NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 85, marzo de 2014, páginas 41-48

Los sistemas de ecuaciones en el bachillerato

Félix Martínez de la Rosa
Soledad María Sáez Martínez
(Universidad de Cádiz. España)

Fecha de recepción: 7 de junio de 2013
Fecha de aceptación: 31 de octubre de 2013

Resumen En este artículo se describen los esquemas mentales relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales, que tienen los alumnos al acceder al primer curso de Matemáticas en la Universidad. En relación con ello se analiza la normativa de las pruebas de acceso, el tratamiento que se da a los sistemas en algunos libros de texto, y las consecuencias que pueden derivarse del uso de esos esquemas.

Palabras clave Matrices, determinantes, rango, sistemas, Cramer.

Abstract In this paper we describe the freshman´s mental models about the systems of linear equations. In this connection we analyze the rules of entrance exams, the treatment given to the systems in some textbooks, and the consequences that may result from use of these methods.

Keywords Matrix, determinants, rank, systems, Cramer.

1. Introducción

Los sistemas de ecuaciones lineales son un tema importante dentro de los contenidos de Matemáticas del bachillerato. Presentan un aspecto verbal, un aspecto algebraico y un aspecto gráfico.

El aspecto verbal trata sobre la comprensión del enunciado con el que se plantea un problema. Esta es una de las carencias más evidentes de los alumnos por la dificultad que tienen para entender un texto escrito, tener claro lo que se les pregunta, identificar las incógnitas y plasmarlo todo en ecuaciones algebraicas y sistemas.

En el aspecto algebraico, los alumnos deben saber dilucidar o discutir si un sistema de ecuaciones es posible resolverlo o no, saber el número de soluciones que tiene y saber calcularlas.

En cuanto al aspecto gráfico, en el bachillerato de ciencias se incide en los significados geométricos de las ecuaciones como rectas y planos, estudiando sus posiciones relativas a través de los sistemas. En el de ciencias sociales se analizan las regiones factibles de los ejercicios de programación lineal bidimensional.

En este artículo queremos detenernos en contemplar la manera en que los alumnos de bachillerato aprenden a discutir y resolver los sistemas de ecuaciones. El método de Gauss y el posterior análisis de la matriz escalonada que se obtiene, es sencillo y rápido. Los alumnos de primer curso de la Universidad lo conocen, sin embargo no es su primera opción para resolver un ejercicio. Ellos tienen interiorizado un esquema mental o conceptual que expondremos. Veremos las causas que contribuyen a que los alumnos lo tengan como el mejor método de resolución de sistemas. En relación con ello analizaremos la normativa de acceso a la Universidad, el tratamiento que se da en algunos libros de texto a la discusión y resolución de sistemas, y las consecuencias que pueden derivarse del uso del esquema mencionado.

La expresión esquema mental o esquema conceptual hace referencia al término concept image introducido en el artículo [Tall y Vinner, 1981], acerca de las dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de límites y continuidad:

> Concept image (esquema conceptual): son las estructuras cognitivas que un individuo asocia a un concepto.

Cuando se explica un concepto, los alumnos desarrollan un proceso cognitivo con el que conciben un esquema conceptual. Para ello se basan en un conjunto de imágenes mentales (formas simbólicas, diagramas o gráficas) que asocian al concepto. Pero el conjunto de objetos matemáticos, que un alumno considera ejemplos adecuados para formar esa imagen, puede que no se haya elegido correctamente y pase por alto matices importante. Esto da lugar a esquemas conceptuales incompletos e inadecuados, que propician la aparición de errores de concepto.

2. Esquema mental y normativa

Los autores de este artículo hemos impartido docencia en asignaturas de Matemáticas de primer curso, en diferentes titulaciones de la Universidad de Cádiz a los que alumnos ingresan, en su mayoría, tras haber cursado las asignaturas Matemáticas I y II del bachillerato de Ciencias, o bien las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y II. A esas asignaturas de Matemáticas de primero de Universidad, los alumnos acceden con una serie de conocimientos acerca de los sistemas de ecuaciones, de los que nos ocuparemos en este artículo.

Sea cual sea la procedencia de los alumnos hemos observado que la mayoría de ellos ha interiorizado el siguiente esquema para la resolución de sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas.

1.	Si no hay parámetros, se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes aplicando la regla de Sarrus. Si es distinto de cero, el sistema se resuelve usando la regla de Cramer. Si es cero, se prescinden de una o dos ecuaciones y se resuelven una o dos incógnitas en función del resto.
2.	Si hay parámetros, sus valores se obtienen igualando a cero el determinante de la matriz de los coeficientes y para estos valores se resuelve el sistema como en el paso anterior.

