

## Disco Solar Didáctico

Álvaro Martín González

---

### Resumen

Se trata de un trabajo, cuya finalidad es explicar, de forma gráfica y sencilla, suponiendo fija la Tierra, el movimiento del Sol alrededor de ella, analizando cómo influye ese movimiento en la sucesión de las estaciones y también en la variación de la duración del día y la noche, a lo largo del año y en las diferentes latitudes de la Tierra. En este artículo no se tiene en cuenta la oblicuidad de la eclíptica que implica cambios en la velocidad de traslación de la Tierra y, por lo tanto, pequeñas diferencias a lo largo del año, entre cada dos pasos sucesivos del sol por el meridiano de un lugar, es decir, en la duración del día. Se considera, en consecuencia, en todo momento, el tiempo solar medio. La finalidad es disponer de un recurso cómodo con el que se pueda ayudar a comprender a cualquier observador, las variaciones indicadas, a lo largo del año.

### Palabras clave

Polos Celestes, Ecuador Celeste, Meridiano del lugar, horizonte, cénit, sol de medianoche, orto, ocaso, latitud.

---

### Abstract

The purpose of this study is to explain in a simple and graphic manner the movement of the sun around the Earth, supposing the latter to be static, analyzing how this movement influences the succession of the seasons and the variation in duration of day and night, throughout the year and in the different latitudes of the Earth. In this article it is not taken into account the obliquity of the ecliptic which implies changes in the translational velocity of the Earth and, therefore, small differences over the year between every two successive passes of the sun over the meridian of a place, that is, the duration of the day. Therefore, in consequence, the mean solar time is always taken into consideration. The objective is to provide observers with a useful resource with which to help understand the indicated variations throughout the year.

### Keywords

Celestial Poles, Celestial Equator, meridian of a place, horizon, zenith, midnight sun, sunrise, sunset, latitude.

---

## 1. ¿Qué es el Disco Solar Didáctico?

El “disco solar didáctico” consiste en un dispositivo formado por dos discos concéntricos giratorios, que nos permite, entre otras cosas, determinar la duración del día y de la noche en diferentes épocas del año, en cualquier latitud, y también del desplazamiento que va sufriendo el lugar de salida o puesta del sol a lo largo del año.

Además nos facilita la comprensión de cuándo y por qué tienen lugar los equinoccios y los solsticios, en qué lugares y cuándo pasa el sol por el cénit, cuándo cae verticalmente sobre la Tierra, la sucesión de las estaciones - viendo la diferente inclinación de los rayos solares a lo largo del año - el por qué del “sol de medianoche”, la larga noche polar, etc.



Considero que *El disco Solar Didáctico* puede ser de utilidad para los alumnos de segundo curso de bachillerato, para alumnos de primer curso de algunas carreras universitarias y, en general, para cualquier persona que esté interesada en estas cuestiones.

En él se representan las proyecciones de la trayectoria solar en diferentes días del año. Se ha representado sólo una proyección por mes, para simplificar los dibujos y que haya una mayor facilidad de interpretación, aunque nada impide que se puedan representar más trayectorias, por ejemplo una por semana.

Se han elegido las fechas correspondientes al día 21 de cada mes. Para otras fechas puede hacerse una interpolación aproximada.

No se trata de obtener una gran precisión en las lecturas, aunque sí se persigue facilitar la comprensión, aunque manteniendo el rigor.

## 2. Introducción

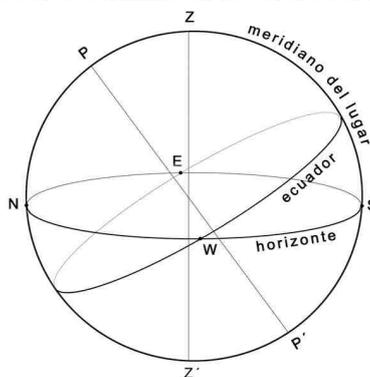
Si nos encontramos en una extensa llanura, o bien en altamar, percibimos el horizonte como una circunferencia, en cuyo centro nos encontramos. Levantando la vista percibimos el cielo como una bóveda semiesférica limitada por el **horizonte**.

La esfera correspondiente cuyo centro es el observador, recibe el nombre de *esfera celeste* y su radio, indeterminado, se considera lo suficientemente grande para que, frente a él, sea despreciable el radio de la Tierra. Para describir el movimiento aparente de los astros alrededor de la Tierra, los supondremos proyectados sobre la superficie de esta esfera, de la que percibimos la mitad que está por encima de nuestro horizonte.

La prolongación del eje de la Tierra corta a la esfera celeste en dos puntos, P y P', a los que se denomina **Polos Celestes**. El plano que contiene al ecuador terrestre corta a la esfera celeste según una circunferencia máxima que constituye el **Ecuador Celeste**. La vertical en un punto de la Tierra corta a la esfera celeste en dos puntos: el **cénit** (Z) en el hemisferio norte y el **nadir** (Z') en el hemisferio sur, figura 1.

En cualquier lugar de la Tierra el plano horizontal -perpendicular a la vertical- determina en la esfera celeste una circunferencia que constituye el **horizonte del lugar**.

El plano que contiene al eje PP' y al cenit determina el **meridiano del lugar**. La intersección del meridiano con el horizonte fija los puntos cardinales **norte** (N) y **sur** (S). En forma análoga, la intersección del horizonte y el ecuador determina en la esfera celeste los puntos **este** (E) y **oeste** (W).



**Figura 1**

El ángulo que forma el horizonte con el ecuador es el mismo que el que forma la vertical del lugar (perpendicular al horizonte) con el eje polar (perpendicular al ecuador). Este ángulo varía con la latitud.

La latitud de un lugar,  $\lambda$ , es precisamente el complementario de ese ángulo e indica, por lo tanto, la altura del polo sobre el horizonte, como se observa en la figura 2.

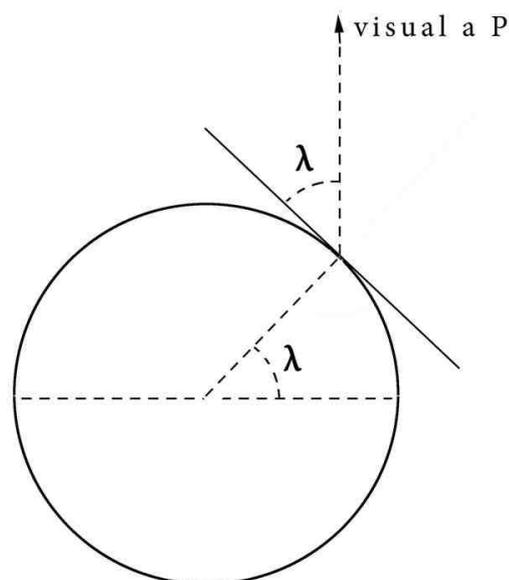


Figura 2

### 3. Movimiento aparente del Sol

El Sol, en su movimiento aparente alrededor de la Tierra, recorre una circunferencia diferente cada día. El 21 de marzo se mueve sobre el ecuador celeste - trayectoria **a** en la figura 3 - Los días sucesivos recorre trayectorias paralelas con declinación creciente hasta el 21 de junio en que recorre la trayectoria **b** correspondiente a una declinación de  $23^{\circ} 27'$ . Es el día del solsticio de verano en el hemisferio norte.

