TRES EJEMPLOS PARA DISCUTIR LA EXISTENCIA DE OBJETOS GEOMÉTRICOS

Édgar Guacaneme
Universidad Pedagógica Nacional
guacaneme@pedagogica.edu.co

Se presentan tres ejemplos, extraídos de sendas experiencias, a través de los cuales se abre un panorama para discutir la existencia de objetos geométricos más allá de sus posibilidades ostensivas. El primer ejemplo incorpora el carácter elusivo de la representación de la idea matemática de razón, entendida como relación entre tamaños de magnitudes geométricas homogéneas. El segundo ejemplo alude a una aproximación a la idea de mediatriz como un lugar geométrico que no satisface una condición lógica, ni su condición "opuesta". El tercer ejemplo se refiere a la imposibilidad de construcción de una parábola a través de una heurística de regla y compás, a pesar de la determinación por esta vía de varios de sus puntos.

INTRODUCCIÓN

La existencia de los objetos geométricos ha sido un asunto de preocupación de la Filosofía de las Matemáticas quizá desde sus inicios como actividad intelectual; varios académicos (v.g., Acerbi, 2011; Cassou-Nogués, 2005; Gardies, 2004; Harari, 2003; Radford, 2006) presentan sugestivas aproximaciones a tal problemática. Desde la perspectiva curricular de las matemáticas escolares, la discusión sobre la existencia en Matemáticas encuentra un ámbito particular de discusión en el segundo capítulo de los *Lineamientos Curriculares*, especialmente en el apartado en que se propone una "reflexión sobre diferentes concepciones acerca de la naturaleza de las matemáticas y sus implicaciones didácticas" (MEN, 1998, pp. 21-25). En los procesos educativos de formación de profesores de Matemáticas este asunto se está abordando como parte de las discusiones metamatemáticas que de manera más frecuente e intencional incorporan los programas de formación y sus formadores, particularmente en actividades que propenden a la formación del conocimiento histórico-epistemológico del profesor de Matemáticas (Torres y Guacaneme, 2011a, 2011b).

Guacaneme, É. (2013). Tres ejemplos para discutir la existencia de objetos geométricos. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 23-34). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Para aportar a tal discusión, a continuación se presentan tres ejemplos, extraídos de sendas experiencias, a través de los cuales se abre un panorama para discutir la existencia de objetos geométricos más allá de sus posibilidades ostensivas. El primer ejemplo incorpora el carácter elusivo de la representación de la idea matemática de razón, entendida como relación entre tamaños de magnitudes geométricas homogéneas. El segundo, alude a una aproximación a la idea de mediatriz como un lugar geométrico que no satisface una condición lógica, ni su condición "opuesta". El tercer ejemplo se refiere a la imposibilidad de construcción de una parábola a través de una heurística de regla y compás, a pesar de la determinación por esta vía de varios de sus puntos.

EL CARÁCTER ELUSIVO DE LA REPRESENTACIÓN DE LA IDEA MATEMÁTICA DE RAZÓN

Este primer ejemplo tiene como contexto de surgimiento la tesis doctoral que actualmente desarrollamos en el marco del Doctorado Interinstitucional en Educación, Énfasis en Educación Matemática (sede Universidad del Valle), y algunos trabajos de grado dirigidos en programas de formación de profesores en la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia).

En trabajos previos (Guacaneme, 2012; Quintero, Molavoque y Guacaneme, 2012), al examinar las ideas de *razón* y *proporción* en los Libros V y VI de *Elementos*, hemos discutido brevemente el asunto de la representación de estas en el ámbito de las magnitudes geométricas.

Retomemos, entonces, inicialmente la definición de la idea de razón propuesta por Euclides en el Libro V:

> Definición V.3. Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas. (Euclides, 1994, p. 9)

Este enunciado establece un aspecto central: la razón es una relación. Cabe entonces preguntarse ¿cómo se representa una relación en la geometría euclidiana? o, de manera más concreta, ¿cómo Euclides representa la razón entre dos magnitudes homogéneas?