Tabla1. Esquema de los alumnos para la resolución de sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas.

En el Real Decreto 1467/2007 de 2 de noviembre (BOE del 6 de noviembre), se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas, mientras que en la Orden de 5 de agosto de 2008 (BOJA del 26 de agosto) se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en

Andalucía (comunidad a la que pertenecemos los autores), y que es similar a los del resto de comunidades autónomas.

En el *bachillerato de Ciencias* la asignatura Matemáticas II recoge el estudio de matrices, determinantes, rango y sistemas de ecuaciones. Las orientaciones para las pruebas de acceso a la Universidad en Andalucía incluyen "saber clasificar un sistema de ecuaciones lineales con no más de tres incógnitas y que dependa, como mucho, de un parámetro y, en su caso, resolverlo".

Se supone que en esas pruebas se exigen contenidos mínimos, y los alumnos deberían ser capaces de discutir y resolver sistemas de todo tipo. Pero la necesidad de obtener una nota alta para acceder a los estudios preferidos, y la escasez de tiempo, propicia que los profesores se apliquen en resolver los modelos de ejercicios que se preguntan en esas pruebas. El esquema de la tabla 1 funciona bien para los sistemas de tres ecuaciones y tres incógnitas. Requiere poco esfuerzo intelectual, resulta fácil de memorizar para los alumnos y es cómodo de explicar para los profesores. A los alumnos les funciona bien y por eso les parece innecesario recordar y aplicar otra técnica.

En el *bachillerato de Ciencias Sociales* los contenidos de álgebra lineal se reparten entre las Matemáticas I y II. En la primera se ubican los sistemas de ecuaciones lineales y en la segunda el álgebra matricial y la programación lineal. Llama la atención que las orientaciones para las pruebas de acceso no incluyan la discusión y resolución de sistemas de ecuaciones. Estos alumnos sólo discuten sistemas en el primer año y, al no incluirse en esas pruebas, sus conocimientos acerca de ellos son sensiblemente inferiores a los que cursan el otro bachillerato, aunque suelen recordar la estructura básica del esquema de la tabla 1.

Las orientaciones para las pruebas de acceso acerca de los sistemas son demasiado restrictivas en el primer caso, e inexistentes en el segundo, y tienen su repercusión porque influye en alumnos y profesores a la hora de insistir más o menos en un tema, y esto propicia algunas deficiencias que hemos observado en nuestros alumnos universitarios y que se comentarán en la sección cuatro.

3. Sobre los libros de texto

Las matrices, determinantes, rango y sistemas de ecuaciones lineales se exponen en los libros de texto de los dos tipos de bachillerato, en cursos diferentes aunque con contenidos similares. Para que el discurso sea fluido nos hemos centrado en dos textos correspondientes al bachillerato de ciencias (que citaremos en función de su editorial: Santillana y Anaya), que son habitualmente usados en el entorno en el que se ha hecho este trabajo.

Las *matrices* se dan como una tabla de elementos ordenados en filas y columnas [Santillana, p. 8], y a veces se motivan a partir de los coeficientes de los sistemas de ecuaciones [Anaya, p. 36]. Los *determinantes* se introducen como un número asociado a una matriz cuadrada, dándose la fórmula para los de orden dos y la regla de Sarrus para los de orden tres ([Santillana, p. 36] y [Anaya, p. 81]). Esta técnica eclipsa la del desarrollo por adjuntos que en combinación con la técnica de hacer ceros ([Santillana, p. 43] y [Anaya, p. 88]), simplifica y facilita el cálculo de determinantes de cualquier orden.

El *rango* es un concepto que observamos que los alumnos no llegan a comprender y dominar del todo bien. Es posible que el hecho de que en los libros de texto se defina tres veces, influya en crear una cierta confusión sobre el mismo. La primera definición que se da ([Santillana, p. 18] y [Anaya p. 65]) es la siguiente:

> "El rango de una matriz es el número de filas o columnas no nulas linealmente independientes de la matriz."

Esta definición se basa en la dependencia e independencia lineal que son conceptos muy ligados a los espacios vectoriales. Pero estos no se explican con detalle en segundo de bachillerato. Por ejemplo en [Santillana, p. 98], se habla de las operaciones y otros elementos de los vectores como introducción a la geometría del espacio, mientras que en [Anaya, p. 62] se da una breve introducción a los espacios vectoriales generales, mencionándose que "la idea de vector como flecha da lugar a la de espacio vectorial".

