ESTUDIO DE LOS PROCESOS DE ARGUMENTACIÓN Y DEMOSTRACIÓN

Jorge Fiallo
Universidad Industrial de Santander
jfiallo@uis.edu.co

Con el objetivo de aportar información para la mejor comprensión del proceso de aprendizaje de la demostración, analizamos la existencia de continuidad o distancia cognitiva entre los procesos de argumentar y demostrar que acaecen cuando los estudiantes desarrollan demostraciones de propiedades de las razones trigonométricas. Como resultado del análisis, planteamos cinco categorías de unidad o ruptura cognitiva que ayudan a comprender los logros y las dificultades en el proceso de demostración. En este artículo presentamos un ejemplo de una de las cinco categorías.

INTRODUCCIÓN

Algunas investigaciones han mostrado la discrepancia que existe entre los procesos de argumentación y de demostración (Duval, 1992-1993; Balacheff, 1988), mientras que otras (Boero, Garuti, Lemut y Mariotti, 1996; Douek, 1999; Pedemonte, 2002, 2005), desde una caracterización de la argumentación diferente a la de Duval, han resaltado la estrecha relación entre estos dos procesos y han propuesto la hipótesis de que la argumentación previa a una demostración puede resultar útil para la construcción de la misma. Nuestra caracterización de argumentación y demostración parte de aceptar las diferencias semántica, epistémica y funcional entre ellas, pero acepta las relaciones que se dan cuando la argumentación y la demostración se consideran como procesos. En este escrito presentamos un ejemplo de unidad cognitiva inductiva.

ARGUMENTACIÓN

Desde el punto de vista funcional decimos que la argumentación es una justificación racional, trata de convencer, se dirige a una audiencia universal y pertenece a un campo, en el caso de las matemáticas, al campo matemático (Pedemonte, 2002).

Desde el punto de vista estructural, un argumento está compuesto por un esquema (Toulmin, 1958) formado por (Figura 1):

Fiallo, J. (2013). Estudio de los procesos de argumentación y demostración. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 7-18). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

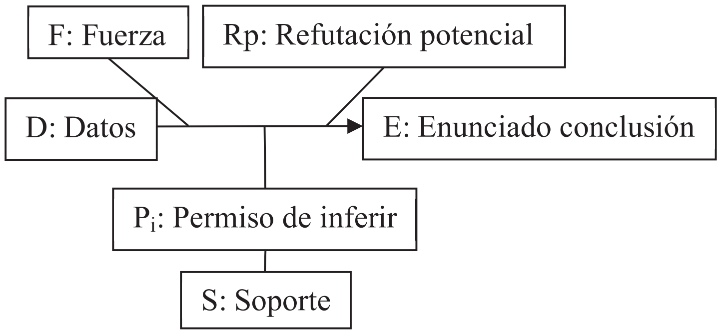


Figura 1: Modelo de Toulmin

- un *enunciado, E,* o conclusión que un interlocutor pretende justificar,
- unos *datos, D,* que sirven al interlocutor para justificar el enunciado,
- un *permiso de inferir, Pi*, que ofrece una regla, un principio general capaz de servir de fundamento a esta inferencia, de hacer de puente entre D y E.
- un indicador de *fuerza*, *F*, del argumento,
- una *refutación potencial*, *Rp*, del enunciado conclusión,
- un *soporte*, *S*, del permiso de inferir.

El primer paso en el argumento es la expresión de un punto de vista, es la conclusión, el objetivo del argumento. La argumentación debe apoyar esa afirmación, la cual se basa en un cierto número de datos que se producen para apoyar el enunciado. Para pasar de los datos al enunciado conclusión es necesario un permiso (regla o un principio general) que legitime ese paso, el permiso de inferir es la parte del argumento que establece la conexión lógica entre los datos y el enunciado conclusión. Si el argumento no se acepta, lo que se critica es el permiso de inferir (Pedemonte, 2005).

