ENVOLVIENDO ESFERAS CON TIRAS DE PAPEL

Raúl Panqueva
Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
raulpanqueva@yahoo.com

Una esfera se puede rodear con varias tiras de papel que se entrelazan y unen en sus extremos. Existen diferentes formas de envolver una esfera, cada una de ellas asociada a un poliedro, y la simetría de la envoltura está asociada a la simetría del poliedro. Para que la envoltura encierre por completo la esfera, las tiras se deben plegar y entrelazar de manera que se pueda crear una amplia gama de poliedros estrellados en los que las puntas de las estrellas tienen un ángulo de $180/n$, con n mayor que 2. La técnica se reconoce como una rama del origami y relaciona la geometría de los poliedros con la teoría de nudos.

PRESENTACIÓN

La idea de envolver esferas con tiras de papel se remonta a los antiguos griegos con las esferas formadas por seis y diez tiras entrelazadas, y en los años recientes han surgido avances como la explicación de Jean Pedersen (1973) de cómo elaborar los poliedros regulares con tiras de papel –especialmente el dodecaedro– los desarrollos de Strolb descritos por Versnick (2000), el artículo de Randow (2004) sobre cómo hacer poliedros con tiras entrelazadas y el artículo de Tanay (2012) donde describe cómo elaborar algunos poliedros con tiras de papel.

Por *envolver una esfera con tiras de papel* entendemos que se trata de tomar tiras de papel entrelazadas y unidas por sus extremos de manera que rodeen una esfera manteniendo la simetría de algún poliedro. En términos más rigurosos se trata de un enlace de varios nudos hechos con tiras de cinta que rodean una esfera y guardan la simetría de algún poliedro.

En esta conferencia mostraremos algunas formas de envolver una esfera con tiras de papel. La primera consiste en tomar varias tiras entrelazadas, cada una de las cuales rodea la esfera de manera ecuatorial. El caso más conocido es el del dodecaedro (ver Figura 1). Otra forma consiste en plegar las tiras con un patrón repetitivo y entrelazarlas hasta formar una amplia variedad de poliedros estrellados; las tiras en torno a la esfera pueden ir de manera ecuatorial, meri-

Panqueva, R. (2013). Envolviendo esferas con tiras de papel. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 127-133). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

dional y en otros casos son auténticos nudos que se entrelazan de manera simétrica en torno a una esfera. La técnica es reconocida como una rama del origami y con ella se obtienen poliedros de una presentación impecable, casi perfecta y sin necesidad de pegante. Algunas imágenes de poliedros así elaborados se pueden observar en la galería de fotos del sitio web:

www.flickr.com/photos/raulpanqueva.

LA BOLA GRIEGA

La bola griega, formada por seis tiras entrelazadas, tiene la simetría de un dodecaedro; la forma del trenzado de las tiras es la misma del dodecaedro y del icosaedro estrellados. En la bola de la Figura 1, las tiras tienen una longitud de 16.4 veces el ancho de la cinta. Cuando la bola se hace con tiras un poco más cortas se parece a un dodecaedro y en el caso límite se puede hacer un dodecaedro con doce huecos pentagonales.