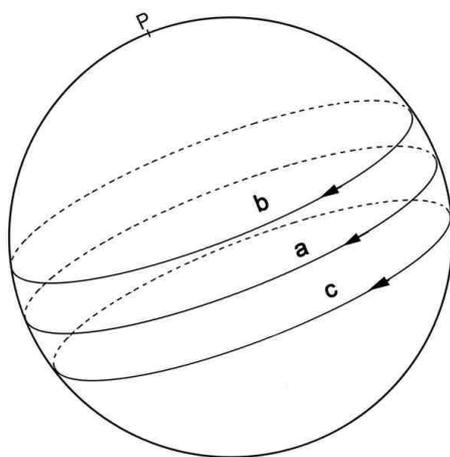


Figura 3

A partir de esa fecha su recorrido comienza a desplazarse hacia el sur, proyectándose de nuevo sobre el ecuador el 22 (ó 23) de septiembre para seguir hacia el sur hasta el 22 de diciembre - solsticio de invierno -, fecha en la que recorre la trayectoria **c** con declinación  $- 23^{\circ} 27'$ .

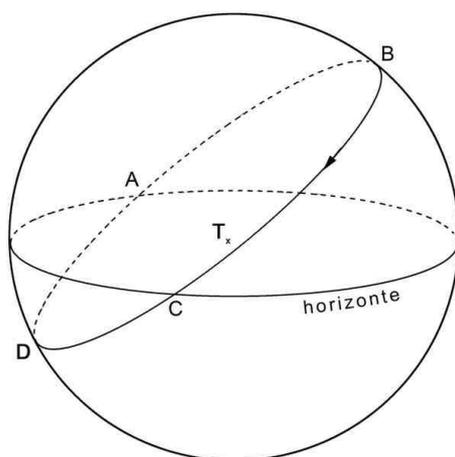
El sentido de giro en el movimiento aparente que estamos considerando, es el de las agujas del reloj - sentido retrógrado - para un observador situado en P.

En la figura 4 se representa la trayectoria del sol un día cualquiera del año, y el horizonte de un lugar dado de la Tierra, en el hemisferio norte.

Observando la figura vemos que el hemisferio superior es el visible para el observador situado en T. Por tanto el sol sale por A, alcanza su máxima altura de ese día en B, sobre el meridiano del lugar - a las 12 horas - y se pone en C. El arco CDA corresponde a la noche.

En primavera y verano el punto A se encuentra desplazado hacia el norte, y en otoño e invierno hacia el sur. El 21 de marzo y el 23 de septiembre coincide justamente con el este.





**Figura 4**

En las figuras 5 a 16 se indica la trayectoria que vería un observador situado en diferentes latitudes particulares: las correspondientes al ecuador (5,6,7), al trópico (8,9,10), al círculo polar (11,12,13) y al polo norte 14,15,16).

En todas ellas se representa el horizonte y se indica la trayectoria del sol un día del año, en junio, en marzo o septiembre y en diciembre.

Las tres primeras corresponden a la trayectoria solar que vería un observador situado en el ecuador, (latitud  $0^\circ$ ).

Las tres siguientes a la que vería un observador situado en el Trópico de Cáncer, (latitud  $23^\circ 27' N$ ).

A continuación se representa la situación correspondiente a un observador situado en el Círculo Polar Ártico (latitud  $66^\circ 33' N$ ) y, finalmente las tres últimas corresponden a las trayectorias que vería un observador situado en el Polo Norte (latitud  $90^\circ$ ), para el que el horizonte coincide con el ecuador.

Las figuras 17 a 28 representan la proyección de las anteriores sobre el plano del meridiano del lugar. Mediante ellas se simplifica la representación de los casos considerados, proporcionando información inmediata sobre cómo varía la duración del día y de la noche a lo largo del año en cualquier latitud.

Todas las figuras son válidas también para el hemisferio sur, teniendo en cuenta que desde él es visible la semiesfera que contiene P' en lugar de la que contiene P.

junio

marzo-septiembre

diciembre

0°

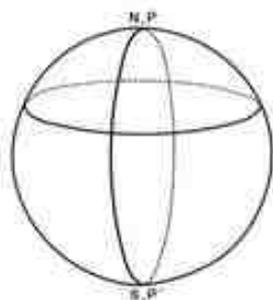


Figura 5

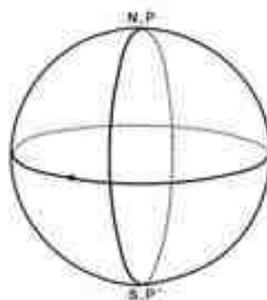


Figura 6

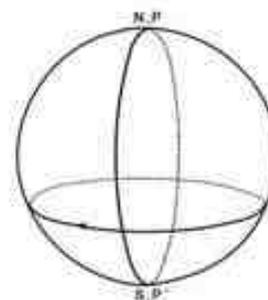


Figura 7

23°27'

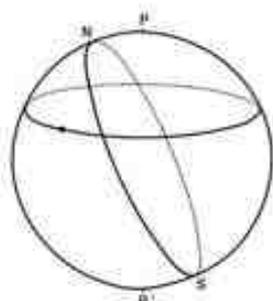


Figura 8

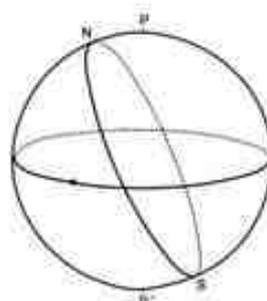


Figura 9

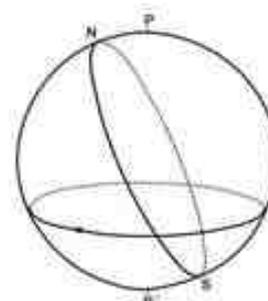


Figura 10

66°33'