Para analizar la independencia lineal de las filas de una matriz, se recurre a las operaciones elementales de fila con el objeto de transformar la matriz inicial en una escalonada con el mismo rango. A partir de esto se da la segunda definición de rango ([Santillana, p. 19] y [Anaya p. 66]):

> "El rango de una matriz es el número de filas no nulas que tiene la matriz escalonada que se obtiene con el método de Gauss".

Con esta definición el concepto y la forma de calcular el rango se establece totalmente. El problema surge al explicar los determinantes. Entonces aparece el concepto de menor de una matriz y basándose en él se enuncia la tercera definición de rango ([Santillana, p. 45] y [Anaya p. 89]):

> "El rango de una matriz es el orden del mayor de sus menores no nulo".

De pronto, el método fácil y rápido que se empleaba para calcular el rango se sustituye por la búsqueda de un menor. Pero como la cantidad de menores que tiene una matriz es muy grande, se describe un método que según [Santillana, p. 45], "permitirá no tener que calcularlos todos para determinar el rango", y según [Anaya, p. 90], "permite hallar el rango con razonable rapidez".

La técnica consiste en partir de un menor no nulo y añadir filas y columnas de una manera adecuada para aumentar su orden: esto se denomina "orlar la matriz". Pero al aplicarlo no se efectúa una simplificación previa de la matriz por Gauss, y por eso se efectúan más cálculos de los necesarios. Por otro lado, si se hiciese la simplificación entonces se obtendría una matriz escalonada en la que hallar el rango no precisaría de los menores porque se haría directamente con la segunda definición.

El método de "orlar la matriz" no parece muy eficiente, además puede crear la impresión errónea de que simplificar la matriz no es algo que se pueda mezclar con otras técnicas. Por otro lado, la mecánica de los menores funciona bien en matrices de pequeñas dimensiones, como las de los ejercicios de las pruebas de acceso del bachillerato de ciencias, por eso suele ser la que los alumnos escogen como primera opción. Aquí nos preguntamos si la técnica de "orlar" es tan importante como para enmarañar lo establecido en la segunda definición. Algún alumno que emplea esta técnica piensa que "el rango es eso de coger determinantes cada vez más grandes".

Un fenómeno parecido a lo analizado para el rango ocurre también en los *sistemas de ecuaciones.* La primera técnica que se describe en los libros para su discusión y resolución consiste en la transformación del mismo, con el método de Gauss, en un sistema escalonado. Según la forma que presente la matriz ampliada así será el sistema. Para que sea más claro, los textos de bachillerato ofrecen el siguiente esquema ([Santillana, p. 65] y [Anaya, p. 37]):

$\left(\begin{array}{ccccc\|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{array}\right)$	Si $a \neq 0$ y se tiene el mismo número de ecuaciones no nulas que de incógnitas, es un *Sistema compatible determinado*.
$\left(\begin{array}{ccccc\|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & b \end{array}\right)$	Si $a_1 \neq 0$ o $a_2 \neq 0$ y se tienen más incógnitas que ecuaciones no nulas, es un *Sistema compatible indeterminado*.
$\left(\begin{array}{ccccc\|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right)$	Si $b \neq 0$ no hay solución del sistema, es un *Sistema incompatible.*

Tabla 2. Esquema para la resolución de sistemas de ecuaciones generales

En los textos citados, se explica que la solución de los sistemas compatibles determinados se obtiene despejando la incógnita de la última fila. Sustituyendo en la anterior se calcula la siguiente, y se repite el proceso hasta la primera fila. En los compatibles indeterminados, para obtener la forma escalonada deben trasladarse una o más columnas al segundo miembro, y las incógnitas correspondientes serán los parámetros. De esta forma, la discusión de sistemas, sea cual sea su forma, queda establecida clara y rápidamente. Los textos que estamos citando sólo precisan de dos páginas para describir el método de Gauss y el esquema de la tabla 2.

Sin embargo todo cambia tras la explicación del teorema de Rouché-Fröbenius ([Santillana, p. 68] y [Anaya, p. 102]). La cuestión no es la dificultad intrínseca de este teorema sino que al "aplicarlo" los rangos se obtienen con la técnica de "orlar". Claro que si se simplificara de forma previa la matriz ampliada se obtendría un sistema escalonado cuya discusión ya se ha establecido en el esquema de la tabla 2, lo que haría innecesaria la utilización de ningún otro algoritmo. Notemos que en libros tan conocidos como [Grosman (1992)] o [Anton (1991)] los sistemas se resuelven con el esquema de la tabla 2, enmarcando el teorema de Rouché-Fröbenius dentro de los espacios vectoriales. Asimismo sólo en el primero [Grosman, p. 282] se alude (en un apartado opcional) al cálculo del rango con menores.

