NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 85, marzo de 2014, páginas 75-90

Actividades Matemáticas: Conjeturar y Argumentar

Ingrith Álvarez Alfonso
Leonardo Ángel Bautista
Edwin Carranza Vargas
María Nubia Soler-Alvarez
(Universidad Pedagógica Nacional. Colombia)

Fecha de recepción: 15 de mayo de 2013
Fecha de aceptación: 31 de octubre de 2013

Resumen

Con el fin de brindar algunos elementos adicionales para la transformación de la práctica educativa, se presentan descripciones detalladas de algunos procesos fundamentales de la actividad matemática: *conjeturar y argumentar*. En términos generales, conjeturar corresponde al proceso de formular y validar conjeturas, y argumentar al proceso de hacer inferencias que se deducen de una información inicial. Conjeturar se apoya en la visualización y en la argumentación; visualizar hace referencia al proceso de creación de representaciones gráficas de objetos matemáticos y permite identificar aquello que es relevante y que puede llevar a la formulación de una conjetura, mientras que argumentar busca justificar o validar afirmaciones que se hagan en este proceso. Esta caracterización se amplía con ejemplos surgidos en clases de matemáticas de futuros profesores.

Palabras clave Actividad matemática, argumentar, conjeturar, generalizar, visualizar, validar, verificar.

Abstract

With the aim to offer to mathematics teacher some additional elements for transformation of their educative practice, in this article we present detailed descriptions of some fundamental processes of the mathematical activity: *conjecturation and argumentation*. In general terms, a conjecture refers to the process of formulating and validating conjectures and argumentation is related to the process of doing inferences that are concluded of initial information. Conjecturation rests significantly on both process, argumentation and visualization. Visualization refers to the process of creation of graphics representations of mathematical objects and allows identify relevant aspects for formulate conjectures; while argumentation finds justify or validate some aims. For extending this description, we give some examples arisen in classes of mathematics of training teachers.

Keywords Mathematical activity, argumentation, conjecturation, visualization, validation, verification.

1. Introducción

La organización curricular para la enseñanza de las matemáticas en Colombia se ha caracterizado por estar centrada en los contenidos tal como lo demuestran las reformas curriculares presentadas a partir de los años 60. Sin embargo, desde el año 1998 con la publicación de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas se hace evidente la importancia de atender no sólo los contenidos, sino los procesos inherentes al desarrollo del pensamiento matemático. (MEN, 1998, pp. 14).

En ese sentido, el interés de este artículo, sin dejar de lado los contenidos, es abordar acciones propias de la actividad matemática, sugiriendo al docente experimentar los roles que un matemático tiene cuando se enfrenta a la tarea de crear y estudiar las matemáticas que ha de llevar al aula, para que de esta manera, amplíe su concepción sobre las matemáticas y transforme, su práctica docente.

2. Actividad Matemática

Uno de los objetivos del quehacer matemático consiste en estudiar los elementos que aparecen en un determinado contexto con el propósito de identificar y caracterizar comportamientos y propiedades para abstraer estructuras, modelar situaciones, aplicar estos modelos, y en la medida de las posibilidades, si el contexto lo permite, generar nuevas teorías o actualizar las existentes de tal manera que se evidencie la aplicabilidad de las mismas.

Así, se considera que la actividad matemática se concreta en procesos tales como los de *conjeturar y argumentar*, que contribuyen al desarrollo de otros procesos generales presentes en toda actividad matemática como la resolución y planteamiento de problemas, el razonamiento, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. (MEN, 1998, pp. 35).

3. Proceso de conjeturar

El proceso de conjeturar en matemáticas se constituye en el mecanismo por medio del cual se formulan afirmaciones acerca de las propiedades de determinados objetos o las relaciones que se dan entre éstos, a partir de ciertas observaciones, exploraciones, ensayos o experimentos sobre dichos objetos, que permiten identificar información para plantear conjeturas a través de tales afirmaciones.

En concordancia con Harel y Sowder en este documento se considera que una conjetura es:

> […] una observación hecha por una persona quien no tiene dudas acerca de su verdad. La observación de la persona deja de ser una conjetura y se convierte en un hecho según su visión una vez que la persona obtiene certeza de su verdad. (Harel y Sowder citados en Balacheff, 2008, pp. 504)

Bajo esta mirada, Cañadas, Deulofeu, Figueiras, Reid y Yevdokimov (2008, pp. 436), proponen y caracterizan cinco tipos de conjeturas[1], a partir de distintos modos de razonamiento (inductivo, deductivo, abductivo y analógico) que aparecen en la resolución de problemas como parte de la actividad matemática. Para cada tipo de conjetura sugieren pasos que de manera general, permiten evidenciar la existencia de otras actividades matemáticas transversales al proceso de conjeturar[2], las cuales pueden ser secuenciales o repetitivas. Sin embargo, se considera que el conjeturar puede estructurarse a partir de las actividades de visualizar; identificar patrones, relaciones, regularidades, propiedades, etc.; formular, verificar, generalizar y validar conjeturas.

---

[1] Inducción empírica a partir de un número finito de casos discretos, Inducción empírica a partir de casos dinámicos, Analogía, Abducción y Conjeturas basadas en la percepción.
[2] Entre las cuales se encuentran las actividades de visualizar, identificar, organizar, categorizar, relacionar, comparar, verbalizar, simbolizar, modelar, deducir, inducir, generalizar, argumentar, verificar, probar, explicar, entre otras,

A continuación se caracterizan las primeras cinco actividades, en tanto la validación de conjeturas, será abordada en el contexto de la actividad de argumentar; además, se proponen tres tareas como ejemplos para evidenciar las características fundamentales de estas actividades.

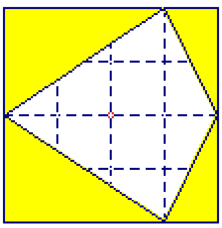
3.1. Visualizar

En matemáticas la visualización se refiere al proceso de observar el objeto matemático para identificar sus características y las relaciones que se establecen entre ellas, fundamentándose en los esquemas cognitivos previos que tiene el observador sobre tales objetos.