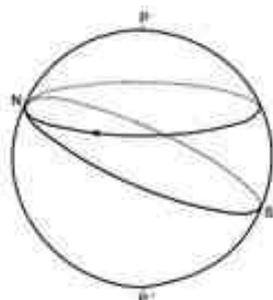


Figura 11

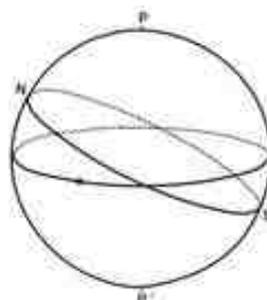


Figura 12

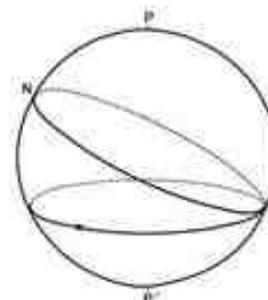


Figura 13

90°

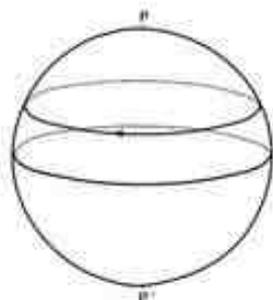


Figura 14

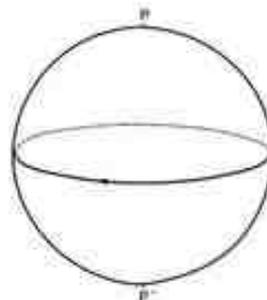


Figura 15

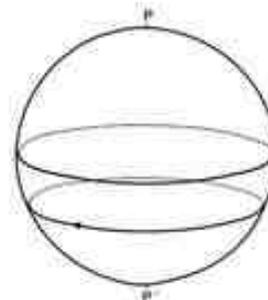


Figura 16



junio

marzo-septiembre

diciembre

0°

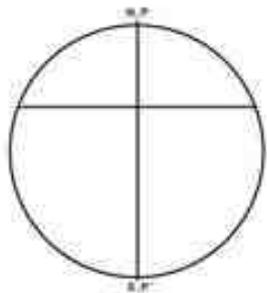


Figura 17

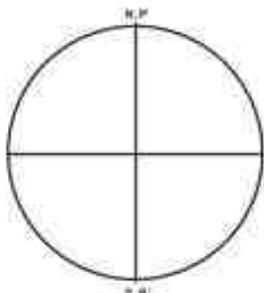


Figura 18

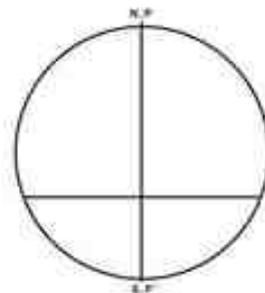


Figura 19

23°27'

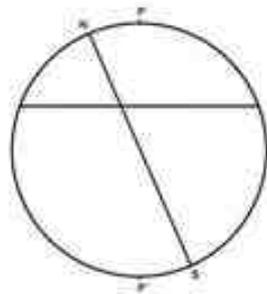


Figura 20

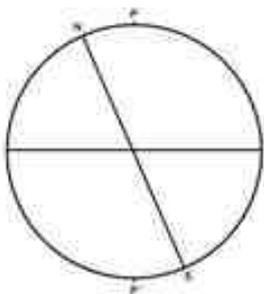


Figura 21

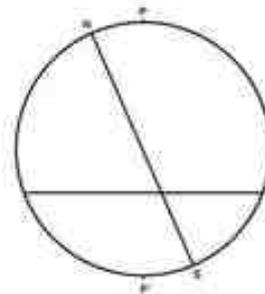


Figura 22

66°33'

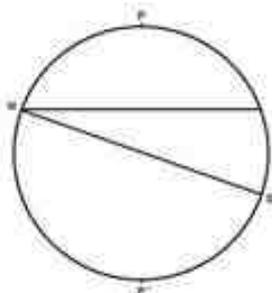


Figura 23

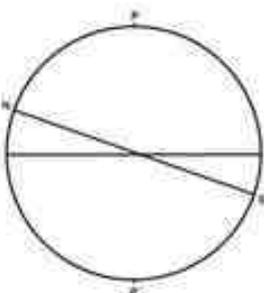


Figura 24

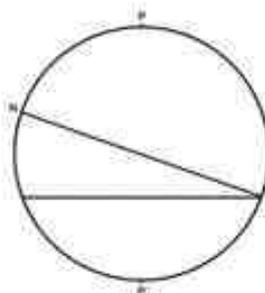


Figura 25

90°

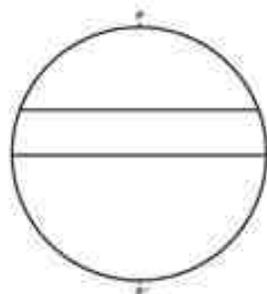


Figura 26

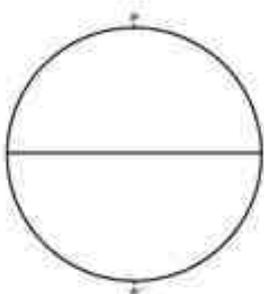


Figura 27

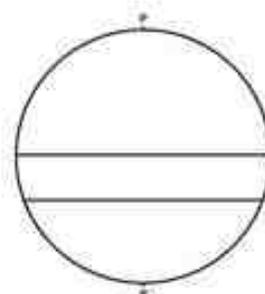


Figura 28

#### 4. Descripción y aplicaciones del Disco Solar Didáctico

El dispositivo consiste en dos discos concéntricos, que pueden girar uno sobre otro. El plano de los discos corresponde al del meridiano del lugar. En el disco inferior (Disco A) señalamos los polos celestes P y P', las líneas que representan las proyecciones de las trayectorias solares en diferentes días del año, así como una escala periférica en grados que varía desde 0 hasta 90°, desde cada uno de los polos hacia el ecuador.

Sobre cada una de las líneas aludidas se indica el mes en el que el sol se proyecta sobre ella. Se señala también la hora solar de hora en hora.

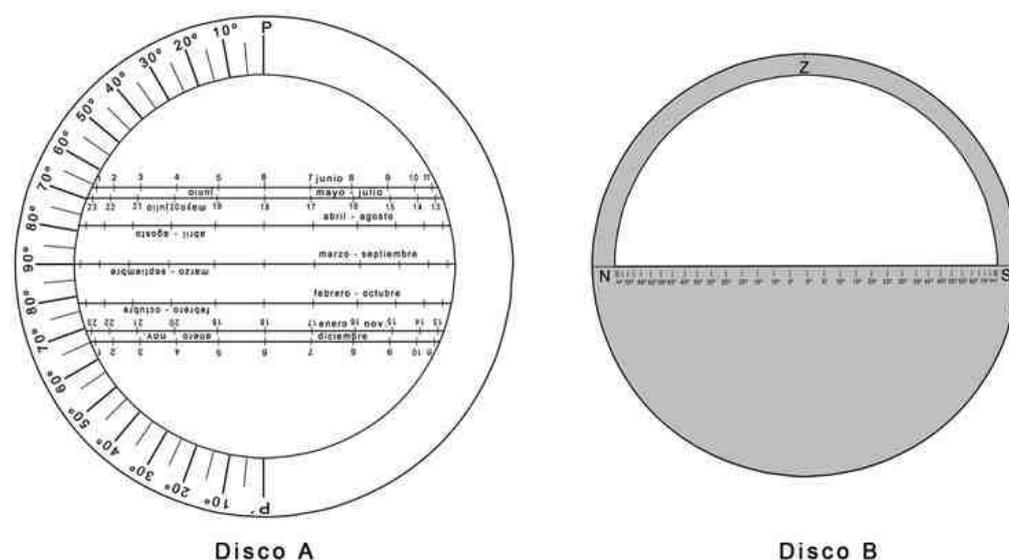


Figura 29

En el disco superior, de menor radio, se ha hecho un recorte, cuya parte recta representa la intersección del meridiano con el horizonte, es decir la línea norte-sur. En ella se han señalado los puntos N y S.