Para aproximar una respuesta a estas preguntas, desde la óptica de las figuras o los dibujos (entendidos como forma de representación), hay que advertir que algunos historiadores y epistemólogos (v.g., Gardies, 1997, pp. 127-155) reconocen en *Elementos* el uso de dos tipos de figuras para representar los objetos geométricos: propias e impropias. Las primeras representan magnitudes geométricas específicas u objetos específicos (v.g., segmentos, ángulos, triángulos, cuadriláteros, círculos); las figuras impropias las utiliza para representar números o magnitudes geométricas en general. En la Figura 1 (izquierda) hemos incluido la figura propia que Euclides presenta para la proposición 13 del Libro VI[1]; en la Figura 1 (derecha) presentamos la figura impropia de la proposición 14 del Libro V[2].

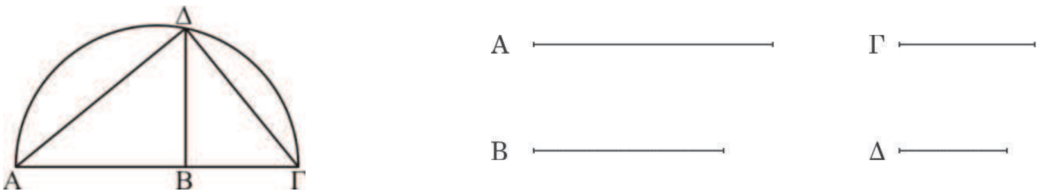

Figura 1: Figura propia y figura impropia en los Libros VI y V de *Elementos*[3]

En el Libro VI, Euclides emplea figuras propias; si allí se refiere a triángulos o paralelogramos, los dibujos contienen efectivamente figuras usuales de tales objetos geométricos. En cambio, en el Libro V si el autor griego alude a magnitudes geométricas en general (i.e., longitudes, superficies, volúmenes, y amplitudes angulares –simultáneamente) el dibujo contiene trazos rectilíneos (que no hay que interpretar como segmentos ni como longitud de segmentos, exclusivamente).

Con esta caracterización de las figuras, nos hemos dado a la tarea de identificar figuras (propias o impropias) que representen la idea de razón; sin embargo, no hemos encontrado figura alguna en los Libros V y VI –ni en *Elementos* (Euclides, trs. 1991, 1994, 1996), ni en otra de las obras atribuidas a Euclides (McDowell y Sokolik, 1993)– que constituya una representación de la razón. Con base en esto, nos atrevemos a afirmar que no existe en la geometría euclidiana representación, mediante figuras, de la razón, concebida como relación.

[1] VI.13. "Dadas dos rectas, hallar una media proporcional." (Euclides, tr. 1994, p. 74)

[2] V.14. "Si una primera (magnitud) guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta y la primera es mayor que la tercera, la segunda será también mayor que la cuarta, y si es igual, será igual, y si es menor, menor." (Euclides, tr. 1994, p. 40)

[3] Tomadas de Euclides (tr. 1994, pp. 75, 40).

Si dirigimos la atención al discurso verbal de la obra euclidiana en cuestión, y específicamente al uso de palabras, expresiones verbales y notaciones, relacionadas con la idea de razón, reconocemos un amplio espectro de expresiones que incorporan la palabra razón (v.g., guarda razón, guardan la misma razón, razón mayor, razón duplicada, razón triplicada, razón por alternancia, razón por inversión, composición de una razón, separación de una razón, conversión de una razón, razón por igualdad), pero no logramos identificar en ninguna de ellas una manera de representar la razón. Quizá lo más cercano a una representación de la razón esté en el reconocimiento implícito en la obra euclidiana de la existencia de un *antecedente* y un *consecuente* en cada razón, cuya relación con respecto a su tamaño es precisamente la razón. No obstante lo anterior, somos conscientes de que esto no constituye un representación. El panorama no cambia mucho al examinar las notaciones para la idea de razón, pues en *Elementos* no hay uso de notación simbólica (ni nominal) alguna para la idea de razón. Las notaciones más ampliamente difundidas para la razón entre dos magnitudes (v.g., $a\!:b$ o $\frac{a}{b}$) son relativamente modernas[4].