Planchart (2002, pp. 35), con el propósito de caracterizar el proceso de visualización, presenta algunas definiciones asociadas a éste y dadas por diferentes autores: Zimmermann y Cunningham (1991), plantean que la visualización matemática corresponde a la producción o uso de representaciones geométricas y gráficas de conceptos o problemas matemáticos y consideran además que la visualización se hace a partir de diagramas que representan los objetos matemáticos y permiten describir en términos visuales los problemas estudiados; Castro y Castro (1997) consideran que la visualización es la capacidad de creación de imágenes mentales, estas últimas permiten hacer referencia a los objetos matemáticos sin que estos se encuentren presentes.

Dentro del proceso de conjeturar, la visualización no se hace de forma descontextualizada o al azar, sino que ésta, de manera previa a través de la tarea formulada, persigue el objetivo específico de identificar elementos necesarios para poder formular una conjetura. Así, dependiendo del tipo de conjetura se busca visualizar: un patrón, una propiedad invariante, una característica a partir de las representaciones, entre otras.

Aunque la visualización tiene un papel relevante al inicio del proceso de conjeturar, cabe resaltar que esta actividad puede darse en cualquier otro momento, con diferentes propósitos como ratificar lo inicialmente visualizado, identificar nuevos elementos, modificar la conjetura o buscar un argumento para la misma. Sin embargo, en los ejemplos que siguen se enfatiza en la visualización como un primer paso para conjeturar.

Tarea 1	**Lo visualizado**
En la siguiente figura ¿cuál superficie tiene mayor área, la amarilla o la blanca? 	*Se puede observar en la image: figuras, colores, la cuadricula, entre otras cosas, pero pensando en la tarea, se debe atender características propias de la imagen tales como, la figura global que contiene a las dos superficies, la cuadricula que puede servir como unidad de medida y las figuras geométricas (triángulos, rectángulos) que pueden usarse para descomponer las diferentes superficies.*
Tarea 2	**Lo visualizado**
Observe las siguientes igualdades $8 = 3 + 5$ $27 = 7 + 9 + 11$ $64 = 13 + 15 + 17 + 19$ ¿Cuáles son las dos filas siguientes? Enuncie una regla general	*Se puede observar en las igualdades: las clases de números que allí aparecen, las operaciones inmersas, la cantidad de números que se usa en cada igualdad, etc.; pero pensando en la tarea se debe prestar atención a la clase de números que aparecen al lado izquierdo de la igualdad, a la clase y cantidad de números que aparecen en la suma del lado derecho de la igualdad y al primer o último número que aparece en la suma.*

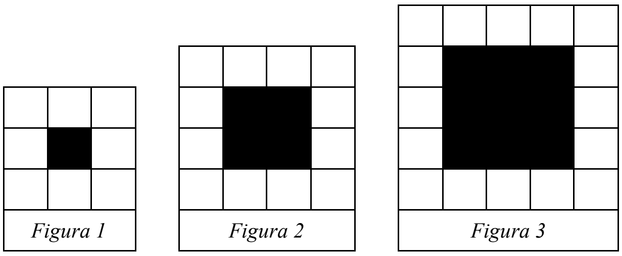
Tarea 3	Lo visualizado
Observe la siguiente secuencia[3]*, cuente la cantidad de cuadros blancos en cada caso y determine el número de cuadros blancos de la figura n-ésima.*  	• *En cada figura aparece un cuadrado grande y en el centro un cuadrado pequeño.* • *El cuadrado grande tiene cuadrados unitarios en cada lado. El cuadrado pequeño no tiene cuadrados unitarios.* • *Los cuadrados unitarios del cuadrado grande son blancos y el cuadrado del centro es negro.* • *En cada vértice del cuadrado negro, hay un cuadrado unitario blanco.*

Tabla 1. Actividad de visualizar, ejemplo en tres tareas

3.2. Identificar patrones, relaciones, regularidades o propiedades

En esta etapa los estudiantes a partir del estudio de los datos iniciales, identifican aquello que es relevante y común, lo cual, dependiendo del contexto de la situación propuesta, puede corresponder a patrones, regularidades, relaciones entre objetos, propiedades, semejanzas, entre otros. En la tabla 2 se presentan algunos patrones y relaciones encontradas en cada una de las tareas propuestas en la tabla 1.

<table>
<tr><th>Tarea 1</th><th>Tarea 2</th></tr>
<tr><td>En relación con la tarea, se identifica lo siguiente:
a. La superficie amarilla consta de cuatro triángulos, dos grandes y dos pequeños.
b. La superficie blanca consta de dos triángulos congruentes, cada uno con un área mayor que el área de cualquiera de los triángulos amarillos.
c. Si la superficie se divide con un segmento horizontal que pase por el centro (el punto rojo) se obtienen dos figuras congruentes.</td><td>En relación con la tarea propuesta, se pueden identificar entre otras las siguientes características:
a. Al lado izquierdo de cada igualdad el número es un cubo perfecto, empezando en la primera igualdad (primera fila) con el cubo de dos, en la segunda con el cubo de tres y en la tercera con el cubo de 4.
b. En la primera igualdad, la suma del lado derecho tiene dos sumandos impares, en la segunda tres y en la tercera 4.
c. En la cuarta fila al lado izquierdo deberá estar el cubo de 5 y al lado derecho habrá una suma de cinco números impares
d. Para la fila n el término del lado izquierdo de la igualdad es el cubo de (n+1) y en la suma del lado derecho de la igualdad deben haber (n+1) sumandos impares consecutivos.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Tarea 3</th></tr>
<tr><td colspan="2">a. En la secuencia cada lado del cuadrado mayor tiene una unidad más de lado en relación con el anterior.
b. De una figura a la siguiente se aumenta, en cuatro, el número de cuadros blancos.
c. En cada figura los cuadros blancos se pueden agrupar para formar cuatro rectángulos del mismo tamaño, que bordean el cuadro negro, así: para la primera figura que es un cuadrado de lado 3, cada rectángulo tiene 2 cuadrados, luego el total de cuadros blancos es 4x2=8; para la segunda figura que es un cuadrado de lado 4, cada rectángulo tiene 3 cuadrados, luego el total de cuadros blancos es 4x3=12; para la tercera figura que es un cuadrado de lado 5, cada rectángulo tiene 4 cuadrados, luego el total de cuadros blancos es 4x4=16.
d. El número de cuadros blancos es un múltiplo de cuatro.</td></tr>
</table>

Tabla 2. Actividad de identificar patrones, regularidades y propiedades en las tareas propuestas

[3] Esta tarea es una adaptación de un ejercicio propuesto por Mason, Graham, Pimm y Gowar (Trad. 1982, pp. 139).