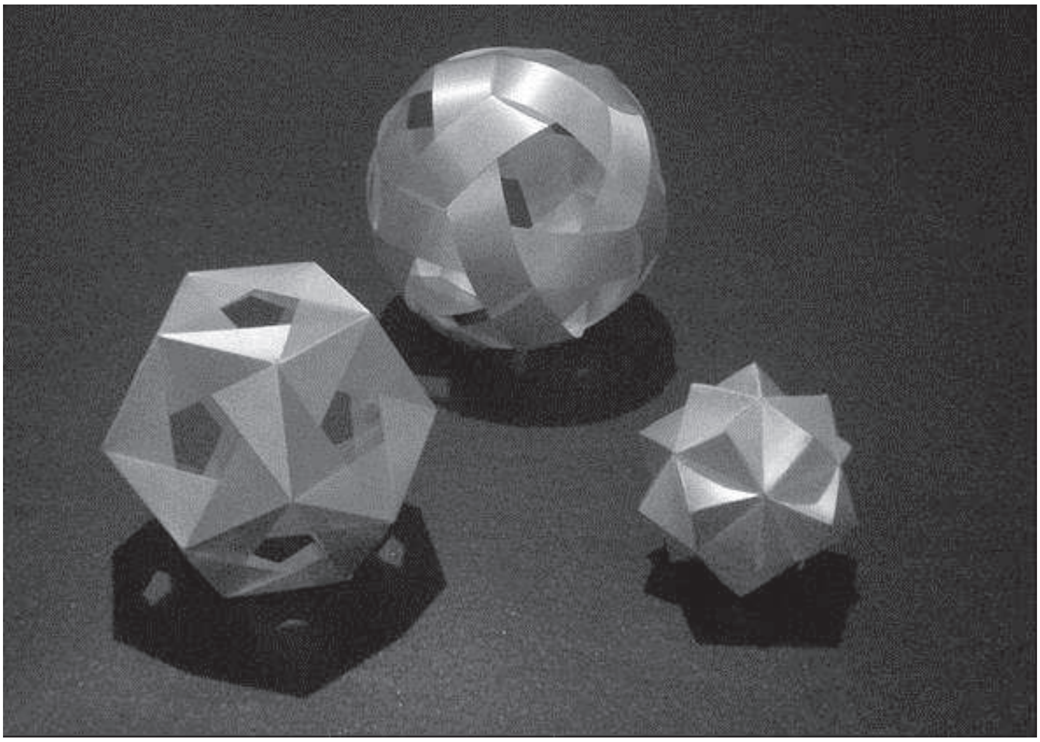

Figura 1: Tres formas topológicamente iguales de un dodecaedro

Para armar el dodecaedro primero se identifica el patrón de plegado que en este caso es un zig-zag en el que el ángulo con respecto al borde es de 36 grados (ver Ilustración 1).

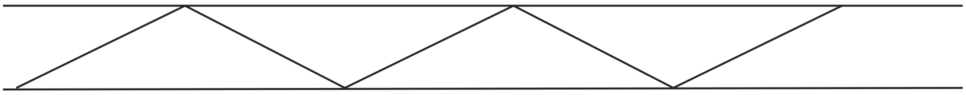

Ilustración 1: Dodecaedro 1

En el segundo dodecaedro hay doce huecos pentagonales, y la longitud de las tiras se puede reducir aún más cerrando estos huecos. En el nuevo límite se forma un dodecaedro estrellado, como el que se presenta en la Figura 1, en el que cada lado es un triángulo isósceles con un ángulo vértice de 90 grados en cada punta. El patrón de plegado está hecho por triángulos isósceles (ver Ilustración 2).

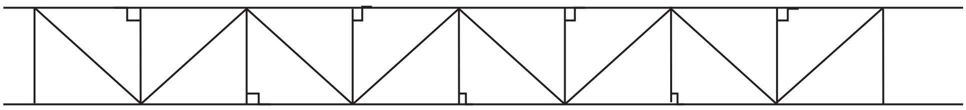

Ilustración 2: Dodecaedro 2

Para hacer el dodecaedro estrellado, cada tira debe tener como mínimo 10 picos, cada uno compuesto por dos triángulos. En la práctica, el número de picos se incrementa para que las tiras se puedan traslapar al momento de ensamblar la estrella. Los tres objetos de la Figura 1 son topológicamente iguales debido a que están hechos, cada uno, con 6 cintas enlazadas y la forma en que se entrelazan es idéntica en los tres casos.