Al situar N o S sobre cualquier valor de la escala, queda visible la parte de la esfera que vería un observador en la latitud correspondiente a ese valor, puesto que, como hemos visto, la altura del polo sobre el horizonte, coincide con la latitud del lugar.

Para puntos con latitud norte situamos N sobre la escala que parte de P. Para puntos con latitud sur llevamos S sobre la escala que parte de P'. En este últimos caso es visible Z' en lugar de Z. Por ello la parte de las trayectorias solares visibles a través del disco corresponde al día, permaneciendo oculta la correspondiente a la noche.

En la figura 29 se representan ambos discos por separado y, en la 30, ya acoplados.

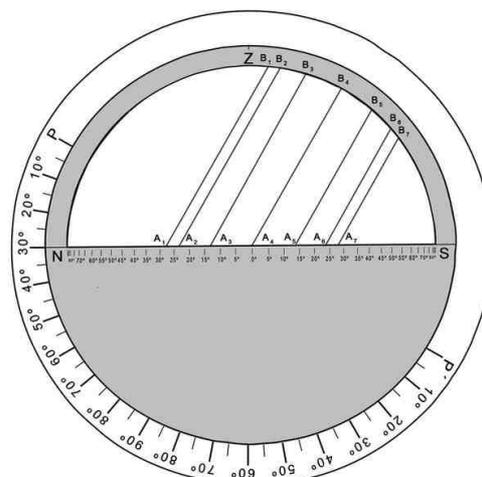
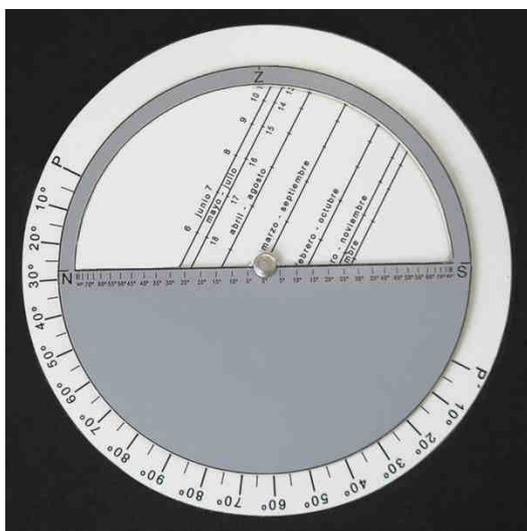


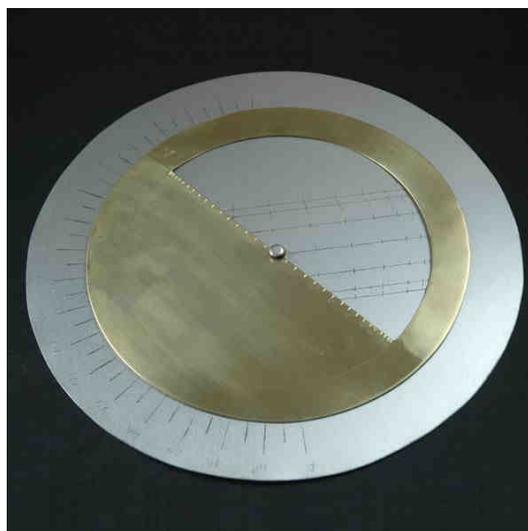
Figura 30 a



A continuación se representa una fotografía de un disco materializado en cartón (figura 30 b), y otra de uno metálico (figura 30 c).



**Figura 30 b**



**Figura 30 c**

Con este dispositivo podemos determinar fácilmente, en forma aproximada:

1º.- La duración del día y de la noche cualquier día del año y en cualquier latitud. La duración del día la indican los segmentos  $A_iB_i$  de la figura 30. Leemos también la hora en que sale y se pone el Sol.

2º.- La relación entre la duración del día más largo y el más corto del año en cualquier latitud; es la relación  $A_1B_1/A_7B_7$ .

3º.- La declinación del sol cualquier día del año, midiendo el ángulo  $B_4A_4B_i$ .

4º.- La magnitud del desplazamiento del sol hacia el norte en primavera y verano y hacia el sur en otoño e invierno.

También podemos observar que:

5º.- En cualquier punto de la Tierra, el 21 de marzo y el 22 (ó 23) de septiembre la duración del día es igual a la de la noche. Son los equinoccios de primavera y otoño respectivamente. Basta observar en el disco que el horizonte de cualquier lugar corta a la trayectoria solar de esas fechas en el punto medio de la proyección correspondiente.

6º.- En el ecuador - latitud  $0^\circ$  - la duración del día es igual a la de la noche, cualquier día del año. En la figura 31 se observa que, en este caso, el horizonte corta a las trayectorias por la mitad.

7º.- En el ecuador los rayos del sol caen verticalmente el 21 de marzo y el 22 de septiembre. En esas fechas, a mediodía, el sol se encuentra en el cénit.

8º.- Los días son más largos que las noches en primavera y verano en el hemisferio norte. En la figura 30 se observa que la parte visible de las líneas a la izquierda de  $A_4B_4$  es mayor que la oculta.

9º.- La duración del día aumenta al aumentar la latitud en primavera y verano y disminuye en otoño e invierno. Al situar la indicación "N" en la posición correspondiente a una latitud mayor que la de la figura 30, aumentarían los segmentos  $A_iB_i$ , al norte de  $A_4B_4$  y disminuirían los que están al sur.

10º.- La duración del día aumenta entre el 22 de diciembre y el 21 de junio en el hemisferio norte, siendo aquel el día más corto y éste el más largo del año.

11º.- El 21 de junio alcanza el sol sobre la eclíptica el punto más alejado del ecuador, por encima de él. El 22 de diciembre sucede lo mismo por debajo del ecuador. Son los solsticios de verano e invierno en el hemisferio norte, produciéndose en ellos la máxima diferencia entre el día y la noche.

12º.- Podemos determinar el desplazamiento angular hacia el norte o hacia el sur del punto del horizonte por el que sale el sol (orto) o se pone (ocaso), con respecto al Este, o al Oeste, respectivamente, leyendo en la escala en grados, a lo largo de la línea NS, del disco giratorio B.

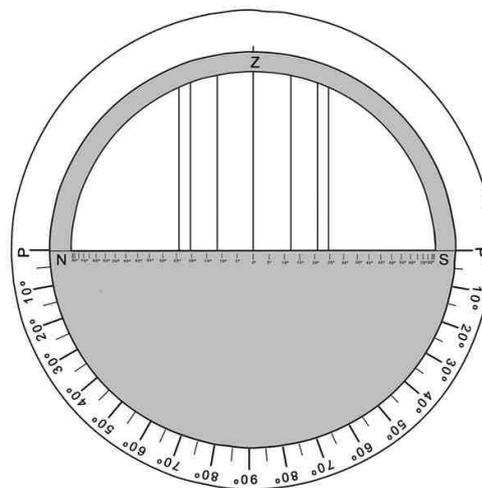


Figura 31

13º.- En los puntos con latitud  $23^\circ 27' N$ , es decir, en el Trópico de Cáncer, el sol cae verticalmente sobre la Tierra el 21 de junio. Basta observar que el punto B se encuentre sobre la vertical. Figura 32.