De lo anterior es fácilmente deducible que en *Elementos*, Euclides no emplea representación alguna de la idea de razón y, en consecuencia para el asunto de interés de esta conferencia, la existencia de las razones (e incluso su comprensión) no reside ni se deposita en –o a través de– sus representaciones. Pareciera entonces que la existencia de esta emerge exclusivamente del discurso matemático hipotético deductivo o, si se prefiere, su existencia es netamente discursiva. En este sentido el siguiente diálogo, entre un discípulo de Euclides y su maestro, surgido de nuestra imaginación cobra sentido:

— Euclides, por favor, muéstrame una razón.

— No puedo, pero si lees mi magistral obra (*Elementos*) la encuentras.

Este hecho nos lleva a un estado de incertidumbre acerca de cómo un individuo (cognitivo, epistémico, social) puede lograr comprensión de un objeto geométrico que se presenta discursivamente sin representación ostensiva alguna. Esta incertidumbre persiste tanto en una postura platónica (en la cual, a riesgo de ser simplista, las ideas matemáticas preexisten y el acceso a las mismas se da a través del trabajo mental con sus representaciones) como en

[4] Grattan-Guinness (1996) refiere que la notación "::" procede del siglo XVII y la atribuye a William Oughtred.

una postura empírica (en la cual las expresiones perceptivas de los objetos juegan un papel fundamental para el conocimiento de los mismos).

Esta incertidumbre puede llegar a constituir un problema docente legítimo, es decir, un problema que configura –o debiera configurar– un reto para el conocimiento profesional del profesor de Matemáticas y que de manera concreta se puede expresar, entre otras opciones, en la pregunta ¿puedo promover procesos de aprendizaje de la idea matemática de razón, sin poner en contacto a mis estudiantes con representaciones de tal idea?

Para abordar tal inquietud parece conveniente indagar por la existencia de representaciones de la idea de razón. Quizá la primera que venga a la mente de un profesor sea alguna de las expresiones simbólicas usuales: $a\colon b$ o $\frac{a}{b}$. La primera de ellas menos empleada que la segunda, y en cierto sentido en desuso; la segunda, completamente análoga a la notación de fracción y, por tanto, propensa a conllevar la identificación de dos ideas (i.e., razón y fracción) sustancialmente distintas o de naturaleza epistémica diversa[5]. A más de estas notaciones, es bastante probable que ninguna otra idea ilumine la mente del profesor. Sin embargo, si un profesor recuerda algunos de los conocimientos del curso de Teoría de Conjuntos de su formación inicial (en caso de que lo haya habido), particularmente aquellos que refieren a las relaciones entre conjuntos entendidas como subconjuntos del producto cartesiano de estos, puede aceptar que la siguiente gráfica (ver Figura 2), y particularmente el punto, representa ostensiblemente la razón de la magnitud *a* y la magnitud *b*, es decir, la relación entre sus tamaños.

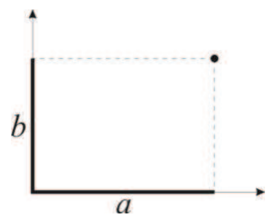

Figura 2: Representación cartesiana de la razón entre los tamaños de las magnitudes *a* y *b*

Bajo esta representación cartesiana se podría comprender la discusión que propone que entre las razones no debe establecerse una *igualdad*, pues una razón sólo es igual a sí misma (o en lo gráfico, cada punto sólo es igual a sí

[5] Esta idea la plantea magistralmente Hans Freudenthal en su capítulo sobre razón y proporcionalidad (Freudenthal, 1983/2002).

mismo). También, puede comprenderse cuándo cuatro magnitudes son proporcionales, o cuándo *guardan la misma razón* dos a dos; ello se puede lograr estableciendo si los dos puntos, correspondientes a sendas razones, y el origen del sistema cartesiano son colineales. No obstante la existencia de esta posible representación de las razones, se debe ser consciente de que la misma exige una homogenización de las magnitudes geométricas (i.e., la representación a través de trazos rectilíneos finitos, de cualquier tipo de magnitud geométrica), asunto trivializado –y hasta subvalorado– en las matemáticas escolares.

