

ANÁLISIS DEL DISEÑO DE ACTIVIDADES PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Pedro Gómez
Universidad de Granada • pgomez@valnet.es

Proponemos un esquema y algunos criterios para el análisis del diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esta propuesta está basada en las nociones de análisis didáctico y organizadores del currículo que describimos y de las que enfatizamos su carácter sistémico y cíclico. El análisis de los diseños considera la calidad y la coherencia de la información propuesta a la luz de estas nociones. Describimos algunas de las características que se pueden identificar en los diseños cuando se analizan de acuerdo con este esquema y estos criterios.

INTERÉS E IMPORTANCIA DEL ANÁLISIS DEL DISEÑO DE ACTIVIDADES

Nuestro interés por el análisis de tareas de diseño de actividades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas surge de la necesidad de comentar y evaluar las producciones de nuestros alumnos en una asignatura de didáctica de la matemática para futuros profesores de matemáticas de secundaria. Buscamos aportar a la discusión y a la resolución de algunas de sus dificultades e inquietudes, por un lado, y valorar, comparar y clasificar estas producciones, por el otro. Desde la perspectiva de nuestros alumnos, el hecho de explicitar, como formadores, estos criterios significa que aportamos otra perspectiva de nuestra visión acerca de lo que es el diseño de actividades y les permitimos tener una guía para la revisión que ellos pueden hacer de su trabajo.

El análisis del diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas puede ser importante e interesante en otros contextos. Es el caso de la evaluación de propuestas de innovación curricular o de materiales y textos para la enseñanza. Este tipo de análisis también es importante en la exploración del conocimiento didáctico del profesor de matemáticas (Llinares, 2000; Gómez, 2001a, b, c).

PROBLEMÁTICA DE LA EVALUACIÓN DE DISEÑOS

La evaluación de diseños es necesaria en aquellas actividades en las que resulta difícil observar y evaluar su realización práctica. Éste es evidentemente el caso de los diseños de actividades de enseñanza, pero también es el caso en áreas como la arquitectura y la ingeniería. La manera ideal de evaluar un diseño consiste en llevarlo a práctica (realizarlo, construirlo) y evaluar la medida en la que esa realización práctica satisface sus propósitos. Sin embargo, cuando resulta difícil llevar a la práctica el diseño u observar y evaluar la medida en que este diseño satisface sus propósitos, es necesario desarrollar esquemas y criterios que permitan vislumbrar de manera sistemática y objetiva su *calidad*. Abordamos la noción de calidad de un diseño como la medida en la que la realización de ese diseño satisface sus propósitos. Si suponemos que todo diseño busca resolver un *problema*, entonces al analizar un diseño buscamos vislumbrar las posibilidades de éxito de la realización práctica del diseño en su propósito de resolver el problema correspondiente.

En el caso de actividades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas el análisis de la calidad de los diseños curriculares se hace muy complejo por varias razones. Primero, resulta difícil observar y analizar la puesta en práctica del diseño. Esto requiere, en general, de la observación y análisis de la gestión de clase por parte del profesor y del análisis de la interacción entre profesor y alumnos en la construcción del conocimiento matemático. En segundo lugar, la evaluación de la calidad de los diseños debería partir del supuesto de que su propósito es el de aportar a la comprensión de los alumnos. Por consiguiente, el propósito final no es la gestión de la clase, sino la manera como el diseño y su puesta en práctica, a través de la gestión de la clase, aportan a la comprensión de los alumnos. Adicionalmente, el análisis de la comprensión de los alumnos es, de por sí, un proceso complejo. Finalmente, aunque la gestión de la enseñanza por parte del profesor debería hacer parte del diseño mismo, cuando el diseño se lleva a la práctica, intervienen gran cantidad de factores no previstos que pueden afectar el resultado. Por lo tanto, el análisis del diseño es tan sólo un indicador de sus posibilidades *de éxito*.

Sería entonces deseable construir criterios de análisis que permitieran vislumbrar la manera como un diseño, al ser llevado a la práctica, puede afectar la construcción por parte de los alumnos de su conocimiento matemático. Sin embargo, las reflexiones anteriores muestran la dificultad de construir esos criterios. Es evidente que no existen esquemas preestablecidos para identificar aquellas características de un diseño de actividades de enseñanza que aseguren su éxito desde el punto de vista de sus efectos en la comprensión de los estudiantes cuando el diseño se lleve a la práctica. Tenemos entonces que restringir el análisis desde tres perspectivas. Primero, los criterios que buscamos no pueden ser considerados como criterios que aseguren el éxito del diseño. Sin embargo, sí pueden ser criterios que nos permitan *comparar* diseños desde la perspectiva de sus posibilidades de éxito. Segundo, los criterios que buscamos deben ser criterios de análisis de la información contenida en los diseños mismos y en la justificación presentada por sus autores. Y tercero, el análisis de los diseños de actividades de enseñanza tiene que partir de una posición con respecto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Profundizamos en este último punto.

El análisis y evaluación de cualquier actividad lleva implícita una posición con respecto a lo que se considera válido (correcto, apropiado, mejor) como producto de esta actividad. Sin embargo, dada la complejidad de los procesos involucrados en educación, no es posible justificar de manera absoluta una posición con respecto a la validez de un diseño de actividades. Hiebert (1999) discute esta problemática en relación con la evaluación de los estándares. La solución a este problema conceptual y metodológico consiste en exponer de manera explícita nuestra posición acerca de cómo se deberían o podrían realizar y presentar diseños de actividades de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Para ello, describimos a continuación el marco conceptual que sustenta el diseño curricular del plan de formación del que estamos a cargo.