En general, las reglas y los datos no permiten inferir con un grado absoluto de certitud. Por eso se usa un indicador de fuerza que precisa la fuerza con la que la unión de datos al permiso de inferir permite alcanzar el enunciado. Es posible que ciertas circunstancias particulares impidan la aplicación del permiso de inferir al campo de los datos. Si hay excepciones al enunciado, disminuye la fuerza del permiso de inferir. Las condiciones de las excepciones o refutaciones potenciales se toman entonces en consideración (Pedemonte, 2005).

DEMOSTRACIÓN

La demostración es un caso particular de argumentación con unas características específicas. La demostración tiene como objetivo validar un enunciado, es convincente y se dirige a un auditorio universal, es relativa a un campo teórico que determina los criterios de aceptabilidad. En cuanto a las características estructurales, la demostración es una cadena deductiva de pasos constituidos por tres términos: *los datos*, *un enunciado conclusión* y *un teorema* que permite el paso de los datos a la conclusión. Por medio de una demostración, puede construirse un nuevo enunciado a partir de los axiomas y los primeros principios (Pedemonte, 2002).

En la clase lo que se puede considerar como demostración depende básicamente de las concepciones de demostración del profesor y de los estudiantes; es el profesor quien decide lo que puede considerarse como una demostración y cómo construirla, sin embargo el estudiante puede atribuir un valor de certeza a argumentos que no están necesariamente ligados a un sistema teórico. Los estudiantes buscan en una demostración una explicación, se esfuerzan en leer la demostración como herramienta para convencerse y convencer a otros; los profesores a menudo piden este esfuerzo (explícita o implícitamente), sin dar a los estudiantes las herramientas para ello. Una demostración no es un requisito previo de la convicción; al contrario, es más bien la convicción la que puede ayudar a la construcción de una demostración (de Villiers, 1993). El papel de una demostración no es solamente mostrar la validez de un teorema sino también mostrar las razones de esta validez. Una demostración debería permitir comprender el teorema, decir no solo qué es verdadero sino también por qué lo es. A veces los estudiantes tienen que hacer pruebas, comprobaciones empíricas después de una demostración porque la demostración no los convence (Healy y Hoyles, 2000). En el contexto didáctico, el papel explicativo de la demostración y su comprensión parecen más importantes que la aceptación de la validez de un teorema; en consecuencia, una demostración debe fomentar la comprensión y tener en cuenta el contexto de la clase y lo vivido por los estudiantes (Pedemonte, 2002). Los estudiantes prefieren las argumentaciones donde las relaciones matemáticas y los razonamientos se describen en el lenguaje común, que utilizan diagramas y ejemplos, porque son más próximas a su manera de expresar una justificación (Healy y Hoyles, 2000, p. 425).

Teniendo en cuenta las ideas expuestas en los párrafos anteriores, consideramos la *demostración* como *el proceso que incluye todos los argumentos plan-*

teados por los estudiantes para explicar, verificar, justificar o validar con miras a convencerse a sí mismos, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática.

RELACIONES ENTRE ARGUMENTACIÓN Y DEMOSTRACIÓN

Para superar la dicotomía entre argumentación y demostración se han llevado a cabo estudios que plantean la noción de *unidad cognitiva* (Boero, Garuti, Lemut y Mariotti, 1996), la cual se dirige a vincular argumentos espontáneos y argumentos matemáticamente aceptables. Para el análisis cognitivo de la continuidad que puede existir entre los procesos de argumentación que conducen a la explicación de una conjetura y su demostración desde el punto de vista estructural y del sistema de referencia, Pedemonte (2005) plantea una herramienta basada en la integración del modelo cK¢[1] (Balacheff, 1995; Balacheff y Margolinas, 2005) en el modelo de Toulmin (Figura 2).