3.3. Formular conjeturas

Un proceso importante después de visualizar e identificar las características, propiedades, patrones, reglas, regularidades o propiedades de un objeto, es comunicarlas ya sea verbal, simbólica o gráficamente con el fin de tener un registro que permita organizar, clasificar e identificar la información útil para formular la conjetura de forma clara.

En esta etapa de la actividad matemática no es necesario hacer uso de un lenguaje especializado, pero sí se considera pertinente escribir las observaciones o la conjetura en un lenguaje que sea compartido por la comunidad académica en la que se encuentra inmersa la persona que esta enfrentándose a la tarea. Ahora bien, una forma particular de expresar lo visualizado es a través de la simbología propia del lenguaje matemático; con ello se busca expresar de manera abreviada las características identificadas en el caso o casos observados.

Continuando con las tareas propuestas, en la tabla 3 se observan posibles conjeturas derivadas de las visualizaciones y de la identificación de patrones y regularidades presentadas, tanto en la tabla 1 como en la tabla 2.

Formulación de la conjetura

Tarea 1	Tarea 2
Conjetura: *La superficie blanca tiene mayor área que la superficie amarilla.*	***Conjetura:*** *Para la fila n, con* **a=n+1**, *los términos de la suma se obtienen, así:* $\mathbf{a^2=[a(a-1)+1]+[a(a-1)+3]+\cdots+[a(a-1)+2a-1]}$

Tarea 3

Una forma de registrar lo visualizado en esta tarea es utilizando una tabla como la siguiente:

Figura	*Número de rectángulos*	*Cantidad de cuadros en cada rectángulo*	*Total de cuadros blancos*
1	*4*	*2*	*8*
2	*4*	*3*	*12*
3	*4*	*4*	*16*
4	*4*	*5*	*20*
...			

Conjetura:
La figura que se encuentra en la posición n *ha de tener 4 rectángulos cada uno formado por* **n+1** *cuadrados blancos, luego en total tenemos* **4(n+1)** *cuadros blancos.*

Tabla 3. Actividad de formular conjeturas, ejemplo en tres tareas

3.4. Verificar conjeturas

Después de que ha emergido la conjetura que permite consolidar las observaciones hechas, es pertinente llevar a cabo el proceso de verificación, el cual tiene como objetivo que la persona se convenza e intente convencer a otros de que tal afirmación tiene una alta probabilidad de ser verdadera en el contexto estudiado, en cuyo caso debe buscar, en la medida de las posibilidades, validar la conjetura formulada. Con esto, no se está diciendo que la conjetura sea demostrada, ya que aún no se tiene el constructo teórico para generar tal proceso, sino que se busca probar si la conjetura es válida en algunos nuevos casos o por el contrario que se muestre que la conjetura es falsa (puede ser a través de un contraejemplo), lo cual puede llevar de nuevo al proceso de reformular la conjetura a partir de una nueva etapa de visualización.

Verificación de la conjetura

Tarea 1

En relación con la tarea propuesta se intenta verificar la conjetura, es decir, que el área de la superficie amarilla es menor que el área de la superficie blanca.

Para lo cual se procede así:

Opción 1.

a. *Usar la unidad de la cuadricula, como unidad de medida para el área de la superficie.*

b. *Calcular el área de cada uno de los triángulos pequeños amarillos* $\frac{b*h}{2}$ *;* $\frac{1*2}{2}=1$. *Como son dos triángulos, entonces el área, iría en* $2u^2$.

c. *Calcular el área para los triángulos amarillos grandes* $\frac{3*2}{2}=3u^2$, *y como son dos triángulos de igual tamaño (semejantes), entonces se lleva* $6u^2$

d. *El área de la región amarilla es de* $6u^2+2u^2=8u^2$

e. *Ahora se calcula el área de la región blanca. Como son dos triángulos, entonces es* $2*\frac{4*2}{2}=8u^2$

f. *Por lo tanto el área de la superficie blanca es igual al área de superficie amarilla, siendo contradictorio con lo que se había expresado de manera verbal en la anterior etapa del proceso de conjeturar.*

En ese sentido, se ha verificado que la conjetura inicial es FALSA, pero se puede reformular para afirmar que el área de la superficie amarilla es igual al área de la superficie blanca.

Opción 2.

Como la figura global es un cuadrado, y tiene de lado $4u$, *el área de éste sería* $16u^2$*; y como se comprobó anteriormente que el área de los dos triángulos blancos es de* $8u^2$, *entonces el área de la superficie coloreada de amarillo será de* $8u^2$, *lo cual confirma el razonamiento de la opción 2.*

Tarea 2

El proceso de verificar la conjetura

$\mathbf{a^3=[a(a-1)+1]+[a(a-1)+3]+\cdots+[a(a-1)+2a-1]}$

se puede presentar de la siguiente manera:

a. *Mirar que se cumple para la fila #4, es decir:*

- ✓ *El término del lado derecho ha de ser* $5^3=125$.
- ✓ *La suma del lado derecho debe tener 5 términos.*
- ✓ $a=4+1$*; el primer término de la suma ha de ser:* $[5(5-1)+1]=21$
- ✓ *Por lo tanto los otros 4 términos han de ser, 23, 25, 27 y 29, (impares consecutivos)*
- ✓ *Así,* **125=21+23+25+29**

b. *Mirar que se cumpla para la fila #5, es decir*

- ✓ *El término del lado derecho es* $(n+1)^3$*, así,* $\mathbf{6^3=216}$
- ✓ *La suma del lado derecho debe tener 6 términos* $a=5+1$*; el primer término de la suma ha de ser:* $[6(6-1)+1]=31$
- ✓ *Los otros 5 términos han de ser,* **33, 35, 37 39** *y* **41**, *(impares consecutivos)*
- ✓ *Así,* **216=31+33+35+37+39+41**

c. *Mirar que se cumpla para una posición mayor, por ejemplo qué igualdad estaría en la fila #20,* $n=20$, $\boldsymbol{a=20+1}$, *entonces:*

