EPISTEMOLOGÍAS DE LA FUNCIÓN DERIVADA

Eliseo Ramírez Rincón
Universidad Libre Colombia
eliseo.ramirezr@unilibrebog.edu.co, elmatematis@gmail.com

Resumen. En el presente escrito se hace una somera revisión histórica de los orígenes de lo que hoy se conoce como función derivada, centrando la atención en la complejidad de algunos cambios epistemológicos, a partir de los cuales se pueden beneficiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de ésta. Dichos cambios van desde lo que Canul, Dolores y Martínez (2011) llaman las transiciones que le dieron evolución a la idea de derivada: tangente global – tangente local; métodos particulares de trazo- a métodos generales, de un problema geométrico a un problema analítico; de la matemática de las constantes a la matemática de las variables; de la aproximación a la idea de límite; de los diferenciales al límite; fundamentación con el límite; la fundamentación del cálculo sobre la base de los infinitesimales. A partir de lo cual se consolidó como conocimiento matemático en aproximadamente veinte siglos. Ramírez (2012).

Palabras clave: epistemología, historia, derivada, función, didáctica

Abstract. In this paper a brief historical review of the origins of what is now known as derivative function is presented, focusing on the complexity of some epistemological changes, from which benefits on the teaching and learning of this subject can be obtained. These changes range from what Canul, Dolores and Martinez (2011) called transitions that evolution gave the idea of derivative: global tangent - local tangent; stroke-specific methods to general methods, geometric problem to an analytical problem, from the mathematics of constant to the mathematic of variables, the approach to the idea of limits, the limit differentials; foundation with the limit, the validity of the calculation on the basis of the infinitesimal. From this, it was consolidated as mathematical knowledge in about twenty centuries. Ramírez (2012).

Key words: epistemology, history, derivative, function, didactic

Introducción

En Colombia, a través de los resultados de la prueba de estado, realizada a estudiantes (16-19 años) anualmente por el ICFES (instituto Colombiano de Fomento a la Educación Superior), se puede deducir el deficiente nivel con el que "pasan" los estudiantes del colegio a la universidad en cuanto a las ideas previas de la función como estabilidad del cambio y como proceso variacional. También se corrobora este aspecto con el estudio hecho por el MEN (Ministerio de Educación Nacional) en 2011, sobre el perfil nacional del área en pruebas SABER de 5° y 9° de la básica, en el que se refleja el pobre desempeño en los procesos de variación tanto en 5° (10-13 años) como en 9° (14-16 años) grados de la básica. Los resultados anteriores, reflejan dificultades en la comunidad educativa (instituciones, profesores y estudiantes,…) en la enseñanza y aprendizaje del pensamiento variacional y los procesos generales emanados de los Estándares Básicos de Competencias (2006) del MEN. Dada la complejidad de la problemática, se presenta esta síntesis como reflexión desde lo curricular, en el sentido de revisar que el lenguaje matemático incorporado en el área esté en correspondencia desde lo cultural (entorno social del que aprende) con los conocimientos matemáticos en cuestión (rigor y formalismo). Ramírez (2012).

Síntesis histórica de la derivada-función derivada

A partir de la importancia de la matemática griega y su gran influencia en el desarrollo del cálculo, se plantea la discusión desde el pensamiento e influencia de la escuela pitagórica en las medidas conmensurables e inconmensurables, el continuo y el razonamiento deductivo, en los procesos de síntesis y de análisis; aspectos que marcaron el posterior desarrollo de las matemáticas. El cálculo o análisis tuvo su origen en las dificultades lógicas y de lenguaje de los matemáticos griegos, al esforzarse por expresar sus ideas intuitivas en razones o segmentos proporcionales, que ellos vagamente reconocieron como continuo geométrico, porque en lo numérico, más bien, lo consideraron como continuo discreto. Boyer (1986), Muñoz y Román (1999).

