilo José Cela de Madrid. Doctora en Filosofía y Ciencias de la Educación (Pedagogía) (1996) y Premio Extraordinario de doctorado (1997) por la Universidad de Murcia. Veinticinco años de experiencia docente y labor investigadora. Métodos de estudio, prensa como recurso didáctico, ansiedad evaluativa y rendimiento, nuevas tecnologías en el aula, personalidad antisocial como sujeto de alto riesgo, convergencia europea en las Titulaciones de Educación (metodologías alternativas), trabajo colaborativo y aprendizaje social y emocional.

José Antonio Fernández Bravo. Director de la Cátedra Conchita Sánchez de Investigación para la Educación Matemática, de la Universidad Camilo José Cela (UCJC). Profesor del Centro de Enseñanza Superior "Don Bosco", Universidad Complutense de Madrid (UCM). Autor de 76 obras de Educación y dirigidas al aprendizaje de la Matemática: cuentos, teatro, juegos, artículos y libros. Premio de "Metodología Creativa" Instituto Europeo de las Creatividades (Reggio Emilia. Italia, 2009), por el libro: "La resolución de problemas matemáticos. Razonamiento y creatividad en la mente de los niños" (2010).