- ✓ *El término del lado izquierdo de la igualdad ha de ser* $(n+1)^3$*, así,* $\mathbf{21^3=9261}$
- ✓ *La suma del lado derecho de la igualdad debe tener 21 términos*
- ✓ *El primer término de la suma a de ser:* $[20(20-1)+1]=381$
- ✓ *Por lo tanto los otros* **20** *términos han de ser,*

383,385,387,389,391,393,395,397,399,401,403,405,407,409,411,413,415,417,419,421

ya que son los impares consecutivos.

Así,

9261 = 383, 385, 387, 389, 391, 393, 395, 397, 399, 401, 403, 405, 407, 409, 411, 413, 415, 417, 419, 421

Nótese que no se ha mostrado que la conjetura sea válida para cualquier $\boldsymbol{n}$, *solamente se ha verificado para tres casos, que por el momento genera un nivel de certeza sobre su validez.*

Tarea 3

Para verificar la conjetura planteada, se cuentan los cuadros de posiciones diferentes a las presentadas en la primera instrucción, para cada posición se aplica la fórmula encontrada, luego se contrasta este resultado con el anterior, si hay coincidencia, se empieza a considerar que la conjetura planteada es posiblemente válida. En lo que sigue se verifica la conjetura presentada en la tabla 3.

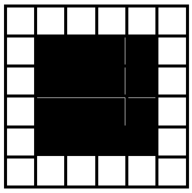


Figura 4

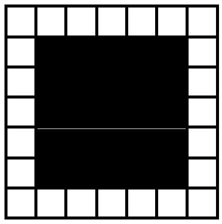


Figura 5

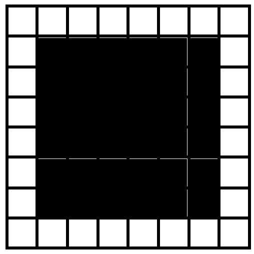


Figura 6

Posición	Número de cuadrados blancos	Aplicación de la fórmula
4	20	$4*(4+1)=20$
5	24	$4*(5+1)=24$
6	28	$4*(6+1)=28$

Tabla 4. Actividad de verificar conjeturas, ejemplos en las tareas propuestas

3.5. Generalizar conjeturas

La generalización de la conjetura implica un cambio de valor epistémico, un cambio de concepción frente a la conjetura como afirmación válida para determinados casos y que se ha de convertir en una regla generalmente aceptada, a tal punto de poder reconocer que ésta es verdadera para cualquier caso del contexto estudiado. Así, la verificación de varios casos no es suficiente para generalizar la conjetura, pero tampoco se requiere de un proceso formal de demostración para justificar la generalización, aunque se puede acudir a un paso intermedio y presentar algún tipo de prueba matemática, lo importante es poder llegar a convencer a otros, con argumentos fuertes, de que la conjetura es válida a nivel general, a partir del convencimiento propio de quién la plantea.

Generalizada la conjetura, el último paso en el proceso de conjeturar consiste en validar la conjetura generalizada. En la tabla 5 se presentan las generalizaciones de las conjeturas propuestas en los tres ejemplos que se han venido desarrollando a lo largo de este documento.

<table>
<tr><th colspan="2">Generalización de la conjetura</th></tr>
<tr><th>Tarea 1</th><th>Tarea 2</th></tr>
<tr><td>La generalización en esta situación es:
Sin importar el tamaño del cuadrado, pero manteniendo la razón entre las medidas de las superficies, es posible afirmar que el área de la superficie blanca siempre será igual al área de la superficie amarilla.</td><td>La generalización de la conjetura es:
Para la fila n, la igualdad ha de tener en su término de la izquierda el valor de $\mathbf{(n+1)^2}$, mientras que el término de la derecha ha de tener n+1 sumandos impares consecutivos de tal forma que se cumpla, que si a=n+1, entonces:
$$\mathbf{a^2=[a(a-1)+1]+[a(a-1)+3]+\cdots+[a(a-1)+2a-1]}$$
Esto para cualquier caso que se tome.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Tarea 3</th></tr>
<tr><td colspan="2">La generalización de la conjetura es la siguiente:
El número de cuadrados blancos en cualquier posición n se obtiene aplicando la fórmula 4(n+1).</td></tr>
</table>

Tabla 5. Actividad de generalizar conjeturas, ejemplo en las tareas presentadas

A partir de los ejemplos presentados, se puede observar que de manera transversal a la actividad de conjeturar se encuentra presente el proceso de argumentar, pues en cada una de las fases aparece una conclusión que debe ser validada a la luz de los antecedentes y del contexto en el que se esté trabajando. En ese sentido y ya que, por ejemplo, los argumentos que permiten concluir una observación difieren de los que permiten verificar una conjetura y estos a su vez difieren de los que permiten demostrar la conjetura, es necesario ahondar en el estudio del proceso de argumentar.

4. Proceso de Argumentar

El proceso de argumentar está presente en todos los momentos de la actividad matemática en los que se afirma algo, o en los que se quiere garantizar la verdad o falsedad de ciertas afirmaciones. Argumentar, es decir, el proceso de generar argumentos, tiene un carácter social y cobra sentido cuando hay la necesidad de garantizar la validez de alguna afirmación hecha. En este sentido, el valor de verdad de una afirmación depende del contexto en el que se esté desarrollando la actividad matemática, por ejemplo, para un grupo de estudiantes de básica primaria que están desarrollando un ejercicio de generalización sobre números naturales, verificar la propiedad general en muchos ejemplos podría ser un argumento válido, mientras que en un contexto de formación de profesores en el área de Aritmética, un argumento válido sería una demostración por inducción.