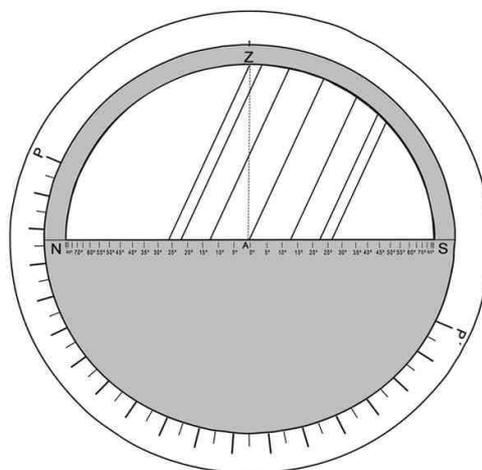


Figura 32

14º.- En los lugares de latitud  $66^\circ 33' N$ , puntos situados sobre el círculo polar ártico, el día 21 de junio, el sol se mantiene todo el tiempo por encima del horizonte, y por tanto no se pone. El día dura pues, 24 horas. Es el **sol de medianoche**: el sol pasa rasante al horizonte, en el Norte, a medianoche.



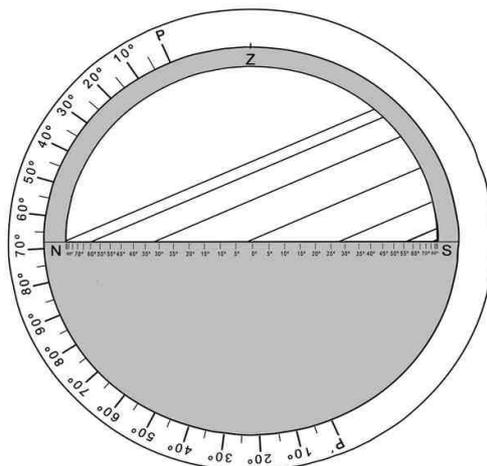


Figura 33

El 22 de diciembre toca el horizonte en el Sur pero no llega a salir. Está las 24 horas debajo del horizonte. Figura 33.

15°.- En el Polo Norte - latitud  $90^\circ$  - el sol se mantiene por encima del horizonte desde el 21 de marzo hasta el 23 de septiembre, por lo que la duración del día es de seis meses en el hemisferio correspondiente. Figura 34.

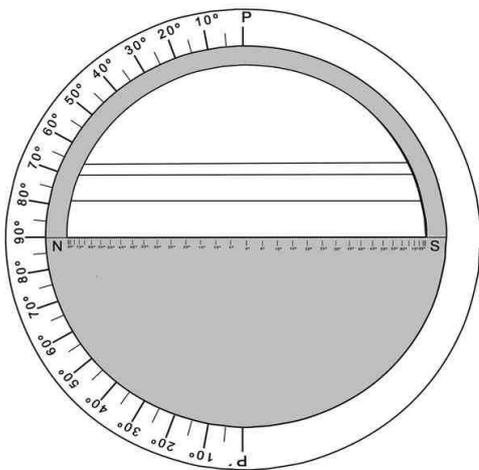


Figura 34

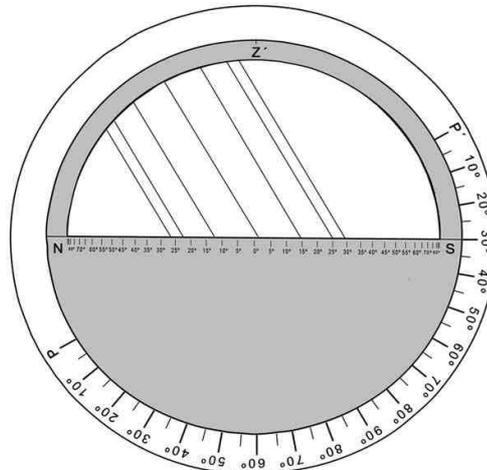


Figura 35

Análogamente, para puntos del hemisferio sur se observa fundamentalmente lo siguiente :

16°.- Entre el 23 de septiembre y el 22 de diciembre aumenta la duración del día y disminuye la de la noche, correspondiendo a esta última fecha el día más largo del año. Ver figura 35.

17°.- En la latitud  $23^\circ 27' S$ , correspondiente al Trópico de Capricornio, el sol cae verticalmente sobre la Tierra el 22 de diciembre. Es el comienzo del verano en ese hemisferio. Ver figura 36

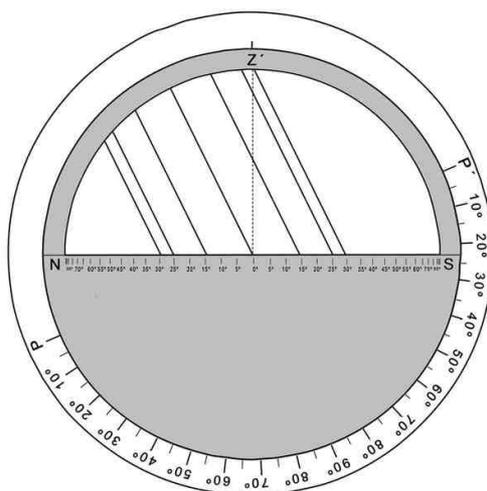


Figura 36

18°.- En el Círculo polar Antártico, con latitud  $66^{\circ}33'$  S, el sol no se pone el 22 de diciembre. Pasa rasante al horizonte en el Sur. Es el solsticio (de verano en el hemisferio Sur) y el día dura 24 horas. El 21 de junio toca el horizonte en el Norte pero sin llegar a salir. Permanece bajo el horizonte durante las 24 horas. Ver figura 37.

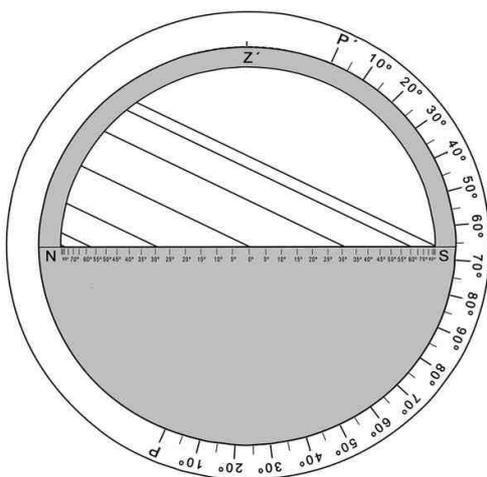


Figura 37

19.- En el Polo Sur - latitud  $90^{\circ}$  S - el sol se mantiene sobre el horizonte desde el 22 (ó 23) de septiembre hasta el 21 de marzo. El día dura seis meses en ese hemisferio. Ver figura 38.