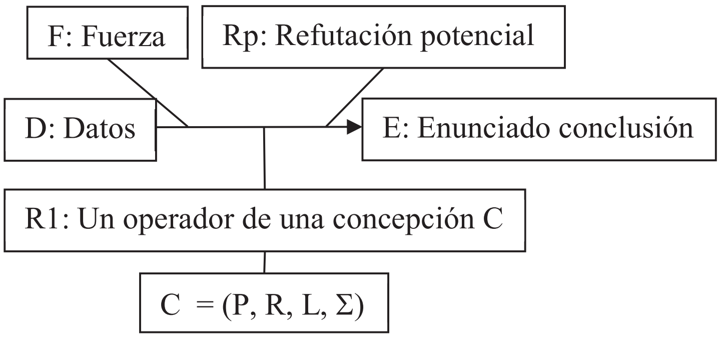


Figura 2: Integración del modelo cK¢ al modelo de Toulmin

El modelo cK¢ permite analizar el sistema de referencia *–unidad cognitiva referencial–* que toma en cuenta los sistemas de representaciones expresivas como el lenguaje, las heurísticas sobre el dibujo, etc. y los sistemas de conocimientos como las concepciones (Balacheff, 1995) y los marcos (Douady, 1986) que están en juego durante la construcción de una conjetura y el desarrollo de su demostración. Como la demostración hace referencia a una teoría matemática, el sistema de referencia representa una tentativa de organizar ciertos elementos que intervienen durante la argumentación para poder relacionarlos y compararlos con la teoría matemática que interviene durante la

[1] cK¢: “conception, knowing, concept” (Balacheff y Margolinas, 2005, p. 105).

demostración. El análisis estructural –*unidad cognitiva estructural*– puede ser realizado con el modelo de Toulmin.

Se puede decir que hay *continuidad referencial* entre la argumentación y la demostración si algunas palabras, dibujos, teoremas usados en la demostración también se han usado en la argumentación para dar soporte a la conjetura. Hay una continuidad estructural entre la argumentación y la demostración si algunos pasos deductivos o inductivos usados en la argumentación están presentes también en la demostración. De lo contrario, si la estructura de la argumentación es inductiva y la demostración es deductiva, entonces hay una distancia estructural entre los dos (Pedemonte, 2005).

La argumentación puede estar relacionada con el planteamiento de una conjetura en dos formas: la *argumentación constructiva* contribuye a la construcción de una conjetura, así es que precede al enunciado, mientras que la *argumentación estructurante* justifica una conjetura, previamente construida como un hecho, y así es que ella viene después (Pedemonte, 2002).

EJEMPLO DE UNIDAD COGNITIVA INDUCTIVA

Usando un archivo de geometría dinámica (Figura 3) donde se representan las seis razones trigonométricas con vectores, se les plantea a los estudiantes la siguiente tarea:

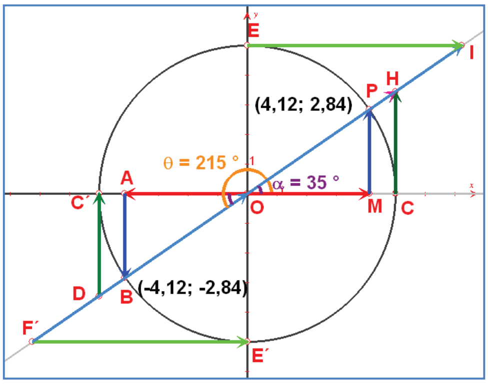


Figura 3: Imagen del archivo dinámico

3.6.7 Conjeturando

¿Qué relación existe entre $cos(180 + \alpha)$ y $\cos(\alpha)$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

3.6.8 Demostrando

Explica por qué es verdadera tu conjetura planteada en 3.6.7.

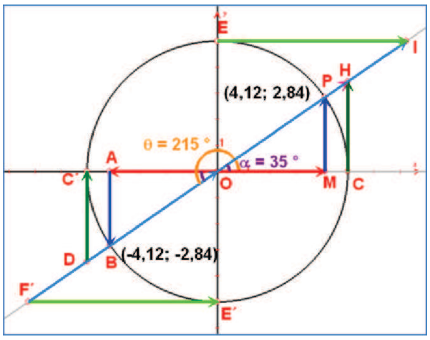
Proceso de argumentación

1 Mabe: Yo creo que uno puede hablar de eso en el tercero y en el primero, o sea, cuando el ángulo θ está en el tercer cuadrante, porque ya cuando está en otro cuadrante θ no es $180 + \alpha$.