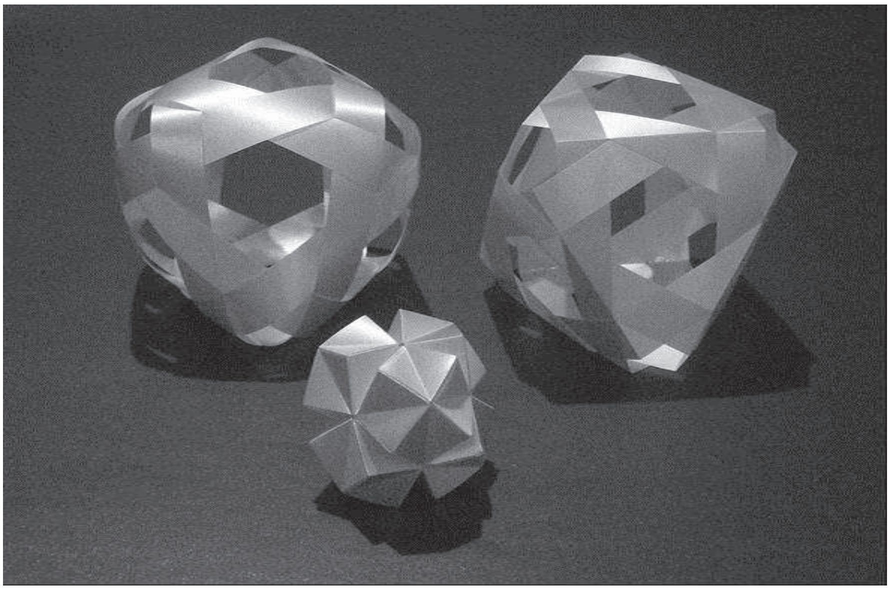

Figura 2: Tres formas topológicamente iguales de un octaedro

Con este procedimiento se puede hacer un octaedro estrellado, un cubo romo estrellado y se puede ampliar a otro tipo de poliedros como el de la Figura 2, donde un octaedro formado por seis tiras entrelazadas llega a formar un cubo doblemente estrellado, es decir que de cada cara del cubo surge la punta de una estrella y de cada nueva cara surge una nueva punta. En la Figura 2 cada una de las presentaciones del octaedro está hecha con seis tiras de papel y la forma en que se entrelazan las tiras es la misma.

OTROS POLIEDROS ESTRELLADOS QUE ENVUELVEN UNA ESFERA

En el caso del dodecaedro, por cada punta pasan tres tiras de cinta que se entrelazan y cada cara está cubierta por dos capas de papel.

El procedimiento se puede extender dividiendo el ángulo de 180 grados en 3 y el patrón de plegado queda conformado por triángulos equiláteros, y de manera intercalada en los bordes de la tira los que serán los picos de la estrella como se indica en la Ilustración 3.

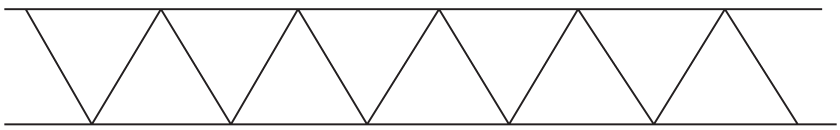

Ilustración 3: Ejemplo poliedro estrellado

Este patrón de plegado permite la elaboración de una amplia variedad de poliedros entre los que se encuentran los regulares y algunos arquimedianos. De cada cara del poliedro surge una punta en la que se entrelazan tres, cuatro o cinco tiras según el número de lados de las caras del poliedro.

Para elaborar estos poliedros, primero se estudia en cada caso cómo es que deben ir trenzadas las tiras de papel para identificar el número de tiras y la longitud de cada una. La siguiente tabla indica el material necesario para elaborar poliedros estrellados a partir de tiras plegadas con triángulos equiláteros. Para cada pico se requieren tres triángulos.

Poliedro estrellado	No. de caras	No. de tiras	No. mínimo de picos por tira
Tetraedro	4 triángulos	3	4
Cubo	4 cuadrados	6	4
Octaedro	8 triángulos	4	6

Icosaedro	20 triángulos	6	10
Dodecaedro	12 pentágonos	10	6
Cuboctaedro	6 cuadrados 8 triángulos	8	6
Rombicuboctaedro	18 cuadrados 8 triángulos	12	8
Rombicosidodecaedro	20 triángulos 30 cuadrados 12 pentágonos	24	10
Icosidodecaedro	20 triángulos 12 pentágonos	20	6
Cubo romo	6 cuadrados 32 triángulos	4	60
Dodecaedro romo	12 pentágonos 80 triángulos	6	50

Al elaborar los poliedros estrellados, la longitud de las tiras debe ser superior a la indicada para que se puedan traslapar los extremos de cada tira.