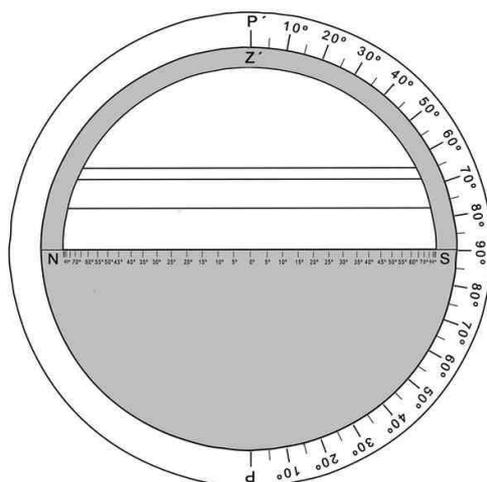


Figura 38

Vemos pues, que con este sencillo dispositivo, logramos, no sólo ver la diferente duración de los días a lo largo del año, sino que, además, observamos la variación de la declinación solar, en qué lugares y cuándo pasa el Sol por el cénit, cuándo cae verticalmente sobre la Tierra, etc.

También nos ayuda a comprender mejor fenómenos como la sucesión de las diferentes estaciones -viendo la distinta inclinación de los rayos solares a lo largo del año- el por qué del sol de medianoche, o la larga noche polar.

## 5. Resumen

El “disco solar didáctico” consiste en un dispositivo formado por dos discos concéntricos giratorios, que nos permite determinar la duración del día y de la noche en diferentes épocas del año, en cualquier latitud; nos facilita la comprensión de cuándo y por qué tienen lugar los equinoccios y los solsticios; en qué lugares y cuándo pasa el sol por el cénit; cuándo cae verticalmente sobre la Tierra; la sucesión de las estaciones - viendo la diferente inclinación de los rayos solares a lo largo del año - el por qué del “sol de medianoche”, la larga noche polar, etc.

El disco mayor del dispositivo lleva unas líneas que representan las proyecciones sobre el plano meridiano de las trayectorias solares. Aparecen representadas de mes en mes, aunque se podrían representar más próximas, por ejemplo una proyección correspondiente a cada semana. También se señalan los polos celestes P y P’.

En la periferia, aparece una escala de 0° a 90° válida para latitudes norte a partir de P y otra también de 0° a 90° a partir de P’, en sentido inverso, válida para latitudes sur.

El disco superior, de menor radio, lleva un recorte cuya parte recta representa el horizonte del observador proyectado sobre el plano del meridiano. Lleva señalados los puntos cardinales norte (N) y sur (S).

Al llevar N sobre un valor de la escala que parte del polo P, queda situado el horizonte correspondiente a esa latitud – como vimos anteriormente, la altura del polo sobre el horizonte coincide con la latitud de un lugar - por lo que la parte de las trayectorias visibles a través del disco

corresponden a lo que vería observador en esa latitud del hemisferio norte. La parte que no deja ver el disco corresponde a la noche.

En forma análoga, al llevar S sobre la escala que parte de P', obtendríamos el horizonte de un observador situado en el hemisferio sur en la latitud señalada. En el primer caso queda Z en el hemisferio visible y en el segundo Z'.

## 6. Algunos cálculos teóricos que confirman la información suministrada por el disco

### 6.1. Determinación del desplazamiento del orto y del ocaso solar

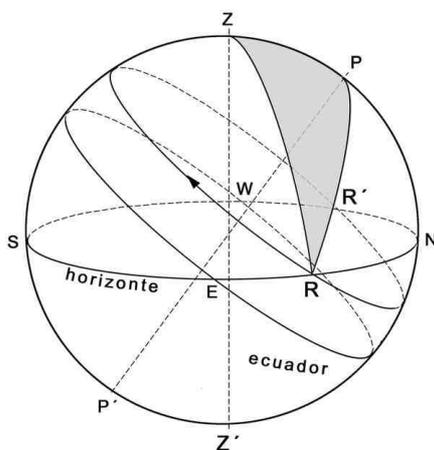


Figura 39

El triángulo esférico determinado por el Polo Celeste, el cénit y un astro se denomina triángulo astronómico.

En la figura 39 está representado tal triángulo para el caso del Sol en el momento en que asoma por el horizonte.

Resolviendo este triángulo podemos calcular la posición del orto y el ocaso del Sol cualquier día del año. En la figura vemos que el lado PR es el complemento de la declinación del Sol el día considerado, y el lado ZP es complementario de la latitud del lugar.

Por ser en este caso, rectilátero el triángulo, ya que el lado ZR mide  $90^\circ$ , será:

$$\cos(90 - \delta) = \cos RZP \operatorname{sen}(90 - \lambda),$$

$\cos RZP = \frac{\cos(90 - \delta)}{\operatorname{sen}(90 - \lambda)}$  con lo que determinamos el ángulo RZP que nos da la posición del orto del Sol en el día considerado.

### 6.2. Desplazamiento del orto y ocaso en algunas latitudes particulares

**6.2.1.** Cálculos para la latitud de ciudad de La Laguna ( $28^\circ 30'N$ ,  $16^\circ 20'W$ ), en determinadas fechas. Ver figura 40.

$$\cos RZP = \frac{\cos(90 - \delta)}{\operatorname{sen}(90 - \lambda)} \quad \text{llamando } \Phi \text{ al ángulo } RZP \text{ queda } \cos \Phi = \frac{\cos(90 - \delta)}{\operatorname{sen}(90 - \lambda)}$$



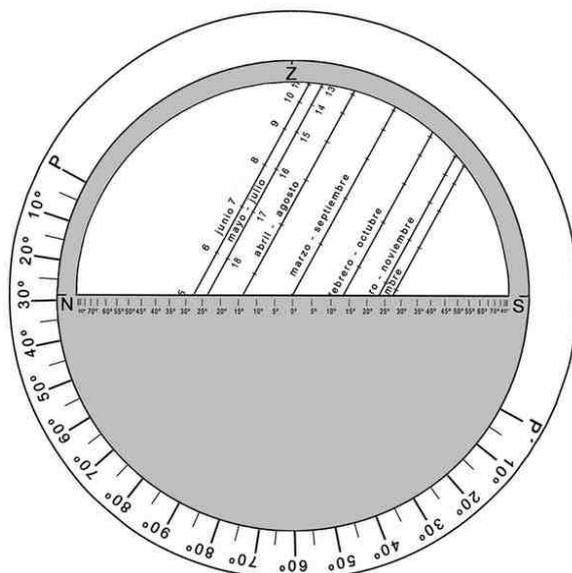


Figura 40

El 21 de abril:

$$\cos \Phi = \frac{\cos(90 - \delta)}{\text{sen}(90 - \lambda)} = \frac{\cos(90 - 11^{\circ}40')}{\text{sen}(90 - 28^{\circ}30')} = \frac{\cos 78^{\circ}20'}{\text{sen } 61^{\circ}30'} = 0,2300$$

$\Phi = \text{arc cos } 0,2300 = 76^{\circ}42'$  contado desde el punto cardinal Norte. Por lo tanto el orto tiene lugar a  $13^{\circ}18'$  del punto cardinal Este.