2 Inv.: Necesariamente θ debe estar en el tercer cuadrante.

3 Inv.: ¿Qué relación encontraron?

4 Mabe: Que $\cos(180 + \alpha) = -\cos(\alpha)$



D$_1$:

Archivo

D$_2$: Es necesario que θ esté el cuadrante III [1]

E$_1$: $\cos(180 + \alpha) = -\cos(\alpha)$[4]

R$_1$: α es el ángulo de referencia de θ [6]
R$_2$: $\cos(\alpha)$ y $\cos(180 - \alpha)$ tienen signos contrarios [7]
R$_3$: $\angle MOP = \angle AOB$ por opuestos por el vértice [9]

Marco perceptivo

5 Inv.: ¿Por qué?

6 Mabe: Porque el ángulo α es el ángulo de referencia de θ.

7 Mabe: Entonces como el coseno es positivo solo en el primero y en el último, enton-

ces tienen signo contrario.

8 Inv.: ¿Los ángulos α son congruentes?

9 Mabe: Sí, porque son opuestos por el vértice.

Análisis y comentarios del proceso de argumentación

Podemos considerar que el grupo "ve" la relación a través de los vectores OM y OA (Figura 3), e intenta buscar argumentos en el diagrama dinámico para justificar el enunciado.

Los operadores R_1 a R_3, se refieren a relaciones válidas entre los ángulos y las razones trigonométricas percibidas en el diagrama dinámico, que no justifican matemáticamente la relación planteada.

El sistema de representación va del uso del diagrama dinámico (L_1) para visualizar las relaciones, al uso del lenguaje natural (L_2) para expresar verbalmente lo que observan en el diagrama.

El control perceptivo (Σ_1) es ejercido por las continuas visualizaciones de las relaciones en el diagrama dinámico.

La forma de argumentación es estructurante y la estructura de la conjetura es inductiva.

Proceso de demostración

10 Inv.: ¿Para que la relación quede matemáticamente demostrada, qué hay que hacer?

11 Mabe: ¿Si uno tiene que los ángulos son opuestos por el vértice, tiene que demostrar que los triángulos son congruentes?

12 Inv.: Sí, ¿Qué es coseno?

13 Mabe: Esto [señala el vector rojo en el primer cuadrante (Figura 3)]

14 Inv.: Ahí la estamos visualizando, pero, ¿cuál es la definición?

15 Cata: Adyacente sobre hipotenusa.

16 Inv.: Adyacente sobre hipotenusa o x sobre r, ¿cierto?, entonces, sí es necesario demostrar que los x son iguales.

17 Mabe: Es que los ángulos son iguales, por opuestos, y los radios son iguales, ¿qué

más puedo decir sin utilizar medidas? Porque si no cogería las coordenadas y ya.

18 Inv.: ¿Cómo es el otro ángulo?

19 Cata: Recto.

20 Mabe: Uno recto y el otro ya es igual, entonces, ya con eso son iguales.

21 Inv.: Con eso, los dos triángulos son congruentes. Entonces, ¿si los dos triángulos son congruentes, qué pasa con la distancia en x, o con el adyacente?

22 G2A: Es la misma.

23 Mabe: ¿Entonces, en la conjetura solo que son opuestos, y lo otro para la demostración?

24 G2A: [Escriben en la hoja de trabajo: "θ está ubicado en tercer cuadrante, α es un ángulo agudo en el primer cuadrante. Como el coseno es positivo en el I y IV cuadrante, el $\cos(180 + \alpha)$ tiene el mismo valor absoluto que su ángulo de referencia α, pero con signo contrario (–)"]

D$_1$:

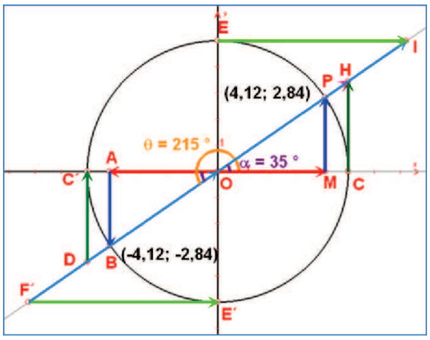


Figura 1: Archivo 3.4.1

D$_2$: Es necesario que θ esté el cuadrante III [1]

D$_3$: coseno es el vector rojo ($\overrightarrow{OM}$) [13]