Para Toulmin (2003, pp. 92) un argumento tiene lugar cuando a partir de unos hechos o datos se elabora una afirmación (conclusión). El paso de los datos a la conclusión es el garante y, generalmente, hace referencia a una regla, norma o principio general. El garante, a su vez, se sustenta en un grupo de afirmaciones que hacen parte de un conjunto de contenidos o creencias denominado respaldo. Las refutaciones o reservas son el conjunto de circunstancias en las cuales el garante se podría anular y el cualificador modal es una construcción lingüística que acompaña a la conclusión, atenuándola, indica el grado de probabilidad o de fuerza de la conclusión. La figura 1 presenta la estructura de un argumento de acuerdo con este modelo.

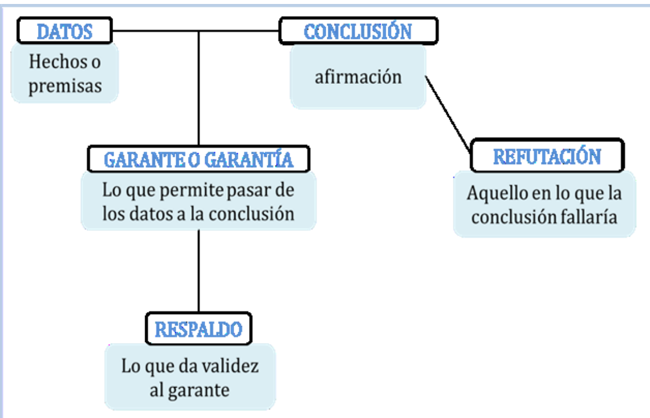


Figura 1. Estructura de un argumento

Para Harel y Sowder (1998), según Flores (2007, pp. 67), existen dos tipos de argumentos que dependen de la contundencia en que los datos son hilados de manera veraz en el garante y sustentados por los respaldos para dar fuerza a la conclusión, dejando sin oportunidad a las refutaciones. Según esto en matemáticas se considera *válido* un argumento que es sustentado por reglas teóricas y en los que se hace un correcto uso de la lógica.

Como ya se ha mencionado, parte de la actividad matemática responde al proceso de conjeturar abordado anteriormente, durante todo este proceso surgen argumentos que ayudan a obtener de manera eficiente el poder de convencimiento de que lo realizado es una conjetura y deja de serlo cuando se logra argumentar de manera adecuada. Por ello, se exhiben tipos de argumentos presentes en la actividad matemática con el objeto de profundizar más en los procesos de conjeturar.

Tipos de argumentos en la formulación de conjeturas

En la actividad matemática aparecen al menos tres tipos de argumentos diferentes, estos son: abductivo, inductivo y deductivo. Las definiciones de estos argumentos se hacen a partir de la propuesta de Peirce sobre los razonamientos utilizados para crear conocimiento científico (ver segunda etapa de desarrollo de la teoría de Peirce sobre razonamiento. Santaella ,2011). En este documento un razonamiento es un tipo especial de argumento.

La **abducción** es un tipo de argumento en el que el sujeto a partir de la observación de unos datos, extrae una conclusión, la cual en caso de ser verdadera, deriva la verdad de los datos iniciales. Por ejemplo, una persona saca muchas bolas de una bolsa, supongamos que todas las que sacó son de color blanco, de lo hecho se puede inferir que todas las bolas de la bolsa son blancas[4]. Este ejemplo muestra que hay una regularidad que permite discurrir la conclusión a partir de los datos. Dicha regularidad es considerada como el garante de este argumento.

En la formulación de conjeturas, se presentan argumentos de tipo abductivo, los cuales se logran al producir una conjetura a partir de unos datos observados. En estos argumentos, el garante corresponde a patrones, reglas, regularidades o propiedades que se identifican en los datos observados. (Soler-Alvarez y Manrique, 2012, pp. 6)

La **inducción** se presenta cuando teniendo la regla general o la conjetura planteada, se procede a experimentar para tratar de verificar si dicha regla o conjetura es verdadera. Algunos autores como Cañadas, Castro y Castro (2008, pp. 138) definen los argumentos inductivos de forma diferente a la mencionada, siguiendo a Neubert y Binko (1992), establecen que el razonamiento inductivo corresponde al paso de casos particulares a leyes generales. Las etapas en este proceso son: trabajo con casos particulares; organización de casos particulares; identificación de un patrón; formulación de conjetura; justificación de conjetura (basada en casos particulares); generalización; y demostración. Obsérvese que esta definición incluye los tres tipos de argumentos mencionados y los procesos de formular y validar conjeturas descritos anteriormente.

La **deducción** ocurre cuando, de premisas que se suponen verdaderas, se deduce una conclusión que debe ser verdadera. La deducción surge cuando en cada conjetura ya generalizada se desea mirar su validez, es decir, que argumentar no depende directamente de los objetos sino de sus propiedades, características que generalizan el objeto, para que pueda concluirse de manera satisfactoria.

Una conjetura normalmente se puede expresar de la forma $p \rightarrow q$, donde p y q son dos proposiciones, aunque hay que resaltar que las conjeturas adoptan generalmente esta estructura cuando se intenta probar que son válidas. Un razonamiento deductivo garantiza la validez de la conjetura si a partir de la verdad de q, se deduce necesariamente la verdad de p. En la figura 2 se presenta un esquema para los argumentos deductivos en el modelo de Toulmin.

[4] Es importante aclarar que la conclusión no es necesariamente verdadera.

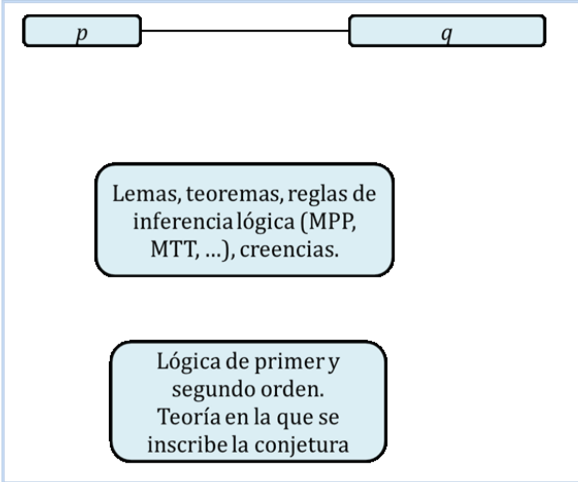


Figura 2. Esquema de un argumento deductivo según modelo de Toulmin

Para ejemplificar el proceso de argumentar, su relación con conjeturar y los tipos de argumentos, se presentan argumentos logrados en las tareas mencionadas anteriormente.