Por otra parte, recientemente, en un trabajo de grado (Barón y Barragán, 2013), que tuve la fortuna de dirigir, se realizó el estudio de un artículo (Berghout, 1974, 1975) en el cual, al tratar el asunto de la evolución histórica de las razones hacia una perspectiva numérica, y particularmente la contribución del trabajo de Oresme en tal dirección, se incluyen unos dibujos de segmentos rectilíneos que podrían representar razones (ver Figura 3).

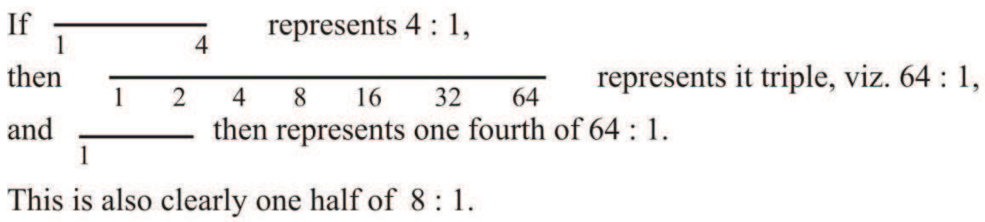

Figura 3: Uso de segmentos rectilíneos para representar razones[6]

Comprender aspectos básicos del funcionamiento de esta representación constituyó un reto al conocimiento matemático personal, fundamentalmente porque el sistema de representación usual de longitudes en una recta coordenada condiciona la lectura de la representación en cuestión; sin embargo, una simple transformación de tal recta, a través de incorporar potencias de 2 (ver Figura 4) nos ayudó a comprender, entre otros asuntos, que el segmento que representa la razón 64:1 es el triple del que representa la razón 4:1, asunto totalmente relacionado con la idea de razón triplicada[7] expresada en *Elementos*.

[6] Facsímil tomado de Berghout (1975, p. 70); por ello ni las longitudes de los segmentos ni la distribución de los números es muy precisa.

[7] Definición V.10. "Cuando cuatro magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la cuarta una razón triplicada de la que (guarda) con la segunda, y así siempre, sucesivamente, sea cual fuere la proporción." (Euclides, tr. 1994, p. 14)

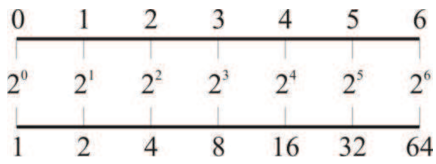

Figura 4: Transformación de una recta usual a través de las potencias de 2

A pesar de la comprensión lograda hasta acá, debemos reconocer la existencia de nuevos retos matemáticos como aquel que supone la ubicación en este mismo *eje* de *cualquier razón*, reto que puede llegar a ser trivial si se asume una correspondencia a través de la función de variable real definida por la expresión $f(x) = 2^x$ (o si se prefiere, de su función inversa, f^{-1}). Más allá de este tipo de retos, surgen otros relevantes para el asunto del presente artículo, relacionados con el conocimiento profesional del profesor de Matemáticas; uno de ellos se puede expresar a través de una pregunta, similar a una ya planteada antes: ¿puedo promover procesos de aprendizaje de la idea matemática de razón, poniendo en contacto a mis estudiantes con alguna de las dos representaciones de tal idea, presentadas inmediatamente antes?

UNA APROXIMACIÓN A LA IDEA DE MEDIATRIZ COMO LUGAR GEOMÉTRICO

El segundo ejemplo tiene como contexto de surgimiento un fragmento del curso titulado "Incorporación de la geometría analítica en primaria y secundaria", a cargo del doctor Carlos Hernández Garciadiego del Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México, desarrollado en el marco de la "Escuela-seminario Internacional Construcción de Capacidades en Matemáticas y Educación Matemática", conocida como CANP-2012 (*Capacity & Networking Project*) que tuvo lugar en San José de Costa Rica del 6 al 17 de agosto de 2012. En este curso el doctor Hernández presentó, entre otros, algunos aspectos del software GeoLab[8], del que es coautor y presentó algunas propuestas de aula para usarlo en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría.