Pitágoras vivió en el siglo VI a C. y su legendaria escuela fue una mezcla de filosofía, religión y matemáticas. A la escuela pitagórica se le atribuyen numerosos descubrimientos matemáticos, entre ellos la demostración del teorema que lleva su nombre, el descubrimiento de los números irracionales, que no los pudieron explicar y menos demostrar, sin embargo es considerado como uno de los acontecimientos más profundos en la historia de las matemáticas, porque determinó la relación de lo conmensurable a través del número y lo inconmensurable con lo geométrico. En general, para los griegos los números se reducían a los enteros (a partir del uno) y a los fraccionarios positivos, consideraban a la unidad indivisible y por ello, el proceso de división numérica era conmensurable, lo cual corresponde a un continuo discreto, dado que los enteros son un conjunto discreto. En ese sentido no pudieron percibir lo que en cálculo se llama el paso al límite, a pesar de que los desarrollos de los griegos fueron muy notorios e importantes en lo geométrico, en este campo tenían cabida las mediciones inconmensurables como un continuo estático Bagni (1996), Boyer (1986). A ellos, se debe la búsqueda del rigor matemático, de estudiar todos los resultados, principios, teoremas, en demostraciones y razonamientos lógicos. A partir de Pitágoras, la matemática se independiza de una base empírica, convirtiéndose en una ciencia abstracta que existe más allá de la realidad cotidiana del ser humano, a ellos se debe el método deductivo. Bagni (1996), González (1992).

No obstante lo anterior, los integrantes de la escuela de los Eleáticos (s. VI a C.), cuestionaron los fundamentos pitagóricos del materialismo y consideraron que el universo era una unidad inmutable (indivisible). A partir de esta escuela el pensamiento matemático de los griegos cambió y se fortaleció con el pensamiento inductivo de Platón y el mundo de las ideas (la matemática existe, hay que descubrirla) y el pensamiento deductivo Aristotélico (influencia que aún existe); ambos estuvieron permeados por el trabajo de Euclides. La demostración en las matemáticas de esa época, se impuso con regla y compás como método riguroso euclidiano. La tecnología con la que contaron se basó en artefactos construidos por ellos mismos, para entender una situación, para modelar un problema o para comprobar su solución; se ayudaron más con la intuición como forma de razonar sobre un fenómeno. En esta etapa, salvo por Arquímedes (s. III a C.), quien trabajó el método de exhaución de Eudoxio, para resolver problemas de áreas y volúmenes que luego demostraba por reducción al absurdo y con su método mecánico, no se perciben vestigios de procesos de variación en el pensamiento griego y según Bagni (1996) y Boyer (1986) hubo que esperar hasta la matemática del renacimiento de Europa para ello.

En el s. XVI al ser retomado el trabajo de los matemáticos griegos en Europa, fue cuestionado su rigor, el cual se fue refinando paulatinamente hasta llegar al actual. Entre los trabajos destacados en Europa, se pueden mencionar el de Kepler (1571-1630), quien estudió la forma de hallar el volumen de cuerpos de revolución, descomponiéndolos en partes indivisibles. Galileo (1564-1642) determinó, que el espacio recorrido por un cuerpo era igual al área comprendida entre la velocidad y el tiempo. A su vez Cavallieri (1598-1647), alumno de Galileo, usó sistemáticamente técnicas infinitesimalistas para resolver problemas de áreas y volúmenes de cuerpos; no estuvo interesado en el rigor, sino en la practicidad de los hallazgos. Otros matemáticos importantes en este período son: Luca Valerio (1552-1618), Huygens (1596-1695), Descartes (1596-1650), y Fermat (1601-1665) quien en el año 1629 hizo dos importantes descubrimientos que están relacionados con sus trabajos sobre geometría. En el más importante de ellos, titulado *"Methodus ad disquirendam maximan et miniman et de tangentibus linearum curvarum"* (Métodos para hallar máximos y mínimos a una línea tangente en una curva), Fermat expone un método, eminentemente algebraico y desprovisto de fundamentos demostrativos para hallar los puntos en los cuales una función polinómica, toma un valor máximo o mínimo. Roberval (1602-1675), Torricelli (1608-1647), Wallis (1616-1703), Pascal (1623-1662), Hudde (1628-1704) y Barrow (1630-1677) entre otros. Cantoral y Resendiz (2003).