ANÁLISIS DIDÁCTICO Y CONOCIMIENTO DIDÁCTICO

El programa de formación en cuestión es una asignatura para estudiantes de matemáticas de último año que quieren llegar a ser profesores de matemáticas de secundaria. Nos centramos en el propósito de la asignatura de formar estos futuros profesores en un aspecto particular de su futura práctica docente: la planificación de unidades didácticas. Por lo tanto, esta parte de la asignatura se centra en el diseño curricular. El desarrollo curricular y la gestión de clase se trabajan en otra asignatura de prácticas que está parcialmente

relacionada con la nuestra. Trabajamos entonces dentro de una visión *local* del diseño curricular en la que hay un diseño global que enmarca el problema y el foco de interés es en un tópico matemático específico (que permite mayor profundidad en el análisis).

Se pretende que, al terminar la asignatura, los futuros profesores tengan un conocimiento y unas capacidades que les permitan realizar estas actividades de planificación de manera eficiente (con respecto al aprendizaje de los estudiantes). Por lo tanto, es necesario determinar qué conocimiento deben tener los profesores para que esto sea posible. Y para ello, es necesario postular una descripción de lo que consideramos que debe ser el proceso de planificación de una unidad didáctica. Vemos esta planificación como la secuenciación de actividades de aprendizaje (incluyendo la evaluación) por medio de las cuales los alumnos construyen su conocimiento matemático. El ciclo de enseñanza de las matemáticas de Simon nos dio ideas para postular el *análisis didáctico*¹ como nuestra propuesta de la manera como el profesor debe llegar a producir la planificación. En ella distinguimos:

- la relación entre el diseño global y el diseño local,
- las actividades que son necesarias para realizar el diseño local, y
- el papel que juega el conocimiento didáctico en el proceso.

En el análisis didáctico registramos cuatro actividades que el profesor debe realizar para el diseño, puesta en práctica y evaluación de actividades de enseñanza:

El *análisis cognitivo*, como la consideración y especificación de las dificultades que los alumnos pueden enfrentar y los errores que los alumnos pueden cometer al realizar las tareas que componen las actividades de instrucción.

El *análisis de contenido*, como la descripción estructurada del tópico en el que se basa la actividad de instrucción desde la perspectiva de su estructura conceptual, sus sistemas de representación, su análisis fenomenológico y sus posibilidades de modelización.

El *análisis de instrucción*, como la descripción de las actividades que se propondrán a los alumnos teniendo en cuenta la variedad de tipos de tareas que surgen del análisis de contenido, las necesidades de los alumnos (con motivo del análisis cognitivo), y los materiales y recursos disponibles.

El *análisis de actuación*, como la descripción del estado cognitivo de los alumnos con motivo de las actividades, información que alimenta un nuevo ciclo del análisis didáctico.

La gráfica de la Figura 2 ubica los cuatro análisis que se acaban de describir y los relaciona con el diseño curricular global, el diseño, puesta en práctica y evaluación de las actividades de aprendizaje, y el conocimiento didáctico del profesor. Recordemos que nuestro interés se centra en el diseño curricular *local* que considera una estructura matemática específica. A partir del diseño curricular global y de su conocimiento del estado cognitivo de los estudiantes, el profesor determina unos objetivos y un contenido. Con esta información y su conocimiento didáctico, y realizando los análisis cognitivo, de contenido y de instrucción, el profesor produce el diseño de una o más actividades de aprendizaje que lleva a la práctica. El análisis de la actuación de los estudiantes cuando ellos abordan las tareas que componen las actividades de aprendizaje produce información que, por un lado, le permite al profesor reformular su percepción del estado cognitivo de

1. Utilizamos el término “análisis didáctico” de manera genérica. No pretendemos introducir un nuevo término sino utilizarlo para encapsular una serie de actividades que se describen a continuación.

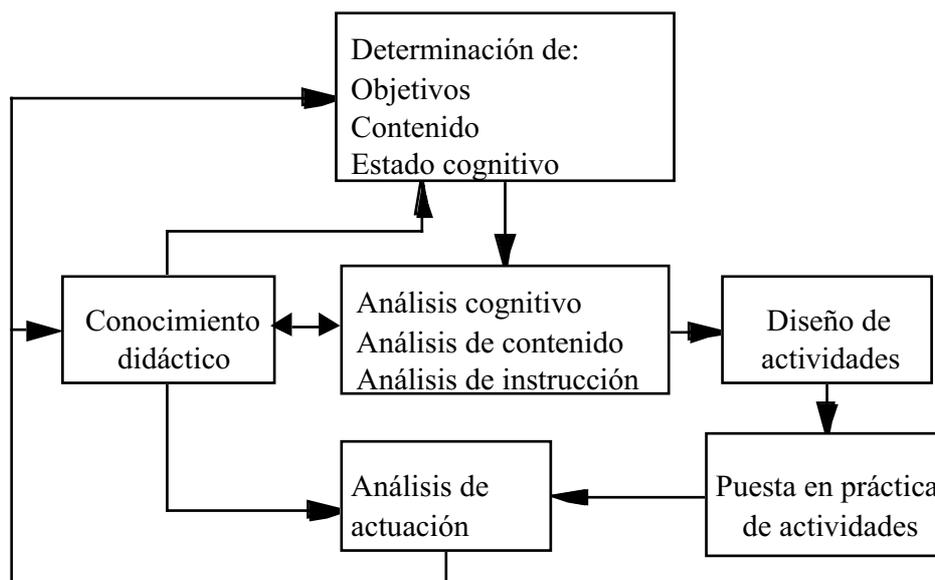


Figura 1. Análisis didáctico

sus estudiantes y, por el otro, puede llevarlo a adaptar algunos aspectos de su conocimiento didáctico.