Una de tales propuestas se refirió a la construcción de la idea de mediatriz, como lugar geométrico constituido por los puntos que equidistan de dos puntos dados, a través de la experimentación que posibilita el software. Para ello se ubicaron dos puntos dados o *fijos* (A y B) en el plano y un punto genérico o

[8] http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/PUEMAC_2008/geolab/html/intro.html

móvil (P); luego se estableció el valor de las distancias entre los puntos dados y el punto genérico y se construyó una condición lógica a través de la expresión $\mathrm{d}(A,P) < \mathrm{d}(B,P)$. De esta manera, el punto P sería visible solo si su ubicación respecto de los puntos A y B satisface la condición lógica. Posteriormente, se empleó la herramienta de lanzar aleatoriamente puntos que satisficieran la condición lógica, obteniéndose en la pantalla lo que aparece en la Figura 5. A partir de ello se sugirió que se espera que los aprendices construyan una imagen mental asociada a la idea de mediatriz, que eventualmente en un futuro co-actúe con una definición de esta como lugar geométrico.

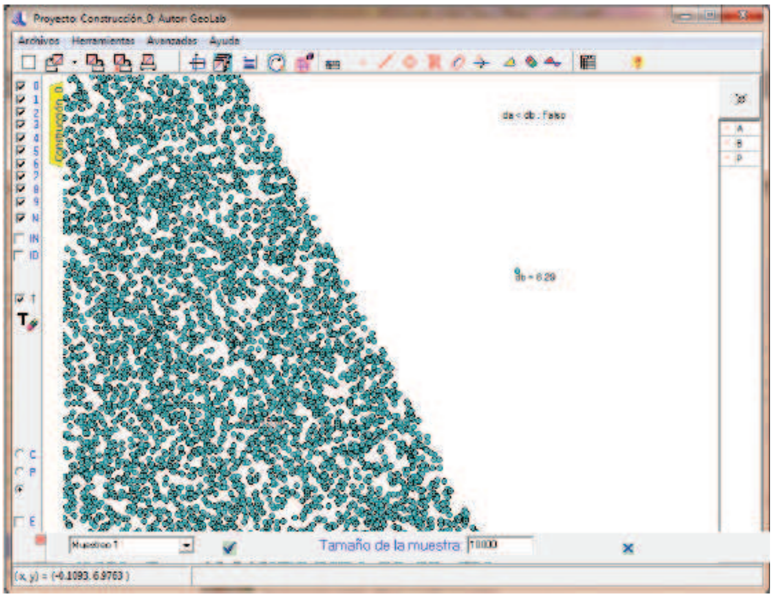

Figura 5: Imagen del software GeoLab relacionada con la construcción de la idea de mediatriz

Los puntos destacados en la pantalla de la Figura 5 corresponden a aquellos cuya distancia al punto A es menor que su distancia al punto B, pero no precisamente los de la mediatriz en cuestión. Si la condición lógica hubiese sido la "opuesta", es decir $\mathrm{d}(A,P) > \mathrm{d}(B,P)$, la situación sería análoga, pues los puntos que se destacarían en la pantalla tampoco serían los de la mediatriz. Así, la existencia de la mediatriz está dada, no por los puntos equidistantes, sino por los no equidistantes que el software ha dibujado aleatoriamente.

Desde nuestra perspectiva, la situación acá descrita ofrece entonces un ejemplo de existencia de un objeto geométrico, no porque se exhiban los puntos que lo constituyen, sino precisamente por lo contrario. La mediatriz existe por la negación de las dos condiciones lógicas, a saber: $\mathrm{d}(A,P) < \mathrm{d}(B,P)$ y

$d(A, P) > d(B, P)$. Esto, en términos de su representación, implica que el aprendiz debe “ver” el lugar geométrico no en su representación ostensiva, sino a través de unas representaciones de “su negación”, asunto llamativo para la discusión sobre la existencia de objetos geométricos en ausencia de su representación.