En el Renacimiento, el rigor matemático cambió respecto del usado por los griegos (Geométrico), se hizo entonces necesario buscar nuevas formas de demostrar los procesos distintos a los de la geometría griega y del álgebra árabe; es decir, los problemas de variación de la mecánica clásica. En este período, la intuición como razonamiento matemático fue importante. Se encuentran diferencias en el rigor utilizado por los matemáticos de esta época y en ese sentido por ejemplo se destacan los trabajos de Descartes y Barrow. En general los trabajos de estos matemáticos en el cálculo, antecedieron al de Newton (1643-1727), con la teoría de fluxiones y a la de Leibniz (1646-1716) con la teoría infinitesimal; los dos, a por caminos distintos con lenguajes también diferentes, lograron darle sentido a lo que hoy se conoce como cálculo diferencial e integral. Tanto Newton como Leibniz, usaron los infinitésimos e intentaron dejarlos de lado por las críticas que algunos pensadores como Berkeley (1685-1753) les hicieron; este hecho marca otra etapa más en el avance del rigor matemático, en el cual se tuvo que esperar hasta los trabajos de Bolzano (1741-1848), Cauchy (1789-1857) y Weierstrass (1815-1897). Bagni (1996), Boyer (1986).

Síntesis y reflexiones

Según los registros históricos, este trabajo encuentra seis momentos epistemológicos distintos con tres formas distintas de rigor, en el desarrollo de lo que hoy se conoce como *función derivada*. Ramírez (2012), son ellos:

Arquímedes (287-212 a. C.), quien a través de sus trabajos y sus métodos: heurístico mecánico, Exhaustion y reducción al absurdo, estudia fenómenos de variación tanto en la mecánica como en los fenómenos naturales y el universo. Presenta un rigor diferente al de regla y compás, predominante en esa época en Grecia, logra demostrar sus mediciones de áreas y volúmenes de cuerpos y figuras en forma parecida a la realizada por Riemann (1826-1886). Con Arquímedes aparece un segundo momento en el desarrollo del rigor en matemáticas, el cual abarca hasta el s. XVIII, con Cauchy. La tecnología desarrollada y usada por Arquímedes, es ampliamente detallada en sus trabajos a través de la mecánica y por ellos, se le considera como el pionero de la ingeniería entre otros. Durán (2002).

Galileo (1564-1642)**,** quien estudió la aceleración de los cuerpos en caída libre, logró encontrar que ésta, era independiente de la masa y además que era constante, es decir que si en el primer intervalo de tiempo (t) el espacio (s) recorrido por un cuerpo era C, encontró que: $s(t) = C\,t^2$, pero no logró demostrarlo, sin embargo está comprobado que él tenía razón, que el valor de la aceleración (a) de los cuerpos que caen es constante de valor, $a= 2C$. Esta etapa del desarrollo de la función derivada, presenta indicios epistemológicos que corresponden a la intuición, a la observación y a la experimentación como referentes importantes, no existía la matemática con la cual se podía demostrar este hecho y por lo tanto fue un impedimento en el trabajo de Galileo, que debió esperar a dos grandes de las matemáticas.

Newton (1642-1727**)** **–***Leibniz* (1646-1716)**,** quienes continuaron con el trabajo de sus predecesores como Arquímedes, Galileo, Descartes, Barrow y otros que dejaron el camino listo para que ellos dieran solución a los problemas planteados desde la mecánica y a los cuatro problemas que hasta entonces o no les hallaron solución o ella fue parcial, como lo fueron; el de la recta tangente, el del movimiento, el de las áreas y el de máximos y mínimos. Ellos son considerados los "padres del cálculo", a ellos se debe el nacimiento del cálculo como dominio matemático diferente de la aritmética, la geometría o el álgebra de ese entonces. Sin embargo, como se ha reseñado, fue un trabajo de varios siglos y de innumerables personas, con ellos se da paso a un nuevo rigor, no fueron ellos los que lo formularon, pero dejaron la base lista para hacerlo, porque les hizo falta la construcción de los números reales para ello, sin embargo la intuyeron.

Los tres momentos anteriores de las epistemologías del cálculo, tienen en común que sus trabajos sobre los procesos de variación estaban basados en los infinitesimales como cantidades numéricas o geométricas y que no se pudieron explicar con el rigor matemático existente hasta entonces, que la intuición fue importante en sus respectivos trabajos, así como los problemas de la mecánica, sin embargo mientras que Arquímedes trabajó en el "cálculo de áreas" con infinitésimos; Newton y Leibniz lograron presentar la derivación y la integración como procesos inversos, con lo cual sentaron las bases del teorema fundamental del cálculo. Grabiner (1983).