Conocimiento didáctico

La postulación del análisis didáctico como la descripción de la manera “ideal” de realizar actividades de diseño curricular a nivel local nos permite determinar algunos de los conocimientos que pueden ser necesarios para realizarlo.

Podemos organizar estos conocimientos en tres categorías:

- a) Sobre la noción de currículo.
- b) Sobre nociones de la didáctica de la matemática que consideramos relevantes en el problema.
- c) Sobre la utilización de a) y b) en una estructura matemática particular para efectos de realizar el análisis didáctico.

En la asignatura se pretende que los futuros profesores construyan un conocimiento sobre a) y b) y desarrollen capacidades para realizar c). El conocimiento didáctico es la integración de a), b) y c). El conocimiento didáctico es un constructo psicológico:

- que tiene un conocimiento disciplinar de referencia (en este caso, la didáctica de la matemática);
- que tiene una utilidad práctica (el diseño, puesta en práctica y evaluación de unidades didácticas); y
- cuya puesta en juego se enmarca dentro de una estructura analítica (el análisis didáctico).

Al describir lo que consideramos que debería ser la actividad de planificación a nivel local en base a los cuatro análisis del análisis didáctico y la relación entre el análisis didáctico y el conocimiento didáctico y el resultado y puesta en práctica de la planificación, surge naturalmente la pregunta acerca de cuáles son las nociones de la didáctica de la matemática que consideramos más relevantes para que se puedan realizar los diferentes análisis del análisis didáctico. Ésta es una elección. La podemos justificar, pero no podemos afirmar que sea la única opción posible. Las nociones que incluimos en un análisis dado son las que consideramos necesarias (conocer y saber utilizar) para poder

lograr los propósitos expuestos en la definición de dicho análisis. De esta manera organizamos temáticamente el saber disciplinario que sirve de referencia al conocimiento didáctico. (**Mirar Veal & Makinster).

El modelo de la Figura 2 muestra la elección que hemos hecho en nuestra asignatura.