Finalmente los libros de texto exponen la regla de Cramer. Como el ejercicio de la prueba de acceso del bachillerato de ciencias se resuelve fácilmente con ella, los alumnos la prefieren antes que el esquema de la tabla 2. La ubicación de la regla de Cramer al final de los temas dedicados a los sistemas, donde se explica su uso para sistemas cualesquiera ([Santillana, p. 72] y [Anaya, p.106]), puede dar la errónea impresión de que se trata de la culminación del proceso de resolución de los mismos. Muchos alumnos así lo creen, pero no es así. En [Grossman, p. 158], se expresa el siguiente comentario sobre esta regla:

> "Durante casi 200 años fue esencial en la enseñanza del álgebra. Debido a la gran cantidad de operaciones que requiere, en la actualidad se usa mucho menos que antes. Sin embargo, el resultado fue de gran importancia en su tiempo".

En un sistema compatible determinado de tres ecuaciones y tres incógnitas, el método de Cramer exige calcular cuatro determinantes que, si se hacen con la regla de Sarrus, requieren 68 operaciones: con tantas operaciones el error siempre está al acecho. A pesar de esto, es la primera opción de muchos alumnos para resolver sistemas.

4. Consecuencias observadas en los alumnos

El esquema de la tabla 1 junto con la técnica de "orlar la matriz" son las primeras opciones de los alumnos de primer curso en la Universidad, para discutir y resolver sistemas de ecuaciones. Pero su uso requiere de un gran número de operaciones y propicia la confusión en la comprensión de algunos conceptos, como el rango o el de parámetro, a los que nos referiremos a continuación.

4.1. Sobre el exceso de operaciones

Uno de los aspectos en que los profesores de Matemáticas insistimos a los alumnos es en economizar en los cálculos, para que no se pierdan entre tantas operaciones y prevengan los errores de tipo operativo. El esquema de la tabla 1 y el método de "orlar" son ejemplos de lo contrario.

El exceso de operaciones propicia errores con los que los profesores nos mostramos permisivos, en parte porque así sucede en las pruebas de acceso. De hecho, a los correctores de los ejercicios de esas pruebas se nos instruye en que los errores en las operaciones aritméticas elementales se penalicen con un máximo del 10% de la nota total del ejercicio. Los alumnos saben de esta permisividad con los errores operativos, y la importancia del resultado correcto se relativiza apelando a que lo importante es el método.

Por otro lado, los alumnos realizan las operaciones valiéndose de una calculadora. Confían ciegamente en ellas para los cálculos lo que causa efectos secundarios: no practican jamás el cálculo mental, descuidan las operaciones básicas con papel y lápiz, y no se preocupan en simplificar previamente las expresiones numéricas. Es especialmente llamativo cuando para operar con fracciones prefieren transformar estas en decimales y emplear un resultado aproximado antes que uno exacto. Ya sea a mano o con calculadora, el resultado es un papel atiborrado de cálculos, a veces muy desordenado y difícil de comprender incluso por ellos mismos, lo que propicia nuevos errores operativos.

4.2. Sobre los parámetros

El esquema de la tabla 1 sirve para resolver un tipo de ejercicio muy concreto. Poner uno que se salga de ese tipo es una manera de comprobar la consistencia de los conceptos adquiridos por los alumnos. La idea que ellos tienen sobre los parámetros es un tanto difusa. Basta dar un sistema en el que no aparece una incógnita para observar que la respuesta mayoritaria es ignorar ese hecho. Cuando se pregunta cuál es el valor de la incógnita que falta razonan que si no aparece es que no existe, y lo que no existe vale cero: no tienen asimilado un sistema como una serie de condiciones que deben cumplir las incógnitas, y que si no hay condición sobre alguna significa que puede tomar cualquier valor.

4.3. Sobre el rango

La simplificación de una matriz permite hallar su rango de una forma más rápida y directa que el método de "orlar". Y muchos alumnos la emplean, pero cambian de técnica al llegar a los sistemas. Aquí se produce un fenómeno curioso: la distinción entre dos tipos de rango. Si se trata de una matriz suelta aplican el método de Gauss, pero si se trata de una proveniente de un sistema de ecuaciones los alumnos aplican el "orlado" de la matriz. Esto permite apreciar que el concepto de rango no está bien asimilado.