D$_4$: $\cos(\alpha) = \frac{adyacente}{hipotenusa}$ [15]

D$_5$: E$_{11}$ $\cos(\alpha) = \frac{x}{r}$ [16]

E1: $\cos(180 + \alpha) = -\cos(\alpha)$[4]

R$_4$: $\angle MOP = \angle AOB$ por opuestos por el vértice [17]

R$_5$: $OP = OB$ por ser radios [17]

R$_6$: $\angle OMP = \angle OAB$ por ser rectos [20]

R$_7$: $R_3 \wedge R_6 \wedge R_7 \Rightarrow \Delta MOP = \Delta AOB \Rightarrow \overline{OM} = \overline{OA}$ [20] – [22]

R$_8$: $\cos(\alpha)$ y $\cos(180 + \alpha)$ tienen igual valor absoluto, pero signos contrarios [24]

Marco perceptivo

Análisis y comentarios del proceso de demostración

El grupo sigue en el terreno perceptivo, intentando encontrar propiedades en el diagrama dinámico para justificar la relación, pero no recurre a la definición de coseno en el plano, a pesar del dato (D_5) suministrado por el investigador. La atención la centran en justificar la congruencia de los triángulos. Al final justifican en el lenguaje natural la relación E_1.

Los operadores siguen siendo relaciones visualizadas en el diagrama dinámico, apuntado a demostrar la congruencia de los triángulos AOB y MOP.

El sistema de representación sigue siendo el diagrama de Cabri y el lenguaje natural para expresar lo que ven.

El control sigue siendo el diagrama dinámico.

El tipo de demostración es un ejemplo genérico analítico (Fiallo, 2010), basado en la generalización de las propiedades que ven en el ejemplo cuando α en el primer cuadrante y θ en el tercer cuadrante.

En este episodio se evidencia la dificultad que se presenta para poder establecer conexiones entre los marcos geométrico, algebraico y analítico, necesarios para la construcción de una demostración deductiva. El grupo se queda en el terreno de lo perceptivo geométrico y no es capaz de relacionar las propiedades observadas con las definiciones y propiedades de las razones trigonométricas en el plano cartesiano.

Análisis de la unidad cognitiva

Esquema global de la argumentación	Esquema global de la demostración
D_1g, D_2rang, D_3repgcos, D_4deftr, D_5defpc → E_1itrig R_1rang, R_2rsigpc, R_3rang	D_1g, D_2rang, D_3repgcos, D_4deftr, D_5defpc → E_1itrig R_4rang, R_5relt, R_6rang, R_7rlt, R_8rsigpc

deftr:	definición en el triángulo rectángulo	repgcos:	representación geométrica de coseno
itrig:	identidad trigonométrica	relt:	relación lados del triángulo
rang:	relación entre ángulos	rsigpc:	relación de signos en el plano cartesiano

Análisis de la continuidad del sistema de referencia

ARGUMENTACIÓN **E₁**: $\cos(180+\alpha)=-\cos(\alpha)$			**DEMOSTRACIÓN** **E₁**: $\cos(180+\alpha)=-\cos(\alpha)$		
CONCEPCIÓN			CONCEPCIÓN		
OPERADORES $\mathbf{R_1}$: α es el ángulo de referencia de θ. $\mathbf{R_2}$: $\cos(\alpha)$ y $\cos(180+\alpha)$ tienen signos contrarios. $\mathbf{R_3}$: $\angle MOP = \angle AOB$ por opuestos por el vértice.	**SIST. DE REPR.** $\mathbf{L_1}$: Diagrama dinámico. $\mathbf{L_2}$: Lenguaje natural (uso de expresiones verbales).	**E. DE CONTROL** $\mathbf{\Sigma_1}$: Perceptivo (visualización de los vectores y relaciones entre ángulos y triángulos).	**OPERADORES** $\mathbf{R_4}$: coseno es el vector rojo. $\mathbf{R_5}$ $\cos(\alpha)=\frac{ady}{hip}$ $\mathbf{R_3}$: $\angle MOP = \angle AOB$ por opuestos por el vértice. $\mathbf{R_6}$: $OP = OB$ por ser radios. $\mathbf{R_7}$: $\angle OMP = \angle OAB$ por ser rectos. $\mathbf{R_8}$: $R_3 \wedge R_6 \wedge R_7 \Rightarrow \Delta MOP = \Delta AOB \Rightarrow \overline{OM} = \overline{OA}$. $\mathbf{R_9}$: $\cos(\alpha)$ y $\cos(180+\alpha)$ tienen igual valor absoluto, pero signos contrarios	**SIST. DE REPR** $\mathbf{L_1}$: Diagrama dinámico. $\mathbf{L_2}$: Lenguaje natural (uso de expresiones verbales).	**E. DE CONTROL** $\mathbf{\Sigma_1}$: Perceptivo (visualización de los vectores y relaciones entre ángulos y triángulos).
Marco perceptivo – geométrico			Marco perceptivo – geométrico		
CONTINUIDAD DEL SISTEMA DE REFERENCIA					