De acuerdo a su estructura y forma de elaboración estos poliedros se pueden separar en grupos. El cubo, el tetraedro y el dodecaedro estrellado corresponden respectivamente a versiones deformadas de un tetraedro, un octaedro y un icosaedro.

La elaboración del octaedro y el icosaedro es particularmente difícil porque al trenzar el poliedro es necesario torcer las tiras y fácilmente se arrugan.

En el rombicuboctaedro y el rombidodecaedro, las tiras pueden rodear el poliedro de manera ecuatorial o meridional y permiten hacer el poliedro en dos colores distribuidos de manera simétrica. El rombicosidodecaedro de la Figura 3 está hecho con 24 tiras: 12 tiras verdes que recorren el poliedro de manera ecuatorial y 12 tiras rojas, cada una de las cuales gira en torno a un pentágono verde. Cada tira debe tener al menos 10 picos y en la práctica se extienden a 13 o 15 picos para permitir el traslape de los extremos y ocultarlos. La estrella está hecha sin necesidad de pegante.

El cubo romo y el dodecaedro romo son los más complicados de elaborar porque cada tira forma un nudo y es necesario emplear ocho tiras para el cubo romo y 20 en el dodecaedro romo.

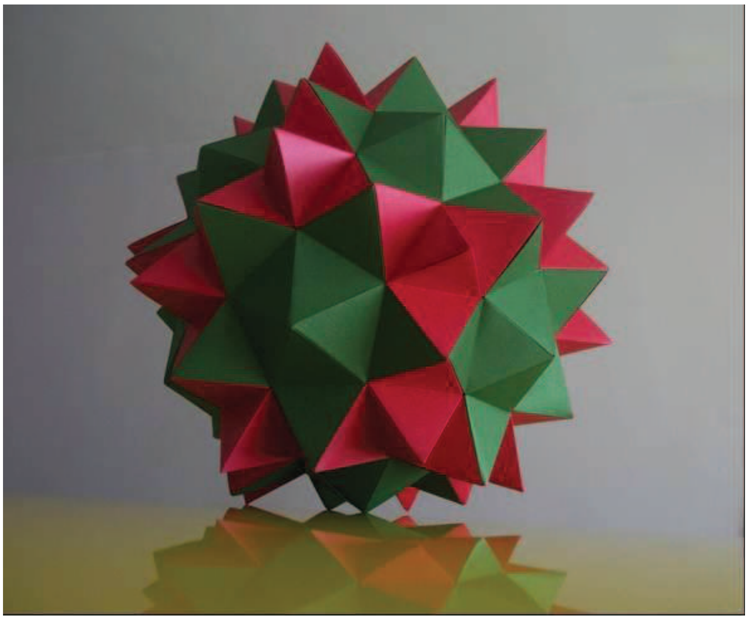

Figura 3: Rombicosidodecaedro estrellado

CONSIDERACIONES FINALES

Envolver una esfera con tiras de papel relaciona la geometría de los poliedros con la teoría de nudos. En algunos casos se trata de nudos triviales entrelazados, y en otros como el dodecaedro romo son nudos entrelazados.

La técnica descrita se puede ampliar a poliedros estrellados más agudos con ángulos de 45, 36, 30 y fracciones de 180 grados. Como técnica para elaborar estrellas, los resultados son impecables, casi perfectos, con estructuras muy estables que no requieren de pegante, lo que los hace muy atractivos en el origami, donde aún somos pocos los que nos ocupamos del arte de hacer poliedros con tiras de papel.

REFERENCIAS

Pedersen, J. (1973). Plaited Platonic puzzles. *The Two-Years College Mathematics Journal, 4*(3), 22-37, F 73.

Randow, R. (2004). Plaited polyhedra. *The Mathematical Intelligencer*, *26*(3), 54-68.

Tarnai. T., Kovács, F., Fowler, P.W. y Guest, S.D. (2012). Wrapping the cube and other polyhedra. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences,* 468(2145), 2652-2666.

Versnick, P. (2000). *The knotology of Heins Strolb*. Recuperado en http://orihouse.com/knotology.html