El 21 de mayo:

$$\cos \Phi = \frac{\cos(90 - \delta)}{\text{sen}(90 - \lambda)} = \frac{\cos(90 - 20^{\circ}11')}{\text{sen}(90 - 28^{\circ}30')} = \frac{\cos 69^{\circ}49'}{\text{sen } 61^{\circ}30'} = 0,3919$$

$$\Phi = \text{arc cos } 0,3919 = 66^{\circ}55'$$

contado desde el punto cardinal Norte. Por lo tanto el orto tiene lugar a  $23^{\circ}05'$  del punto cardinal Este.

El 22 de junio:

$$\cos \Phi = \frac{\cos(90 - \delta)}{\text{sen}(90 - \lambda)} = \frac{\cos(90 - 23^{\circ}27')}{\text{sen}(90 - 28^{\circ}30')} = \frac{\cos 66^{\circ}33'}{\text{sen } 61^{\circ}30'} = 0,4527$$

$$\Phi = \text{arc cos } 0,4527 = 63^{\circ}04'$$

contado desde el punto cardinal Norte. Por lo tanto el orto tiene lugar a  $26^{\circ}55'$  del punto cardinal Este.

6.2.2. En el ecuador ( $\lambda=0$ ). Ver figura 41.

$$\cos \Phi = \cos(90 - \delta)$$

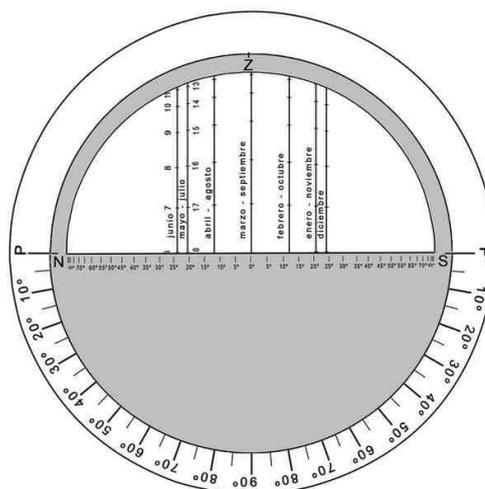


Figura 41

El 21 de abril:

$$\cos \Phi = \cos(90 - \delta) = \cos(90^\circ - 11^\circ 40') = \cos 78^\circ 20'$$

$\Phi = 78^\circ 20'$  desde el punto N. Luego el Sol sale desplazado  $11^\circ 40'$  desde el Este.

El 21 de mayo:

$$90^\circ - \Phi = 90^\circ - 20^\circ 11', \text{ esto significa que sale a } 20^\circ 11' \text{ del Este.}$$

El 22 de junio:

$$90^\circ - \Phi = 90^\circ - 23^\circ 27', \text{ esto significa que sale a } 23^\circ 27' \text{ del Este.}$$

6.2.3. En la latitud de  $23^\circ 27'$  N (figura 42), será,

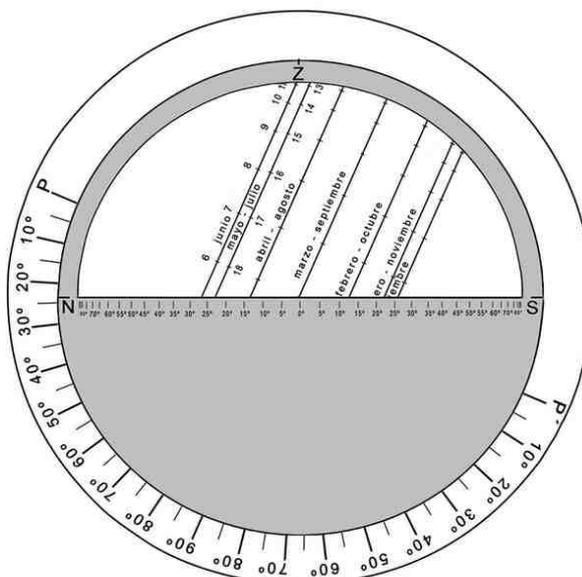


Figura 42



El de 21 de abril:

$$\cos \Phi = \frac{\cos(90 - 11^{\circ}40')}{\text{sen}(90 - 23^{\circ}27')} = \frac{0,2022}{0,9174} = 0,2204$$

$\Phi = \text{arc cos } 0,2204 = 77^{\circ}15'$  y  $90^{\circ} - \Phi = 12^{\circ}45'$  da la posición del orto con respecto al Este.

El 21 de mayo:

$$\cos \Phi = \frac{\cos(90 - 20^{\circ}11')}{\text{sen}(90 - 23^{\circ}27')} = \frac{0,3450}{0,9174} = 0,3760$$

$\Phi = \text{arc cos } 0,3760 = 67^{\circ}54'$  y  $90^{\circ} - \Phi = 22^{\circ}06'$

El 22 de junio:

$$\cos \Phi = \frac{\cos(90^{\circ} - 23^{\circ}27')}{\text{sen}(90^{\circ} - 23^{\circ}27')} = \frac{0,3979}{0,9174} = 0,4337 \text{ y } \Phi = \text{arc cos } 0,4337 = 64^{\circ}17'$$

$90^{\circ} - \Phi = 25^{\circ}43'$ , que indica que sale a  $25^{\circ}43'$  del Este.

**6.2.4.** En la latitud de  $66^{\circ}33'$  N, (figura 43), será,

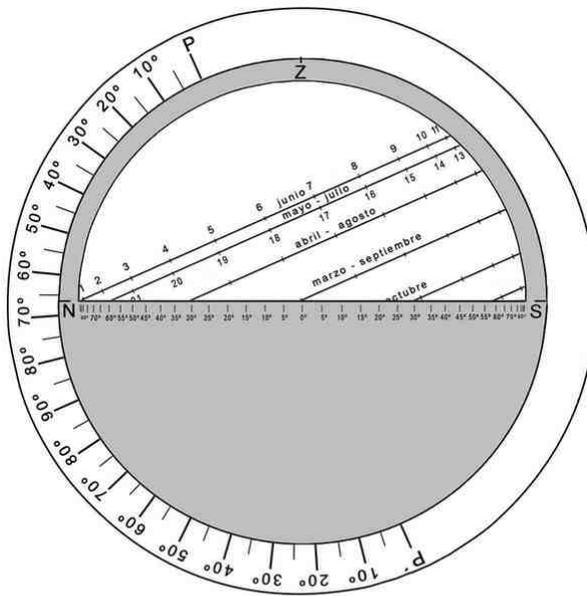


Figura 43

El 21 de abril

$$\cos \Phi = \frac{\cos(90 - 11^{\circ}40')}{\operatorname{sen}(90 - 66^{\circ}33')} = \frac{0,2010}{0,3979} = 0,5051$$

$\Phi = \operatorname{arc} \cos 0,5051 = 59^{\circ}39'$  y  $90^{\circ} - \Phi = 30^{\circ}21'$  da la posición del orto con respecto al Este.

$$\text{El 21 de mayo será } \cos \Phi = \frac{\cos(90 - 20^{\circ}11')}{\operatorname{sen}(90 - 66^{\circ}33')} = \frac{0,3450}{0,3979} = 0,8670$$

$\Phi = \operatorname{arc} \cos 0,8670 = 29^{\circ}52'$  y  $90^{\circ} - \Phi = 60^{\circ}08'$

El 22 de junio  $\cos \Phi = \frac{\cos(90^{\circ} - 23^{\circ}27')}{\operatorname{sen}(90^{\circ} - 66^{\circ}33')} = 1$  y  $\Phi = 0^{\circ}$ , es decir, el Sol sale justamente por el Norte.