Análisis de la continuidad estructural

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Estructurante	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva perceptiva	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Inductiva
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN **EGA**: Los argumentos están basados en propiedades matemáticas visualizadas en el ejemplo cuando θ está en el tercer cuadrante.
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

Aunque usan algunos datos y operadores nuevos en el proceso de demostración, estos están relacionados con los usados en el proceso de argumentación.

El sistema de representación sigue siendo el diagrama dinámico de Cabri (L_1) y el lenguaje natural (aunque en el esquema se escriben algebraicamente).

El control sigue siendo perceptivo, caracterizado por la identificación de los elementos geométricos y las relaciones entre ángulos y triángulos en la construcción de Cabri.

La continuidad estructural se da porque las argumentaciones de los estudiantes siguen basadas en lo observado en el ejemplo genérico y no en teoremas.

Consideramos que en este ejemplo la continuidad del sistema de referencia es favorable, puesto que los datos y operadores usados en la conjetura no están apoyados en datos numéricos, sino en relaciones matemáticas descubiertas en el diagrama dado que pueden llegar a ser generalizadas, de tal manera que el control sea teórico. La ruptura estructural puede lograrse a través de algunas refutaciones potenciales y datos (definiciones y teoremas) que ayuden a completar de manera general el proceso de demostración.

CONCLUSIONES

Esta unidad cognitiva no favorece la construcción de demostraciones deductivas. Las dificultades que se presentan para la demostración son las siguientes: el uso de ejemplos o propiedades observadas en el diagrama dinámico no posibilitan un control teórico que permita el cambio de una concepción perceptiva-numérica del proceso de argumentación a un marco algebraico o analítico en el proceso de demostración. Dada esta continuidad del sistema de referencia, no es posible la ruptura estructural. Otra dificultad detectada en este caso es la imposibilidad de poder establecer conexiones entre los marcos geométrico, algebraico y analítico.

REFERENCIAS

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège* (Tesis doctoral). Université Joseph Fourier, Grenoble, Francia.

Balacheff, N. (1995). Conception, connaissance et concept. En D. Grenier (Ed.), *Didactique et technologies cognitives en mathématiques, séminaires 1994-1995* (pp. 219-244). Grenoble, Francia: Université Joseph Fourier.

Balacheff, N. y Margolinas, C. (2005). cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. En A. Mercier y C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75-106). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

Boero, P., Garuti, R., Lemut, E., Mariotti, A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 113-120).Valencia, España: Universidad de Valencia.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5-31.

Douek, N. (1999). Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications. En I. Schwank (Ed.), *Proceeding of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (vol. 1, pp. 125-139). Osnabrück, Alemania: Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik.

Duval, R. (1992-1993). Argumenter, démontrer, expliquer: Continuité ou rupture cognitive? *Petit x, 31*, 37-61.

Fiallo, J. (2010). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica* (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia, España.

Healy, L. y Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 396-428.

Pedemonte, B. (2002). *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démostration dans le apprentisage des mathématiques* (Tesis doctoral). Université Joseph Fourier - Grenoble I, Grenoble, Francia.

Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 25*(3), 313-348.

Villiers, M. de (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, 26, 15-29.

Toulmin, S.E. (1958). *The uses of argument*. Reino Unido: Cambridge University Press.