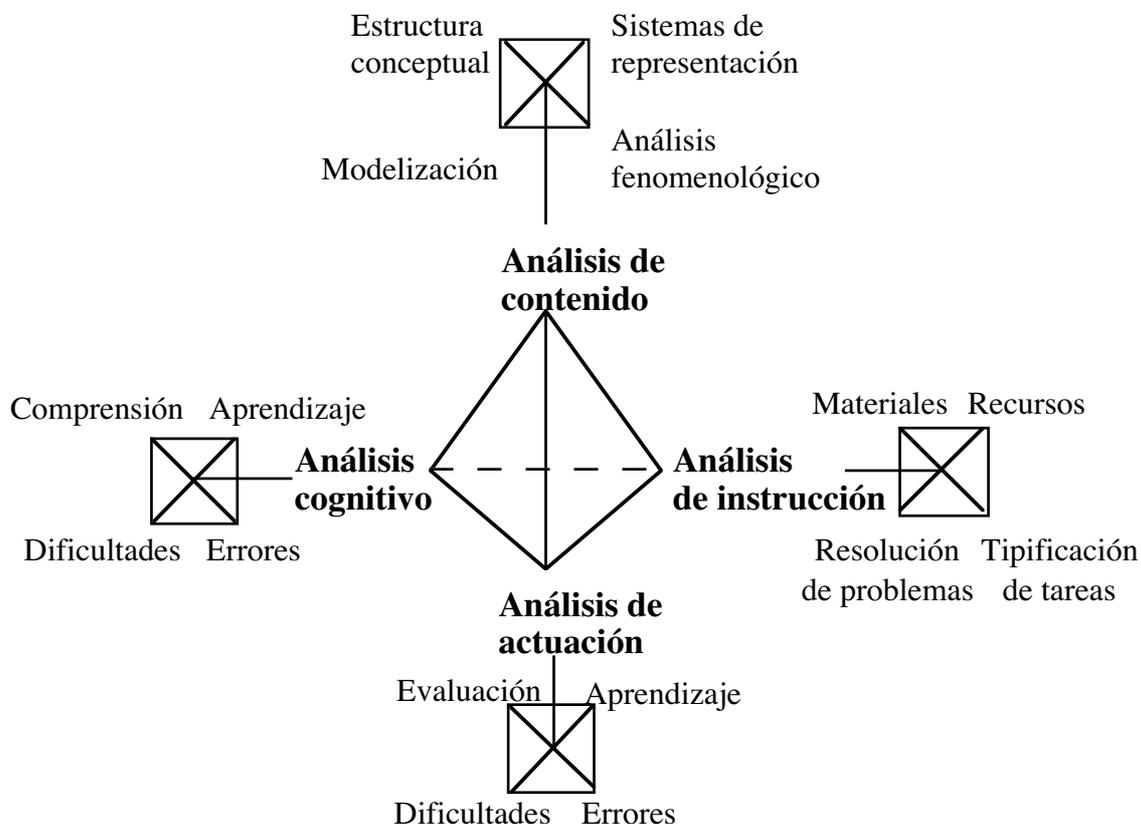


Figura 2. Nociones de la educación matemática en el análisis didáctico

Algunos de estos conceptos han sido integrados en lo que Rico et al. (1997) denominan “organizadores del currículo”. El esquema no pretende describir cómo se hace el análisis; pretende identificar y resaltar la relación entre las nociones a la hora de realizar el análisis didáctico. La noción de currículo como herramienta de diseño global se encuentra en el trasfondo, pues sirve de soporte para el diseño local. Como explicaremos más adelante, el análisis didáctico es la expresión local del diseño curricular global y es el medio gracias al cual es posible pasar de diseños centrados en secuenciación de contenidos a diseños locales que tienen en cuenta todas las dimensiones.

El modelo de la Figura 2 pretende enfatizar la importancia de la conexión e interacción entre los diferentes análisis y organizadores del currículo, como lo sugerimos en Gómez (2000). Comenzamos por el análisis de contenido que debe producir, desde una perspectiva didáctica, una descripción estructurada del contenido a enseñar. Esta descripción parte de la estructura conceptual, en base a los sistemas de representación. El análisis fenomenológico busca establecer una clasificación de los fenómenos que son organizados por la estructura matemática en cuestión (Puig, 1997), en base a la identificación de las características estructurales de esos fenómenos y su relación con elementos y propiedades de sub estructuras de la estructura matemática, que los modelizan. De esta manera, el análisis de contenido es un proceso cíclico e integrado en el que la informa-

ción producida en la aplicación de una noción potencia la aplicación de las otras nociones. El análisis cognitivo parte de una posición constructivista del aprendizaje y del análisis, en base a la investigación y los resultados del análisis de contenido, de las dificultades que los estudiantes tienen con respecto al tópico y los errores que pueden cometer cuando abordan tareas que ponen en juego partes de la estructura matemática en cuestión. La eficiencia en la identificación de estos errores y dificultades dependerá de la calidad de la descripción de la estructura matemática hecha en el análisis de contenido y estos dos análisis se alimentarán mutuamente. El análisis de contenido permite producir una tipificación de las posibles tareas para el tópico en cuestión (como veremos más adelante). A partir de esta tipificación y teniendo en cuenta los resultados del análisis cognitivo y los materiales y recursos disponibles, es posible producir diseños de actividades de enseñanza. Estos diseños se evalúan a la luz de los análisis cognitivo y de contenido en un proceso sistémico en el que cada uno de los análisis aporta a la reformulación de los otros dos. Finalmente, una vez que se pone en juego la actividad de enseñanza, el análisis de actuación utiliza los resultados de los otros tres análisis para evaluar la actuación de los alumnos y producir una descripción de su estado cognitivo que alimenta una nueva iteración del ciclo.

CARÁCTER SISTÉMICO Y CÍCLICO DE LOS MODELOS

Queremos profundizar en el carácter sistémico y cíclico de los modelos presentados en las Figuras 1 y 2 (y de los sistemas que ellos modelizan). El *carácter sistémico* se expresa en ambos modelos en el hecho de que cada elemento se encuentra relacionado directamente con por lo menos otro elemento del modelo. Esto significa que todos y cada uno de los elementos juegan un papel *necesario* en el funcionamiento apropiado de los correspondientes sistemas: cada elemento cumple una función dentro del sistema correspondiente y esta función afecta y se ve afectada por el funcionamiento de los elementos con los que se encuentra directamente relacionado.

Por otro lado, ambos modelos pretenden expresar el *carácter cíclico* de los sistemas que modelizan. En el modelo de la Figura 1 (el análisis didáctico), el resultado de un ciclo del proceso se convierte en información necesaria para el desarrollo del conocimiento didáctico del profesor y para la formulación del punto de partida de un nuevo ciclo del análisis didáctico. El carácter cíclico del sistema es aun más evidente en el caso del modelo de la Figura 2. En este caso, los ciclos tienen lugar tanto en el modelo global (interacción entre los diferentes análisis), como dentro de cada uno de los submodelos (análisis). Por ejemplo, en el caso del análisis de contenido, la formulación de una estructura conceptual basada en sistemas de representación *informa*¹ al análisis fenomenológico y simultáneamente la realización de una fase del análisis fenomenológico *informa* y puede afectar la producción de una nueva versión de la estructura conceptual y de la modelización. Lo mismo sucede, por ejemplo, en el análisis de instrucción en el que una versión de la tipificación de las tareas para un tópico puede generar ideas sobre los materiales y recursos que pueden ser utilizados, pero, al mismo tiempo, el análisis de los materiales y recursos disponibles para el tópico puede influir en la tipificación de las

1. Utilizamos esta forma de referirnos a la dinámica de los modelos y los sistemas correspondientes para efectos de simplificar la redacción. En realidad, la formulación de la estructura conceptual no puede informar al análisis fenomenológico. Lo que sí puede suceder es que con motivo de diseñar una versión de la estructura conceptual, el profesor reconozca que en esa estructura conceptual hay información que es útil para la formulación que él debe hacer del análisis fenomenológico. Y una vez realizado este análisis, el profesor puede de nuevo producir información que lo lleve a revisar y cambiar la estructura conceptual previamente hecha.

tareas. Por lo tanto, no es posible abordar el análisis didáctico de un tópico recogiendo y organizando la información para cada una de las nociones de manera secuencial e independiente. Por el contrario, el proceso de recolección y análisis de la información debe hacerse de manera global de tal forma que la información recogida para cada elemento genere la posibilidad de mejorar la información existente para los demás elementos del sistema.