Tarea 1

En el momento de proponer la conclusión que el área de la región blanca es mayor que el área de la región amarilla, se evidencia un tipo de argumento abductivo proveniente de la percepción, bien puede ser por el contraste del color y los estilos o por la distribución de éstos dentro de la figura. En esta tarea no hay forma de verificar casos, puesto que sólo hay uno, así que el trabajo no presenta razonamientos de tipo inductivo.

Respecto al razonamiento deductivo se presentan diferentes argumentos de este tipo, uno de tipo geométrico al establecer correspondencias entre partes de la figura (tabla 4, opción 1-a), otros de tipo métrico cuando se establecen las medidas del área de la superficie (tabla 4, opción 1-b, 1-c, 1-d, 1-e). En cada caso se da un argumento respaldado por proposiciones matemáticas ya probadas y sólidas que dan sustento al argumento de que las áreas de las dos regiones son iguales.

Tarea 2

En el desarrollo de esta tarea se evidencia inicialmente un argumento de tipo abductivo, en el que se presenta una fórmula que permite determinar el resultado y los términos de la n-ésima fila. El garante de este argumento se encuentra en las características observadas en los números, como por ejemplo, suma de impares consecutivos y suma de números cúbicos.

En la tabla 4, tarea 2, opciones a, b y c se observa razonamiento inductivo, esto porque dada la conjetura, se busca verificar si en casos distintos a los usados inicialmente, la conjetura es válida.

Es posible observar al menos dos razonamientos deductivos en esta tarea, uno correspondiente a una demostración por inducción y otro a través del uso de propiedades de los números y las sumatorias finitas. La demostración por inducción debe hacerse en dos pasos, en la primera, se debe garantizar que para el primer elemento, la fórmula es válida, luego se acepta que es válida para una fila **k** y se muestra que para la fila **k+1** también es válida. El garante de este razonamiento corresponde al principio de inducción matemática.

El otro tipo de argumento deductivo usado se puede observar en la siguiente secuencia:

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[n^2-\left(n-(2i-1)\right)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}n^2-\sum_{i=1}^{n}n+\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$$

$$=n^3-n^2+n^2$$

$$=n^3$$

La expresión que se obtiene de esta secuencia es la siguiente:

$$n^2=\sum_{i=1}^{n}\left[n^2-\left(n-(2i-1)\right)\right]$$

Los garantes de este argumento se encuentran en las propiedades de las sumatorias de números naturales.

Tarea 3

Teniendo en cuenta la tarea 3, presentada en páginas anteriores, es posible contar de diferentes maneras el número de cuadrados blancos de la secuencia dada en la *figura 3*.

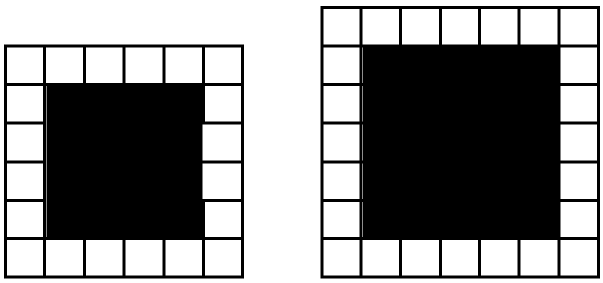


Figura 4 ***Figura 5***

Figura 3. Figuras de una secuencia

Cada forma de conteo (figura 4) plantea un argumento diferente, en el que la conclusión es la forma de contar los cuadrados de cualquier figura y los garantes corresponden a los patrones observados.

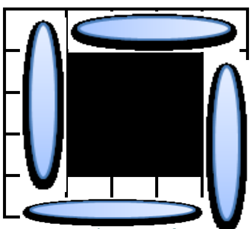


Figura 3

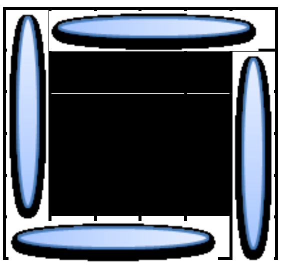


Figura 4

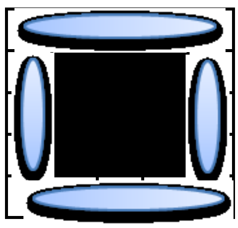


Figura 3

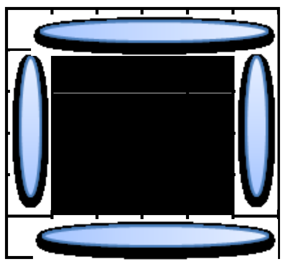


Figura 4

Figura 3

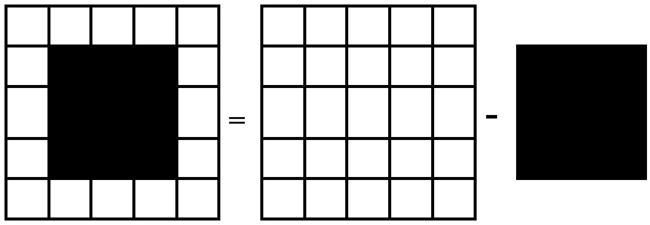


Figura 4

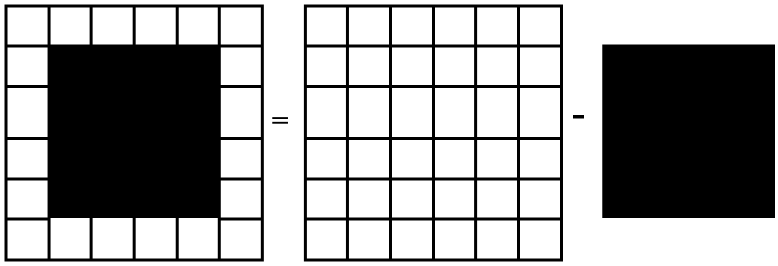


Figura 4. Diversas formas de conteo de los cuadros blancos

Cuando se verifica la conjetura para las posiciones 4, 5 y 6, y otras mayores como la 7, 10, 30, 50 u otra posición, se desarrollan razonamientos de tipo inductivo. En lo que sigue se presentan razonamientos inductivos para cada una de las conjeturas presentadas en la tarea 3.