Lagrange (1736-1813): El símbolo $f'(x)$, para las derivadas, fue introducido en 1797 en Théorie des fonctions analytiques. Cantoral (1995), realizó un estudio Socioepistemológico, en el que evidenció que la derivada en el sentido de Cauchy es entendida como el Límite del cociente incremental, mientras que la derivada Lagrangiana es, entendida como el coeficiente lineal del desarrollo en serie de potencias de una función en torno a un punto dado. En este sentido dice también Cantoral, que esta doble apariencia no debe entenderse como formas diferentes de escribir a la función derivada, sino más bien como dos epistemologías diferentes, que en épocas diferentes aparecen, porque dice él los "*usos hacen al objeto"* y no al contrario. Cantoral y Mirón (2000).

Desarrollando a f, entorno del punto x, con incrementos h, se tiene que: $f(x+h)= a_0(x)/0! + a_1(x)h/1! + a_2(x)h^2/2! +\ldots+\ldots +a_n(x)h^n/n!$ Reescribiendo esta expresión en términos de las derivadas de f, se tiene que:

$f(x+h) =f(x) + f'(x)h + f''(x)h^2/2! \ldots+\ldots$ Y, si se desarrolla esta serie en torno al punto $x=a$ se tiene que: $f(x+h) =f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2/2! \ldots+\ldots$

Cauchy (1789-1857): quien logra construir a partir de su trabajo sobre series convergentes, la definición de la función derivada en 1823, con el rigor y formalismo actual. A partir de los trabajos de Bolzano y de Weierstrass (quien construye los números irracionales y es quien elimina los infinitésimos de los escritos matemáticos), Cantor (conjuntos) y Dedekind (cortaduras) quienes logran la construcción de los números reales. Estos aportes junto con lo hecho por Cauchy, permitieron definir la función derivada como un límite.

Con Cauchy se alcanza la tercera etapa del rigor matemático, tal como se concibe en la actualidad. A partir de este rigor se han generado la mayor parte de propuestas en Didáctica de la Matemática. La tecnología en esta etapa del rigor matemático se ha desarrollado vertiginosamente y en comparación con las dos etapas anteriores ha pasado de la calculadora de Pascal a las calculadoras graficadoras y programables, al pc portátil, a la internet, y al software matemático, entre otras. Grabiner (1983).

Robinson (1918-1974), quien en la década de 1960, con la teoría de modelos creó una extensión de los reales, el cual corresponde al conjunto de los reales no estándar (R*). En este conjunto se cumple:

Axioma de extensión. Existe una extensión ordenada y propia *R**, del cuerpo *R.* En esta extensión *R**, se define *x, como:*

1. Un *infinitesimal* en *R*,* si |x|<*r,* para todo real positivo *r.*
2. *Finito*, si |x|<*r*, para algún real positivo *r.*
3. *Infinito*, si |x|>*r*, para todo real $r \in R$.

Luego en *R** hay infinitesimales y números infinitamente grandes, más grandes que cualquier número real, además de los números reales. (Keisler, 2007).

Ciertos procesos en el cálculo se simplifican, usando el análisis no estándar. Este es el caso de la definición de derivada. Específicamente, f es una función diferenciable en $a \in R$, siempre que el cociente sea finito y tenga la misma parte estándar para cada infinitesimal no nulo, $\Delta x \cong 0$ su derivada es: $\left(\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\right)$

Sin embargo las propuestas en Didáctica de la Matemática que se generaron a partir de este enfoque fueron abandonadas en la década de 2000, porque se encontró que este enfoque es más complejo que el de Cauchy.

El rigor y el formalismo de las matemáticas como se conocen hoy es producto del refinamiento y avance a través de los trabajos de cientos de matemáticos en distintas épocas y lugares como un producto multicultural.