Los cuatro tipos de análisis se encuentran también relacionados de manera cíclica. Ya mencionamos que el análisis de contenido es necesario para el análisis cognitivo: solamente cuando hemos descrito de manera detallada y sistemática el contenido matemático desde la perspectiva de los elementos correspondientes, podemos identificar y describir apropiadamente las dificultades y los errores en los que pueden incurrir los estudiantes. Recíprocamente, la identificación de dificultades y errores nos llevará a profundizar en algunas parcelas de la estructura conceptual que resultan más relevantes con motivo de la identificación de esas dificultades y esos errores. La tipificación de las tareas desde la perspectiva de la resolución de problemas y el papel que pueden jugar los materiales y recursos no pueden considerarse independientemente de los errores y las dificultades que se pretenden abordar. Y estas tareas y estos materiales y recursos adquieren significado matemático y didáctico a la luz de la información que aporta una estructura conceptual basada en los sistemas de representación en la que es posible caracterizar fenómenos e identificar sub estructuras matemáticas que los modelizan. Recíprocamente, el estudio de los diferentes tipos de tareas y de los materiales y recursos disponibles puede aportar información para la profundización de los diferentes aspectos del análisis de contenido y sugerir maneras alternativas de abordar y describir las dificultades y los errores.

El carácter cíclico del proceso se expresa también en la relación entre la realización de los diferentes análisis y la producción de diferentes versiones de las actividades de enseñanza y aprendizaje. Se podría pensar que el proceso va en un solo sentido: de los análisis al diseño. Y que, una vez que se ha realizado el análisis, las actividades se deducen automáticamente. Sin embargo, la riqueza de las estructuras matemáticas desde la perspectiva didáctica propuesta aquí y la complejidad de los procesos cognitivos necesarios para su comprensión implican que puede haber gran variedad de diseños que son compatibles con un mismo análisis didáctico. Por consiguiente, el diseño no se deduce de los análisis. Pero además, siempre nos encontramos en un proceso sin terminar y la selección de una posible actividad requiere de su evaluación con respecto a los análisis que le dieron lugar. Al escoger o diseñar una actividad tenemos que vislumbrar las diferentes maneras como los alumnos pueden abordar la actividad, los diferentes caminos y estrategias que ellos pueden tomar y utilizar al intentar resolverla, y las dificultades que pueden tener y los errores en los que pueden incurrir al intentarlo. En este proceso de puesta en juego hipotética de la actividad (que hace parte del diseño del análisis de actuación), la información recogida en los otros análisis juega un papel central. La previsión de los caminos, estrategias, dificultades y errores debe surgir del análisis que hemos hecho del contenido matemático, de los aspectos cognitivos y de los aspectos de instrucción. El carácter cíclico del proceso vuelve a aparecer en este punto de manera patente. Cuando analizamos la actividad escogida a la luz de los diferentes análisis y de sus correspondientes elementos, nos damos cuenta que debemos revisar y mejorar esos análisis. El análisis de la actividad puede implicar la necesidad de reformular los análisis generando un nuevo ciclo, cuyo producto final será la selección de una nueva actividad compatible con el nuevo análisis didáctico. En otras palabras, el diseño del análisis de actuación contiene la previsión de las posibles actuaciones de los alumnos y de esquemas

de análisis de esas actuaciones. Esta información debe surgir de los análisis de contenido, cognitivo y de instrucción. Al mismo tiempo, la previsión de las actuaciones de los alumnos y el diseño de esquemas de análisis de esas actuaciones generará información que nos puede inducir a reformular aspectos de los otros análisis.

Las reflexiones anteriores parecerían dar a entender que el profesor no terminaría nunca de hacer análisis, seleccionar actividades, evaluarlas a la luz de los análisis, reformular esos análisis con motivo de la evaluación y volver a seleccionar actividades. Sin embargo, es el profesor quien decide cuándo termina una fase de este proceso. Habrá diferentes razones para hacerlo, entre ellas el tiempo. No obstante, el profesor deberá buscar al menos tres resultados de todo el proceso:

- Una justificación, a la luz del análisis didáctico, de la validez de las actividades escogidas con respecto al contenido matemático en cuestión, al estado cognitivo de los alumnos y a los objetivos que se ha propuesto. Ésta podrá ser, gracias al proceso, una justificación informada y sistemática, en lugar de ser una justificación basada en la intuición.
- Una previsión de las posibles actuaciones de los alumnos cuando se lleve a la práctica la actividad.
- Ideas para la gestión de la clase, para el análisis de las actuaciones de los alumnos, y para sus reacciones a esas actuaciones.

CRITERIOS PARA EL ANÁLISIS DE ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE MATEMÁTICAS

Con las reflexiones anteriores queremos explicitar las dificultades inherentes al análisis y evaluación del diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un diseño de una actividad no puede ser únicamente el enunciado de una o más tareas y la descripción general de la gestión que el profesor hará en el aula cuando los alumnos aborden esas tareas. Si una actividad se describe de esta manera no es posible identificar el problema que busca resolver y por, lo tanto, tampoco es posible vislumbrar sus posibilidades de éxito. El diseño de una actividad debe incluir la justificación sistemática e informada de la selección de la actividad, la previsión de las posibles actuaciones de los alumnos cuando se lleve a la práctica la actividad, el diseño de los esquemas de análisis de esas actuaciones, y la descripción de las reacciones del profesor a las mismas. En este documento restringimos el análisis del diseño al análisis de la justificación que el profesor hace de la selección de la tarea. No consideramos por ahora el análisis de las actuaciones de los alumnos, ni de las posibles reacciones del profesor en el aula a esas actuaciones.