IMPOSIBILIDAD DE CONSTRUCCIÓN DE UNA PARÁBOLA A TRAVÉS DE UNA HEURÍSTICA DE REGLA Y COMPÁS

El tercer ejemplo tiene como contexto uno de los cursos realizados con los estudiantes del Énfasis en Historia y Educación Matemática de la cohorte 2013 del programa de Especialización en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional. Allí, el profesor Jhon Bello, a cargo de dirigir el curso que pretende abordar la discusión acerca de la mediación instrumental en la construcción de conocimiento matemático, desde una perspectiva histórica, propuso una tarea cuyo enunciado era: “Construya una parábola usando regla y compás”.

Una vez que los estudiantes consultaron diversos documentos, organizaron la presentación de la respuesta a la tarea y expusieron *sus* resultados, es decir, la comprensión que habían logrado de los procesos que habían encontrado y estudiado. En la Figura 6 se presenta la imagen de uno de tales procedimientos.

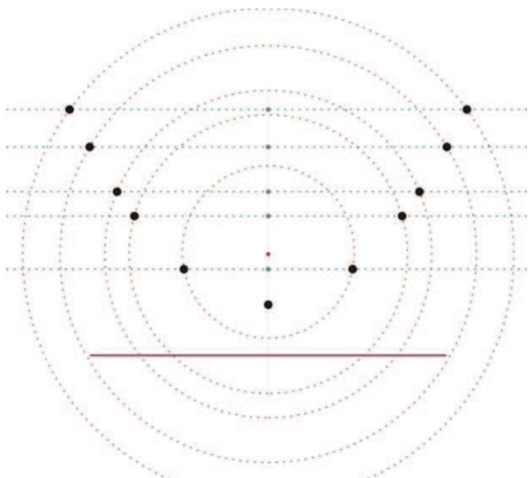

Figura 6: Construcción con regla y compás de *algunos* puntos de una parábola

En todos los procesos presentados se incluyó una definición de la parábola como lugar geométrico; así mismo, todos los procesos circunscribían el trabajo con regla y compás (i.e., el trabajo con rectas y circunferencias) y tenían en común que permitían construir un conjunto finito de puntos que efectivamente pertenecen a la parábola, pero ninguno de los procedimientos exhibía una construcción que permitiera "trazar la curva en su totalidad" o al menos trazar un fragmento de la misma de manera "continua". Este hecho constituyó entonces el centro de discusión de un fragmento de la sesión de clase donde se expresaron puntos de vista acerca de lo que efectivamente es una construcción con regla y compás, así como la potencial imposibilidad de construir una parábola dentro de una heurística determinada por estos instrumentos.

Sin embargo, para esta conferencia el episodio comentado antes interesa en la medida en que nos ofrece un ambiente para proponer y dar sentido a la pregunta si la existencia discreta de algunos puntos, dados por la construcción, garantiza la existencia de la parábola en cuestión, o si la existencia de la parábola depende de la posibilidad de construcción a través de una heurística específica (v.g., la regla y el compás).

Esta cuestión ofrece también la oportunidad de discutir si efectivamente el conjunto finito de puntos constituye una "buena" representación del lugar geométrico o si su carácter discreto y finito no ofrece un buen ambiente para la representación del carácter continuo de la curva en cuestión.

Apertura a una discusión

Lo presentado hasta acá no pretende ir más allá del título del artículo y, en consecuencia, constituye tan solo un punto de partida para que los profesores de Matemáticas, formadores de profesores e investigadores en Educación Matemática emprendamos una discusión metamatemática, como lo es la discusión acerca de la existencia de los objetos geométricos, a partir de la cual seamos un poco más conscientes de cómo tal existencia puede emerger en situaciones matemáticas escolares o puede tener implicaciones en la comprensión que de las Matemáticas van logrando nuestros estudiantes. Es esta pues, una sencilla invitación a una discusión totalmente abierta en donde las diferentes voces se deben pronunciar y escuchar, para favorecer el conocimiento *sobre* las Matemáticas (y no solo *de* las Matemáticas) tan necesario para el ejercicio docente en Matemáticas, para la misión de educar a los profesores de Matemáticas y para la ardua tarea investigativa en los campos de la Educación Matemática y la Educación de los profesores de Matemáticas.