Primera situación

Posición	Número de cuadrados blancos observados	Aplicación de la fórmula
4	20	$4*(4+1)=20$
5	24	$4*(5+1)=24$
6	28	$4*(6+1)=28$
10	44	$4*(10+1)=44$

Segunda situación

Posición	Número de cuadrados blancos observados	Aplicación de la fórmula
4	20	$2*(4+2)+2*(4)=20$
5	24	$2*(5+2)+2*(5)=24$
6	28	$2*(6+2)+2*(6)=28$
10	44	$2*(10+2)+2*(10)=44$

Tercera situación

Posición	Número de cuadrados blancos observados	Aplicación de la fórmula
4	20	$(4+2)^2-4^2=20$
5	24	$(5+2)^2-5^2=24$
6	28	$(6+2)^2-6^2=28$
10	44	$(10+2)^2-10^2=44$

En cada situación se evidencia la manera en que se cuentan los cuadrados blancos, hay que centrar la atención que dichas formas surgieron de un proceso abductivo, que fue refinado a partir de uno inductivo.

En el ejemplo que se está siguiendo, un razonamiento deductivo puede presentarse en esta tarea cuando habiendo llegado a diferentes fórmulas, se muestra que todas son equivalentes y llevan al mismo resultado.

Figura 5. Argumento deductivo identificado en la validación

Procedimiento:

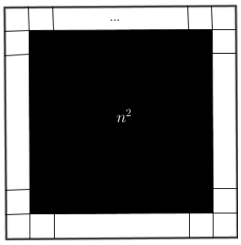
Opción 1	Opción 2
$\mathbf{(x+2)^2 - x^2}$	**(x+2)2+2x**
$\mathbf{=(x^2+4x+4) - x^2}$	**=2x+4+2x**
=4x+4	**=4x+4**
=4(x+1)	**=4(x+1)**

De esta manera se verifica la equivalencia de las tres situaciones y los tres hallazgos. El garante de este razonamiento corresponde a las propiedades de los números naturales utilizadas en el procedimiento, tales como el cuadrado de una suma, las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva.

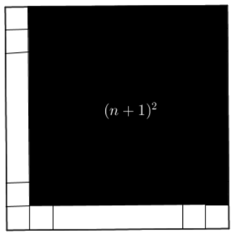
Este razonamiento muestra que hay tres fórmulas equivalentes que podrían describir el número de cuadrados blancos de la figura en cualquier posición. Esta equivalencia no garantiza la validez de alguna de las fórmulas, es posible que se hayan llegado a tres fórmulas erróneas pero equivalentes. La manera de demostrar la validez de alguna de estas fórmulas se logra por medio de una demostración por inducción. Se usará este método para demostrar que la conjetura es válida, asumiendo la primera situación. En esta se afirma que en la posición n hay **4(n+1)** cuadrados blancos.

Para la tercera posición hay **4(3+1)=16**, lo cual es verificable en las *figuras 3 y 4* de la Figura 4.

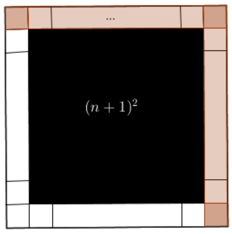
Se supone que se cumple para n, es decir que en la posición n hay **4(n+1)** cuadrados blancos. Para poder demostrar para la posición siguiente, **n+1**, se toma la construcción generalizada de la posición n, en ella hay un cuadrado negro de $\mathbf{n^2}$ cuadrados negros y **4(n+1)** cuadrados blancos a su alrededor.



En la posición **n+1**, se amplía en el cuadrado la zona negra, una columna a la derecha y una fila hacia arriba, con lo cual la zona negra tiene $\mathbf{(n+1)^2}$ cuadrados negros.



Para completar el cuadrado grande con las zonas blancas que faltan, que son **2(n+1)+1**, se aumenta por cada cuadrado negro en la primera fila, un cuadrado blanco arriba de éste y por cada cuadrado negro de la última columna se adiciona uno blanco a la derecha, para completar el cuadrado blanco faltan 3 cuadrados, uno en cada una de las esquinas, dando así **4(n+1)+4** que es equivalente a **4(n+2)**, que es el número de cuadrados blancos para la posición **n+1**.



4. A modo de conclusión

En las tres tareas se muestran los tipos de argumentos en distintos momentos. En la siguiente tabla se puede evidenciar una manera de relacionar los procesos de visualizar y conjeturar con los tipos de argumentos.

Proceso de Conjeturar / **Proceso de Argumentar**	**ESTUDIO DE DATOS** **VISUALIZACIÓN**	**IDENTIFICACIÓN DE PATRONES Y FORMULACIÓN DE CONJETURAS**	**VERIFICAR Y GENERALIZAR**
ABDUCCIÓN	La visualización permite identificar lo que es común, presumir cosas y tratar de establecer formas generales. *Por ejemplo:* Se presentan varias figuras, separándolas en que son *X* o no *X*. Se pregunta por una figura en particular y pedir si es *X* o no *X*.	De los casos estudiados se extrae u expresa una generalidad (conjetura). *Por ejemplo: x*, *y*, *z* y *w* cumplen la propiedad *X*, luego esta propiedad podría cumplirse en todos los casos similares.	Cuando se encuentran casos en los que la conjetura no es válida, se construye otra que pueda incluir el caso no válido para la anterior. *Por ejemplo:* Se confrontan las características de la figura con las posibles características de ser *X* y se construye *Y*.
INDUCCIÓN	La visualización permite determinar si en casos diferentes a los estudiados inicialmente, se	La verificación de la conjetura en diferentes casos permite	La verificación de la conjetura en diferentes casos permite saber qué tan general