Hemos hecho una propuesta del tipo de justificación que esperamos que el profesor haga cuando propone el diseño de una actividad de enseñanza. Esta justificación debe estar basada en la *calidad* de la información recogida para cada uno de los elementos del análisis didáctico y en la *coherencia* tanto entre esos elementos, como entre el análisis didáctico y la actividad propuesta. Consideramos ahora estos dos criterios.

La información sobre cada uno de los elementos del análisis didáctico se puede analizar desde diferentes perspectivas:

- Qué información se propone.
- Qué tan completa, detallada y válida es esa información a la luz del problema que se pretende abordar.
- Qué parte de esa información se utiliza en el análisis didáctico.
- Para qué se utiliza esa información.

- Cómo se utiliza.

Las características de *coherencia* del diseño se pueden estudiar también desde diferentes puntos de vista:

- La coherencia entre los elementos pertenecientes a un tipo de análisis (de contenido, cognitivo y de instrucción).
- La coherencia entre los tres tipos de análisis.
- La coherencia entre los tres análisis y la actividad propuesta.

Las reflexiones que se hicieron en el apartado anterior sobre el carácter sistémico y cíclico del análisis didáctico dan significado a la noción de coherencia que utilizamos aquí. Se debe buscar que la justificación que se haga del diseño de la actividad esté basada en ese carácter sistémico y cíclico. En el siguiente apartado profundizamos en estos criterios de análisis al estudiar algunas de las características que puede tener un diseño de actividad cuando se analiza desde esta perspectiva.

ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DE LOS DISEÑOS DE ACTIVIDADES

El análisis del diseño de actividades debe entonces considerar cada uno de los elementos y relaciones del análisis didáctico para efectos de estudiar su calidad y coherencia. A continuación consideramos algunos de estos elementos, junto con algunas de sus características, con el propósito de ilustrar la manera como se pueden poner en práctica los criterios descritos en el apartado anterior. Éstas son sólo *algunas* de las características *generales* del análisis. No pretenden ser características específicas de la puesta en juego de cada uno de esos elementos. La enumeración de las características específicas de un diseño con respecto a cada elemento del análisis didáctico requiere de la descripción técnica de cada uno de esos elementos y de la construcción de modelos de las posibles maneras como esos elementos se pueden poner en juego para un tópico. Por ejemplo, en el caso de los sistemas de representación, es necesario describir en detalle el tipo de operaciones que se pueden hacer en ellos (Gómez, 2001a). En Gómez (2001b) hemos hecho una primera aproximación a este tipo de análisis. Adicionalmente, presentamos características que describen dificultades en la justificación del diseño y que, por tanto, permiten comparar diseños aun si estos versan sobre tópicos diferentes¹.

Estructura conceptual y sistemas de representación

La estructura conceptual de un tópico es la descripción detallada y sistemática de los elementos y relaciones que conforman la estructura matemática correspondiente al tópico. En la asignatura se espera que esta descripción se haga en base a los sistemas de representación. Sin embargo, cuando no se aprecia la potencia de esta noción como medio de descripción de una estructura matemática, se tiende a proponer descripciones en las que se identifican con etiquetas las principales nociones y las relaciones entre ellas. Si la estructura conceptual no se describe con suficiente detalle, entonces no es posible ubicar en ella las subestructuras matemáticas a las que se refiere el análisis fenomenológico, la modelización o los materiales y recursos. Por otro lado, la estructura conceptual debe tener suficiente detalle como para poder ubicar en ella los conceptos y procedimientos involucrados en la descripción de las dificultades y los errores. En algunos casos, la estructura conceptual incluye proposiciones que no son válidas matemáticamente o que

1. La mayor parte de estas características son producto de un experimento de desarrollo profesoral (Simon, 2000) que hemos hecho en la asignatura de didáctica de la matemática para futuros profesores de la que somos profesores. La lista es por tanto parcial. Sería posible producir una lista más completa a partir del esquema conceptual presentado anteriormente, pero ese ejercicio no se hace aquí.

no tienen que ver con el tópico en cuestión. Con base en estas características podemos identificar tres atributos generales de un diseño curricular con respecto a la estructura conceptual:

- Existencia
- Organización por sistemas de representación
- Detalle

Análisis fenomenológico y modelización

En el análisis fenomenológico se identifican, describen, caracterizan y clasifican los fenómenos naturales, sociales y matemáticos que pueden ser organizados (modelizados) por subestructuras contenidas en la estructura matemática del tópico en cuestión. Por lo tanto, los diseños curriculares deberían incluir explícitamente el análisis fenomenológico y relacionarlo con los procesos de modelización. En algunos casos, los futuros profesores tienden a tener en cuenta únicamente los fenómenos matemáticos, a omitir tipos de fenómenos que caracterizan la estructura matemática, o a organizar los fenómenos de acuerdo a criterios diferentes de las subestructuras que los modelizan (por ejemplo, los fenómenos se clasifican por áreas del conocimiento, aun si son modelizados por la misma subestructura matemática). Con base en estas características podemos identificar tres atributos generales de un diseño curricular con respecto al análisis fenomenológico y la modelización:

- Existencia
- Carácter explícito
- Relación con modelización
- Inclusión de fenómenos matemáticos
- Inclusión de fenómenos no matemáticos
- Inclusión de todos los tipos de fenómenos relevantes
- Utilización de otros criterios de organización de los fenómenos

Dificultades y errores

El análisis cognitivo busca identificar y describir las dificultades de los alumnos en el tópico en cuestión y los errores en los que ellos pueden incurrir con motivo de esas dificultades. Cuando los futuros profesores diseñan actividades tienden a olvidar la formulación de dificultades y errores; a formular como dificultad o error algo que no lo es (en algunos casos la afirmación no es de tipo cognitivo y no se refiere a características del conocimiento de los alumnos); a formular una o más dificultades de carácter general que implican la necesidad de analizar un abanico demasiado amplio de errores que sobrepasa el dominio del tópico en cuestión; a formular como errores algunas dificultades; y a formular errores de manera demasiado general sin considerar la actuación de los estudiantes cuando enfrentan una tarea específica. Con base en estas características podemos identificar tres atributos generales de un diseño curricular con respecto al análisis cognitivo:

- Se hace el esfuerzo de formular dificultades y errores
- Lo que se formula es una dificultad o un error
- Se formulan con suficiente detalle

Resolución de problemas, materiales y recursos

En el análisis de instrucción se pueden considerar diversos aspectos del diseño. En algunos casos, los diseños no proponen problemas, sino ejercicios que buscan consolidar algún procedimiento con base en la práctica; proponen actividades que buscan que los alumnos “vean” la manera correcta de resolver una tarea o que buscan generar el espacio

para que el profesor muestre esa forma válida de resolución; no consideran materiales y recursos o no incluyen un análisis de los mismos y de su relación con los otros elementos del análisis didáctico; o las tareas que se identifican no se organizan de acuerdo a las nociones de resolución de problemas y modelización (Gómez, 2001a, pp. 1253-1254). Con base en estas características podemos identificar tres atributos generales de un diseño curricular con respecto al análisis de instrucción:

- Se proponen ejercicios para repetir
- Se proponen actividades de “mostrar”
- Consideración de materiales y recursos y su análisis
- Tipificación de tareas

Coherencia

El carácter sistémico y cíclico del análisis didáctico enfatiza la necesidad de coherencia entre los diferentes elementos de cada uno de los análisis, entre los tres tipos de análisis, y entre el análisis didáctico y las actividades propuestas. Ya hemos descrito las diferentes relaciones que es posible establecer entre los elementos pertenecientes a cada uno de los análisis y entre los análisis mismos. La Figura 2 presenta las diferentes relaciones entre los elementos y los análisis. La Figura 3 resalta la relación entre los análisis y la actividad y, por lo tanto, ilustra las relaciones entre esos cuatro elementos.



Figura 3. Análisis didáctico y actividad

El análisis de coherencia en el diseño de actividades es entonces el estudio de las diversas relaciones presentes en las Figuras 2 y 3. Consideramos a continuación algunos ejemplos de posibles características del diseño con el mismo esquema utilizado en la sección anterior.

Dentro del análisis de contenido, el diseño presenta un análisis fenomenológico que no tiene relación con la estructura conceptual propuesta y los fenómenos identificados corresponden a estructuras matemáticas que no se encuentran descritas dentro de la estructura conceptual. En el análisis cognitivo, no hay relación entre las dificultades y los errores propuestos y los errores que se describen no pueden ser consecuencia de las dificultades propuestas. Finalmente, en el análisis de instrucción, no hay relación entre la tipificación de las tareas y los materiales y recursos propuestos, y los materiales y recursos tienen sentido para otro tipo de tareas.

Por otro lado, podemos analizar la coherencia desde la perspectiva de las relaciones expuestas en la Figura 3. Veamos algunos ejemplos. Las dificultades y errores identifica-

dos no pueden ser descritos en la estructura conceptual propuesta (contenido - cognitivo). La información del análisis de contenido (estructura conceptual, sistemas de representación, análisis fenomenológico y modelización) no es suficiente o adecuada para la tipificación de tareas propuesta. No es posible describir la relación entre los materiales y recursos propuestos y la descripción de la estructura matemática propuesta en el análisis de contenido (contenido - instrucción). No hay relación entre las dificultades y errores identificados y la tipificación de las tareas. Los materiales y recursos propuestos no permiten abordar las dificultades y los errores (cognitivo - instrucción). Las estructuras matemáticas que se ponen en juego en la actividad no se encuentran descritas en el análisis de contenido (contenido - actividad). La actividad no aborda las dificultades y errores identificados (cognitivo - actividad). La actividad pone en juego tareas y materiales y recursos que no se encuentran analizados en el diseño (instrucción - actividad).

CONCLUSIONES

Hemos presentado un esquema conceptual y unos criterios para el análisis y evaluación del diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esta propuesta tiene como referencia la noción de análisis didáctico. A partir de esta noción describimos nuestra posición acerca de la manera como el profesor puede diseñar actividades de enseñanza con base en una visión constructivista del aprendizaje. Hemos enfatizado el papel de los organizadores del currículo en el análisis didáctico y el carácter sistémico y cíclico del mismo. Somos conscientes de que ésta es una de las aproximaciones posibles al problema del diseño de actividades de enseñanza y no pretendemos justificar plenamente su pertinencia y validez.