REFERENCIAS

Acerbi, F. (2011). The language of the 'givens': Its forms and its use as a deductive tool in Greek mathematics. *Archive for History of Exact Sciences, 65*(2), 119-153.

Barón, O. y Barragán, P.J. (2013). *Una teoría antigua vista con los ojos del hoy: influencia sobre el profesor de matemáticas* (Trabajo de grado). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Berghout, R.F. (1974). The historical development of magnitudes, ratios and proportions. *Australian Mathematics Teacher, 30*(5), 184-196.

Berghout, R.F. (1975). The historical development of magnitudes, ratios and proportions. *Australian Mathematics Teacher, 31*(2), 66-76.

Cassou-Nogués, P. (2005). Gödel and 'the objective existence' of mathematical objects. *History and Philosophy of Logic, 26*(3), 211-228.

Euclides (1991, trad.). *Elementos. Libros I-IV* (María Luisa Puertas, Tr.; con Introducción de Luis Vega Reñón). Madrid, España: Gredos.

Euclides (1994, trad.). *Elementos. Libros V-IX* (María Luisa Puertas, Tr.; con Introducción de Luis Vega Reñón). Madrid, España: Gredos.

Euclides (1996, trad.). *Elementos. Libros X-XIII* (María Luisa Puertas, Tr.; con Introducción de Luis Vega Reñón). Madrid, España: Gredos.

Freudenthal, H. (2002). Ratio and proportionality. En *Didactical phenomenology of mathematical structures* (pp. 178-209). New York, EUA: Kluwer Academic Publishers (primera edición, 1983).

Gardies, J.-L. (1997). L'organisation des mathématiques grecques de Théétète à Archimède. París, Francia: Librairie Philosophique J. Vrin.

Gardies, J.-L. (2004). *Du mode d'existence des objets de la mathématique*. París, Francia: Librairie Philosophique J. Vrin.

Grattan-Guinness, I. (1996). Numbers, magnitudes, ratios, and proportions in Euclid's *Elements*: How did he handle them? *Historia Mathematica, 23*(4), 355-375.

Guacaneme, É.A. (2012). Significados de los conceptos de razón y proporción en el Libro V de los Elementos. En O.L. León (Ed.), *Pensamiento, epistemología y lenguaje matemático* (pp. 99-135). Bogotá, Colombia: Fondo de Publicaciones Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Harari, O. (2003). The concept of existence and the role of constructions in Euclid's *Elements*. *Archive for History of Exact Sciences, 57*(1), 1.

McDowell, G. y Sokolik, M. (1993). *The data of Euclides*. Baltimore, EUA: Union Square Press.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. Bogotá, Colombia: Autor.

Quintero, A.L., Molavoque, M.J. y Guacaneme, É.A. (2012). Diferencia entre semejanza y proporcionalidad geométrica desde una perspectiva histórica. *Revista de Ciencias, 16*, 75-85.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*, 103-129.

Torres, L.A. y Guacaneme, É.A. (2011a, julio). *Aproximación a las estrategias curriculares de formación en historia de las matemáticas en programas de formación inicial de profesores de matemáticas*. Ponencia presentada en XVIII Congreso Colombiano de Matemáticas, Bucaramanga, Colombia.

Torres, L.A. y Guacaneme, É.A. (2011b, octubre). Caracterización de las estrategias curriculares de formación en historia de las matemáticas en programas de formación inicial de profesores de matemáticas. Ponencia presentada en IV Encuentro de programas de formación inicial de profesores de Matemáticas y V Seminario de Matemática Educativa. Fundamentos de la Matemática Universitaria, Escuela Colombiana de Ingeniería "Julio Garavito", Bogotá, Colombia.