**6.2.5.** En el Polo Norte, latitud  $90^{\circ}$  N, (figura 44).

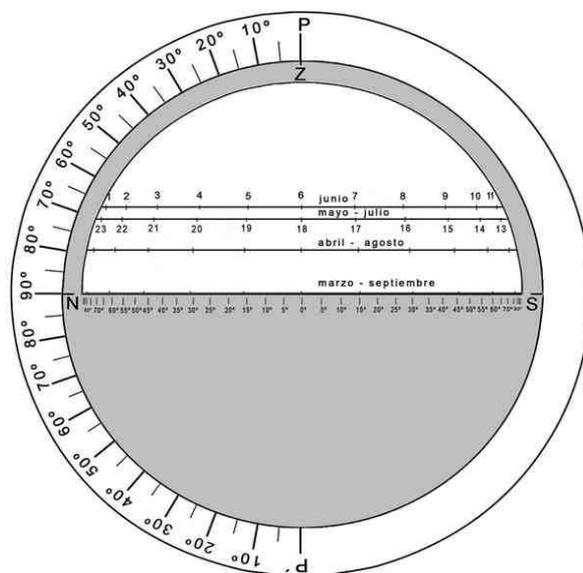


Figura 44

En este caso, el denominador de la expresión  $\cos \Phi = \frac{\cos(90 - \delta)}{\operatorname{sen}(90 - \lambda)}$

es siempre nulo, por lo que no hay ningún valor de  $\Phi$  que la verifique. Es decir, entre marzo y septiembre el Sol estará siempre por encima del horizonte.

En los equinoccios, también se anula el numerador, por lo que la expresión es indeterminada.

En esos días el sol recorre el horizonte.



### 6.3. Cálculo de la duración del día

Para calcular el tiempo que el Sol permanece por encima o por debajo del horizonte, es decir la duración del día y de la noche, calcularemos el ángulo RPZ que determina mitad del arco que recorre el Sol sobre el horizonte. Multiplicándolo por 2 y teniendo en cuenta que cada 15° corresponde a una hora podremos saber entonces la duración del día.

$$\cos RPZ = -\cot(90 - \lambda) \cdot \cot(90 - \delta)$$

Esta fórmula es aplicable para latitudes iguales o menores a 66° 33'. Para latitudes mayores la trayectoria solar no cortaría al horizonte.

#### 6.3.1. Duración del día en las latitudes particulares y los días considerados anteriormente

a) latitud 28° 30' (La Laguna):

el día 21 de abril:

$$\cos RPZ = -\cot(90^\circ - 28^\circ 30') \cdot \cot(90^\circ - 11^\circ 40') = -0,1120$$

llamando  $\theta$  al ángulo RPZ, nos queda,

$\theta = 96^\circ 26'$ ,  $2\theta = 192^\circ 28'$ . Como cada 15° corresponde a una hora, la duración del día resulta ser de 12,85 horas, aproximadamente 12 horas y 51 minutos.

el 21 de mayo:

$$\cos \theta = -\cot(90^\circ - 28^\circ 30') \cdot \cot(90^\circ - 20^\circ 11') = -0,1995$$

$$\theta = 101^\circ 30' \quad 2\theta = 203^\circ$$

la duración del día resulta ser de 13,53 horas, aproximadamente 13 horas y 32 minutos.

El 21 de junio:

$$\cos \theta = -\cot(90^\circ - 28^\circ 30') \cdot \cot(90^\circ - 23^\circ 27') = -0,2354$$

$$\theta = 103^\circ 36' \quad 2\theta = 207^\circ 14'$$

la duración del día resulta ser de 13,48 horas, aproximadamente 13 horas y 28 minutos.

b) latitud 23° 27' N:

El 21 de abril:

$$\cos \theta = -\cot(90^\circ - 23^\circ 27') \cdot \cot(90^\circ - 11^\circ 40') = -0,0895$$

$$\theta = 95^\circ 13' \quad 2\theta = 190^\circ 28'$$

La duración del día resulta ser de 12,68 horas, aproximadamente 12 horas y 41 minutos.

El 21 de mayo:

$$\cos \theta = -\cot(90^\circ - 23^\circ 27') \cdot \cot(90^\circ - 20^\circ 11') = -0,1594$$

$$\theta = 99^\circ 17' \quad 2\theta = 198^\circ 34'$$

la duración del día resulta ser de 13,22 horas, aproximadamente 13 horas y 12 minutos.

El 21 de junio:

$$\cos \theta = -\cot(90^\circ - 23^\circ 27').\cot(90^\circ - 23^\circ 27') = -0,1880$$

$$\theta = 100^\circ 50' \quad 2\theta = 201^\circ 40'$$

la duración del día resulta ser de 13,44 horas, aproximadamente 13 horas y 24 minutos.

c) latitud  $66^\circ 33'N$

el 21 de abril:

$$\cos \theta = -\cot(90^\circ - 66^\circ 33').\cot(90^\circ - 11^\circ 40') = -0,4758$$

$$\theta = 118^\circ 24' \quad , \quad 2\theta = 236^\circ 48'$$

La duración del día resulta ser de 15,78 horas, aproximadamente 15 horas y 47 minutos.

el 21 de mayo:

$$\cos \theta = -\cot(90^\circ - 66^\circ 33').\cot(90^\circ - 20^\circ 11') = -0,8474$$

$$\theta = 147^\circ 55' \quad 2\theta = 295^\circ 51'$$

la duración del día resulta ser de 19,72 horas, aproximadamente 19 horas y 43 minutos.

El 21 de junio:

$$\cos \theta = -\cot(90^\circ - 66^\circ 33').\cot(90^\circ - 23^\circ 27') = -1$$

$$\theta = 180^\circ \quad 2\theta = 360^\circ$$

la duración del día resulta ser de 24 horas. Es decir el sol está las 24 horas por encima del horizonte.

Para la latitud de  $90^\circ N$ , la trayectoria del sol no corta al horizonte en ninguna de las fechas consideradas por lo que la duración del día es siempre de 24 horas.

Se omiten los cálculos similares para el hemisferio Sur, ya que serían totalmente equivalentes.

## Bibliografía

Constantino Marcos y otros. *Matemáticas de Preuniversitario*. Madrid: Ediciones S.M.  
Izquierdo Asensi, F. *Geometría Descriptiva*. (1979). Madrid: Editorial Dossat, S.A.

**Álvaro Martín González**, es Doctor en Ciencias, Catedrático jubilado de Física y Química de Bachillerato y Licenciado en Bellas Artes. Ha sido profesor en diferentes institutos de Enseñanza Secundaria de Tenerife y Profesor tutor de Física de la UNED.