Hemos querido mostrar la complejidad de los procesos involucrados en esta problemática. Por un lado, diseñar actividades de enseñanza y, sobre todo, construir una justificación apropiada para estos diseños, es un proceso complejo. Se requiere de un conocimiento (el conocimiento didáctico), y de una aproximación sistemática y reflexiva. De esta manera, diferenciamos al profesor profesional del profesor intuitivo (o artista). Por el otro lado, la misma complejidad del análisis didáctico como esquema para el diseño de actividades implica la complejidad del proceso de análisis y evaluación de los mismos que hemos presentado arriba.

Para analizar y evaluar el diseño de una actividad de enseñanza se requiere información. Creemos que los argumentos presentados muestran que no tiene sentido analizar un diseño con base en la descripción de un enunciado para una tarea y en la presentación de ideas generales para su gestión en el aula. Este tipo de ejercicio obliga a quien hace el análisis a imaginar lo que hay detrás del diseño pero no se ha dicho explícitamente. Un diseño es más que el enunciado de una o más tareas y requiere siempre de una justificación que pretenda mostrar sus posibilidades de éxito en la práctica. La descripción de la actividad y su justificación pueden presentarse de diversas maneras y esto puede dificultar su análisis. Consideramos que, en todo caso, el diseño y su justificación deben basarse en ideas acerca del contenido matemático y de los aspectos cognitivos e instruccionales involucrados en el tópico. El proceso de análisis deberá interpretar y valorar esa información a la luz del esquema conceptual presentado aquí.

El esquema y los criterios propuestos en este documento son de carácter *general*. Por un lado, son criterios que permiten comparar diseños hechos para tópicos diferentes. Por el otro lado, los criterios propuestos no analizan en detalle la validez de la información propuesta para cada uno de los elementos del análisis didáctico. No obstante, este análisis detallado es posible y puede llegar a ser necesario. La realización de este análisis

detallado requiere, como esquema de referencia, de la descripción técnica de cada uno de los elementos del análisis didáctico (en el mismo sentido en que aquí hemos tomado el esquema general del análisis didáctico como referencia). Adicionalmente, este análisis también requiere de una referencia específica al tópico en cuestión. En otras palabras, para poder analizar la información detallada con respecto a un elemento, quien analiza el diseño debe haber hecho su propio análisis didáctico del tópico. Sería posible verificar la validez de la información sin tener necesariamente un esquema de referencia. Sin embargo, el esquema de referencia se hace necesario para verificar la completitud de la información (por ejemplo, para saber si se han considerado todos los tipos de fenómenos que pueden ser relevantes en el diseño).

Creemos que las ideas que hemos presentado pueden aportar a la actividad de planificación del profesor de matemáticas. El carácter cíclico del proceso puede dar a entender que no es posible realizar apropiadamente esta actividad de planificación dado que siempre se puede revisar y mejorar lo que ya se ha hecho. Cada profesor tendrá que decidir en qué momento termina una fase del proceso de acuerdo a las condiciones en las que realiza su trabajo. Deberá, en todo caso, sentirse satisfecho con la justificación que puede dar a su diseño. Sin embargo, ese mismo profesor podrá siempre mejorar su propuesta para una ocasión posterior, particularmente si incluye la información del análisis de actuación, aspecto del análisis didáctico que no hemos considerado aquí.

REFERENCIAS

- Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers professional knowledge. En R. Biehler et al. (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 73-88). Dordrecht: Kluwer.
- Gómez, P. (2000). Los organizadores del currículo en matemáticas. *Revista EMA*, 5 (3), 267-277.
- Gómez, P. (2001a). Conocimiento didáctico del profesor y organizadores del currículo en matemáticas. En F. J. Perales, A. L. García, E. Rivera, J. Bernal, F. Maeso, J. Muros, L. Rico, & J. Roldán (Eds.), *Congreso nacional de didácticas específicas. Las didácticas de las áreas curriculares en el siglo XXI* (pp. 1245-1258 Vol. 2). Granada: Grupo Editorial Universitario.
- Gómez, P. (2001b). *Desarrollo didáctico de los futuros profesores de matemáticas: el caso de la estructura conceptual y los sistemas de representación*. Documento no publicado. Enviado para evaluación al SEIEM 2001. Disponible en <http://cumbia.ath.cx/pna.htm> [Documento PNA 2589]. Granada: Universidad de Granada.
- Gómez, P. (2001c). *Desarrollo didáctico de los futuros profesores de matemáticas*. Proyecto para una tesis. En Ortiz, M. (Ed.), *V Reunión Científica Nacional de PNA (SEIEM)*. Palencia: Universidad de Valladolid.
- Hiebert, J. (1999). Relationships between research and the NCTM Standards. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, 3-19.
- Llinares, S. (2000). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En J. P. Ponte y L. Serrazina (Eds.), *Educação matemática em Portugal, Espanha e Itália. Actas da Escola de Verao -1999* (pp. 109-132). Lisboa: Secção de Educação e Matemática. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- Rico, L. (Coord.), Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L., Sierra, M., y Socas, M. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ice - Horsori.
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.
- Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (2), 114-145.
- Simon, M. A. (2000). Research on Mathematics Teacher Development: The Teacher Development Experiment. En R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 335-359). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.