El proceso de desarrollo histórico del conocimiento matemático conocido hoy como función derivada ha sido complejo, demorado y tortuoso. La historia da cuenta que su desarrollo, no fue lineal, ni acumulativo, así como tampoco fue producto de la genialidad de dos personas. En el proceso de desarrollo histórico del paso de derivada a función derivada se usaron los infinitésimos (como números), los cuales fueron eliminados en el s. XIX con los trabajos de Bolzano y Weierstrass al definirlos éste último como variables y además porque los infinitesimales no están definidos en el conjunto numérico de los reales, cabe preguntarse entonces ¿Por qué todavía algunos textos de cálculo se titulan como cálculo diferencial e integral, calculo con infinitésimos, cálculo infinitesimalista,…?

La Didáctica de la Matemática reporta trabajos e investigaciones en su mayor parte en la epistemología de Cauchy, siendo la más rigurosa y difícil de aprender por parte de estudiantes de último año del colegio o primeros semestres de universidad. Cantoral (1995), Ramírez (2012). Uno de los ejemplos clásicos del cálculo diferencial corresponde a la función valor absoluto: $f(x)=|x|$, cuyos significados como métrica fueron conflictos epistemológicos para los matemáticos hasta antes del s. XIX. Por lo tanto es normal que este tipo de funciones también generen en los estudiantes conflictos al leerla, estudiarla y tratar de representarla. Por ejemplo, es complejo para ellos aceptar que f, es continua en (0, 0), pero no es diferenciable allí; porque es usual que confundan el hecho de que toda función diferenciable en un punto dado, es continua allí también, con su recíproco: toda función continua en un punto es diferenciable en ese punto también, lo cual como en este caso no se cumple. Es evidente entonces que el lenguaje de la función derivada cambia de acuerdo con la epistemología usada.

La intuición como razonamiento de las matemáticas, contribuye en la comprensión de los conocimientos matemáticos de los estudiantes.

El rigor y el formalismo actual de las matemáticas son muy importantes, pero ese debe ser el estado final, la meta a lograr con los estudiantes, por lo tanto las anteriores epistemologías pueden servir para ambientar, motivar y orientar el trabajo de los estudiantes hacia la epistemología de Cauchy.

Referencias bibliográficas

Bagni, G., T. (1996). *Storia delle Matematiche* (1), Bologna, Italia: Edizioni Pitagora.

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Cantoral, R. (1995). Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: el caso de la serie de Taylor. *Mathesis,* 11 (1*),* 55 –101.

Cantoral, R., Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: Un estudio en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 6 (2), 133 – 154.

Cantoral, R. y Miron, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica, *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa,* 3 (3), 265-292.

Canul, E., Dolores, C. y Martínez, G. (2011). De la concepción global a la concepción local. El caso de la recta tangente en el marco de la convención matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 14 (2), 173-202.

Durán G., A. (2002). *Los manuscritos griegos de Arquímedes en la Biblioteca del Real Monasterio del Escorial*. Resumen recuperado el 10 de 0ctubre de 2012 de http://www.mpiwgberlin.mpg.de.

González, P. (1992). *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII: Una investigación histórica sobre las técnicas y métodos que condujeron al descubrimiento del cálculo infinitesimal*. Madrid: Alianza Editorial.

Grabiner, J. (1983). The Changing Concept of Change: The derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine* 56 (4), 195-206.

Keisler, J. (1976). *Elementary Calculus, and infinitesimal approach,* (2a.) *Edition.* Recuperado el 25 de enero de 2007 de http://www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html

Colombia, Ministerio de Educación Nacional, (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá, Colombia: MEN.

Muñoz, L. y Roman, R. (1999). *Origen y desarrollo histórico del Cálculo infinitesimal*, Departamento de Matemática Aplicada y Telemática, Barcelona, España: ediciones UPC.

Colombia, Perfil Nacional en Matemáticas. (2011). *Análisis de resultados de pruebas externas nacionales e internacionales. Ministerio de Educación Nacional; viceministerio de educación preescolar, básica y media. Dirección de calidad para la educación preescolar básica y media. Subdirección de referentes y evaluación de la calidad educativa. Análisis realizado por la subdirección de referentes y evaluación de la calidad educativa*. Bogotá, Colombia: MEN.

Ramírez, E. (2012). *Enseñanza de la función derivada con el uso de infinitesimales como alternativa para reducir los conflictos semióticos de los estudiantes.* Disertación doctoral no publicada. Universidad Pedagógica Nacional, UPN., Bogotá, Colombia.