	evidencia la conjetura formulada. *Por ejemplo:* Se presentan figuras diferentes a las estudiadas inicialmente, en las que se observan las mismas regularidades.	reformulaciones de esta, en las que se incluyen otros casos. *Por ejemplo*: *x* e *y* tienen la característica *X*, la cual no se ve exactamente igual en *z*. Se produce *X`* que se observa en *x*, *y* y *z*.	podría ser. *Por ejemplo: x* e *y* cumplen la propiedad *X*. Resulta que *z*, *w*, *h* y *k* también cumplen *X*. Se podría pensar que *X* es general.
DEDUCCIÓN	La visualización permite identificar con claridad los argumentos deductivos que se usan en la validación de una conjetura. *Por ejemplo:* Una persona plantea una secuencia *p*, *q*, *r* y *s* de argumentos deductivos para validar una conjetura. Otra persona, visualiza estos argumentos en el contexto dado, para identificarlos con claridad.	Se expresa la generalidad, desde lo simbólico o verbal. *Por ejemplo:* Dada la situación se generaliza de forma escrita, algunas veces usando lenguaje algebraico.	Se usan métodos de demostración pertinentes para la validación de los argumentos. *Por ejemplo:* Usando la característica de *X* se deduce la situación.

Tabla 6. Relaciones entre los procesos de conjeturar y argumentar

Una aplicación de la tabla 6 en las tareas desarrolladas se presenta a continuación.

Tarea	ABDUCCIÓN	INDUCCIÓN	DEDUCCIÓN
1	Las primeras intuiciones, aseguran que la zona amarilla es menor que la zona blanca.	Características de los triángulos amarillos, las cuadrículas.	Cálculo de áreas. Superposición de figuras.
2	Reconocimiento de suma de números impares. Reconocimiento de números cúbicos.	Regularidades entre las sumas de números impares y los cúbicos. Relación entre la cantidad de sumandos y el cubo. Comprobación para el siguiente. Planteamiento de la generalidad.	Prueba por inducción matemática, haciendo uso de las premisas generadas en la inducción. Uso de propiedades de la suma.
3	Los métodos gráficos de conteo	Las características de dichos métodos y la generalidad extraída de la verificación de casos.	Método inductivo.

Tabla 7. Procesos de conjeturar y argumentar a través de las tareas

En toda fase de desarrollo de la actividad matemática el proceso de argumentar debe estar presente con el objetivo de potenciar el pensamiento matemático y propiciar habilidades o competencias argumentativas. Así pues, la actividad matemática debe estar en pro de la producción y validación de conjeturas, generalidades, proposiciones, entre otros; para ello el proceso de argumentar debe enriquecerse cada vez más.

Las habilidades de argumentar van desde identificar y analizar argumentos en textos o ambientes educativos, hasta construirlos. Por lo tanto, las actividades matemáticas deben generar momentos de reflexión para que los procesos de conjeturar y argumentar aporten al desarrollo del pensamiento matemático y al desarrollo de otro tipo de competencias que atañen a los distintos campos del saber.

Bibliografía

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM Mathematics Education*. 40, 501-512.

Cañadas, M., Castro E. y Castro E. (2008). *Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3° y 4° de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas*. PNA, 2(3), 137-151.

Cañadas, M., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D. y Yevdokimov, O. (2008). Perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica: Tipos y Pasos. *Revista Enseñanza de las Ciencias*. 6 (3), 431-441.

De Gamboa, G. (2009). *Prácticas e interpretaciones en torno a la argumentación matemática de futuros maestros de educación primaria*. Tesis de Maestría. Bellaterra, España: Universidad Autonoma de Barcelona.

Flores, A. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de Matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática.* 19(1), pp. 63-98.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1988). *Rutas y raíces hacia el algebra* (C. Agudelo, Ed. y Trad.). Tunja, Colombia: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. (Trabajo original publicado en 1985).

Ministerio de Educación Nacional -MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá, Colombia. Editorial Magisterio.

Planchart, O. (2002). *La visualización y la modelación en el concepto de función*. (Tesis inédita de doctorado). Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Cuernavaca, México.

Santaella, L. (2011). *La evolución de los tres tipos de argumento: abducción, inducción y deducción*. Universidad de Sao Paulo. Brasil. Versión electrónica disponible en http://www.unav.es/gep/AN/Santaella.html. Documento recuperado el 16 de noviembre de 2012.

Soler-Alvarez, M. y Manrique, V. (2012). *Proceso de descubrimiento matemático en clases de matemáticas: los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo*. Documento de circulación interna. Bogotá.

Toulmin, S. (2003).*The uses of argument*. Cambridge. Cambridge University Press.

Ingrith Álvarez Alfonso. Licenciada en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Magister en Educación y Magister en Docencia de las Matemáticas. Profesora del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia y docente de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

José Leonardo Ángel Bautista. Licenciado en Matemáticas, Magister en Docencia de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, y Magister en Matemáticas de la Universidad de los Andes. Actualmente trabaja como docente del Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes y de la Universidad Pedagógica Nacional, y es integrante del grupo de Álgebra de ésta última.

Edwin Carranza Vargas. Licenciado en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Especialista en Edumatica Universidad Autónoma de Colombia, estudios de Maestría en Matemáticas Universidad Nacional de Colombia y Título de Maestría en Educación y TIC Universitat Oberta de Catalunya. Actualmente trabaja en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas y en la Universidad Pedagógica Nacional.

María Nubia Soler-Alvarez. Licenciada en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, Magister en Ciencias - Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia. Actualmente trabaja en Universidad Pedagógica Nacional y su área de interés es la argumentación y la prueba en la clase de matemáticas. Coeditora de Tecné, Episteme y Didaxis - TED, revista dedicada a la Educación en Ciencias, Matemáticas y Tecnologías. Vive en Bogotá. e-mail: nsoler@pedagogica.edu.co