4.4. Sobre sistemas cuya matriz de los coeficientes no es cuadrada

Los alumnos suelen tratar de reproducir el esquema de la tabla 1 sea cual sea la forma del sistema. A veces intentan realizar el determinante aunque sea imposible. Muchas dudas se suscitan cuando falta alguna incógnita y también cuando el número de ecuaciones y de incógnitas es muy desparejo. Cuando hay más ecuaciones que incógnitas, el método de Gauss permite observar fácilmente las ecuaciones sobrantes, y si hay más incógnitas que ecuaciones, es sencillo apreciar cuáles deben ser tomadas como parámetros. El esquema de la tabla 2 lo recuerdan vagamente porque no lo han necesitado demasiado, y esto va en contra de la necesaria visión general que requiere el estudio de los sistemas de ecuaciones.

Las dificultades expresadas en los puntos anteriores se superan si insistimos en la idea de unificar la manera de calcular el rango de una matriz (esté relacionada o no con un sistema de ecuaciones) utilizando la simplificación por Gauss para escalonarla. Con este método es fácil, además, encontrar el mayor menor no nulo de la matriz y establecer y aclarar la relación entre su orden y el número de filas no nulas de la matriz escalonada.

5. Resumen final

En bachillerato se explican tres métodos para discutir y resolver sistemas: Gauss, Rouché - Fröbenius y Cramer. El método más rápido e intuitivo es el de Gauss. No conlleva más operaciones que los otros métodos, y presenta la ventaja de no perder de vista lo que se hace, al aplicar reiteradamente el método de reducción. Se explica el primero en los textos y el primero en las clases. Los alumnos lo entienden y lo aplican para sistemas de todo tipo. Si hubiese sistemas que no se pudiesen resolver de esa manera sería entendible la introducción de los otros dos métodos en bachillerato pero esto no es así.

Los alumnos del bachillerato de ciencias tienen ante sí una disyuntiva acerca del método que deben emplear. En este sentido, es decisivo el hecho de que el sistema de ecuaciones que se pregunta en las pruebas de acceso a la Universidad se resuelva sin problemas siguiendo los pasos del esquema de la tabla 1 basado en el método de Cramer. Debido a esto los profesores, que deben exprimir al máximo el tiempo del que disponen, suelen preferirlo frente a otras técnicas y, finalmente, este es el preferido por muchos alumnos, incluidos los del bachillerato de ciencias sociales. Una circunstancia relativa a este método, es la no simplificación previa de la matriz con las operaciones elementales de fila: es claro que si se hace se llega a un sistema escalonado cuya resolución resulta evidente y vaciaría de sentido al citado método.

La no simplificación de la matriz se observa también en el método de Rouché - Fröbenius. En este caso es el cálculo del rango el que se beneficiaría de ello. Y no sólo el rango: el propio sistema quedaría casi resuelto. En los textos de bachillerato, cuando se trata de calcular el rango de una matriz relacionada con un sistema de ecuaciones, se opta por la técnica denominada "orlar la matriz", que puede incrementar innecesariamente el número de operaciones. Pero lo peor es que crea confusión en los alumnos sobre el concepto de rango: parece que es distinto el de una matriz general que el de una que surge de un sistema de ecuaciones.

En este artículo nos preguntamos el por qué de la pervivencia de distintos métodos para el cálculo de rangos y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, y nos cuestionamos si tanta técnica puede contribuir al enmascaramiento de los conceptos en lugar de aclararlos. La postura de los autores de este artículo es decidida a favor de utilizar la misma técnica de simplificación matricial, ya sea para obtener un rango o para discutir un sistema de ecuaciones. De hecho, es así como se hace en primera instancia en los textos de bachillerato y también en los universitarios.

Bibliografía

Anton, H. (1991) "*Introducción al álgebra lineal*", Limusa, 5ª edición.
Colera, J.; Oliveira, M.J. (2009) "*Matemáticas II. 2º bachillerato*", Anaya.
Escoredo, A. y otros (2009) "*Matemáticas II. 2º bachillerato*", Santillana.
Grossman, S. (1992) "*Álgebra lineal con aplicaciones*", McGraw-Hill, 3ª edición.
Tall, D.; Vinner, S. (1981) "Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity", *Educational Studies in Mathematics Education,* nº 12, pp. 151-169.

Félix Martínez de la Rosa. Doctor en Matemáticas y Catedrático de Escuela Universitaria de Matemática aplicada en la Universidad de Cádiz. Investigaciones en educación matemática acerca de la diferenciación de funciones reales de una y dos variables, el uso de la visualización en la docencia de las matemáticas y la detección de errores de concepto. Email: felix.martinez@uca.es

Soledad María Sáez Martínez. Doctora en Matemáticas y profesora colaboradora en la Universidad de Cádiz. Email: sol.saez@uca.es.