Dificultades de los estudiantes que se están formando como futuros profesores de matemáticas, para comprender el lenguaje matemático utilizado en demostraciones geométricas euclidianas

Paola Córdoba y Yadid Quintana
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
pao_acv@hotmail.com,yadiquincas29@hotmail.com

El lenguaje que se usa en las demostraciones geométricas presentadas por Euclides en su texto los *Elementos*, particularmente las traducciones entre códigos en dicho lenguaje, son la base de este artículo. Se expone un análisis referente a las dificultades que presentan los estudiantes que se están formando para ser profesores de matemáticas, en la comprensión del lenguaje matemático que se usa en las demostraciones geométricas de Euclides. Se usa la clasificación de la demostración hecha por Harel y Sowder que cita Molfino (2006), y así se establece una relación entre demostración y la traducción entre códigos en el lenguaje matemático.

Planteamiento del problema

Un aspecto de vital importancia en la formación académica de quienes se están preparando como profesores de matemáticas es la comprensión de las demostraciones euclidianas, además del uso de las mismas en distintas situaciones problémicas. Es así como a la luz de los autores que se mencionarán en el marco de referencia conceptual, se ha planteado como pregunta orientadora: ¿Qué dificultades en la comprensión del lenguaje matemático que se usa en las demostraciones geométricas euclidianas presentan los estudiantes que se están formando como futuros profesores de matemáticas?

Para hacer un abordaje al anterior cuestionamiento se realizará, en primer lugar, una descripción teórica de la demostración en matemáticas y el uso de la traducción de códigos como medio de interpretación. Se proseguirá con la delimitación de la población, el análisis de los resultados obtenidos mediante una entrevista y una prueba, y se terminará con las conclusiones generadas por este trabajo investigativo.

Córdoba, P. y Quintana, Y. (2013). Dificultades de los estudiantes que se están formando como futuros profesores de matemáticas, para comprender el lenguaje matemático utilizado en demostraciones geométricas euclidianas. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 173-178). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Al hacer uso del término "lenguaje cotidiano" se tomará la definición propuesta por Radillo y Huerta (2007): "es aquel [lenguaje] utilizado en la vida diaria del individuo" (p. 265); es decir, es el lenguaje natural que se usa a diario, sin tecnicismos.

En las matemáticas se ha desarrollado un lenguaje particular, distinto al cotidiano, para transmitir el conocimiento y el pensamiento matemático, libre de cualquier influencia; está excesivamente formalizado (Radillo y Huerta, 2007).

En cuanto a las demostraciones geométricas de Euclides se presentan según Radillo y Huerta (2007, pp. 272-273) las siguientes dificultades:

> C1. Dificultades en cuanto a términos del español especializado con condiciones que deberían representarse con más de dos expresiones simbólicas.C2. Dificultades en cuanto a términos del español especializado, que son diferentes en el lenguaje cotidiano.
>
> C3. Dificultades en los sintagmas del español especializado que tienen significados muy precisos, con mayor exigencia de exactitud que en el lenguaje cotidiano.
>
> C4. Dificultades de sintaxis en la notación simbólica y/o representación gráfica.
>
> C5. Dificultades en la traducción entre códigos.

El razonamiento se entiende como una construcción de hipótesis a partir de ideas ya fundamentadas, y en ocasiones no axiomáticamente demostradas. Rusell (1999) lo define como aquello que: "[U]tilizamos para pensar acerca de las propiedades de estos objetos matemáticos y para desarrollar generalizaciones que se puedan aplicar a clases completas de objetos-números, operaciones, objetos geométricos o conjuntos de datos" (p. 1). Harel y Sowder (1998, citado por Molfino, 2006) identifican dos tipos de razonamiento según la veracidad de las ideas planteadas; a saber:

1. Argumentación
2. Demostración

   Externa: puede ser autoritaria, ritual, simbólica.

Empírica: puede ser perceptiva e inductiva.

Analítica: puede hacerse a partir de transformaciones y axiomas.

METODOLOGÍA

En este caso la manera de aproximarse al problema de investigación planteado fue emplear técnicas de tipo cualitativo (Martínez, 2006). De las herramientas que hacen parte de este tipo de investigación, se usaron principalmente instrumentos de recolección de datos.

Se aplicó una prueba a dos estudiantes de la Licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas, de la Universidad Distrital, que en el periodo 2012-1 estaban inscritos en el curso Problemas Aritméticos II. La prueba consistió en presentarles una proposición de los *Elementos* y pedirles que usaran argumentos matemáticos y geométricos para explicar la veracidad de la demostración presentada por Euclides en la proposición 5. Mientras ellos trabajaban en la tarea propuesta se hizo observación directa. La proposición elegida fue la (1, 5): "En triángulos isósceles los ángulos en la base son iguales, y si los lados iguales se alargan, los ángulos situados bajo la base serán iguales entre sí" (Vera, 1970, p. 722).

ANÁLISIS DE DATOS

El Estudiante 1 presentó las siguientes dificultades al momento de resolver la prueba:

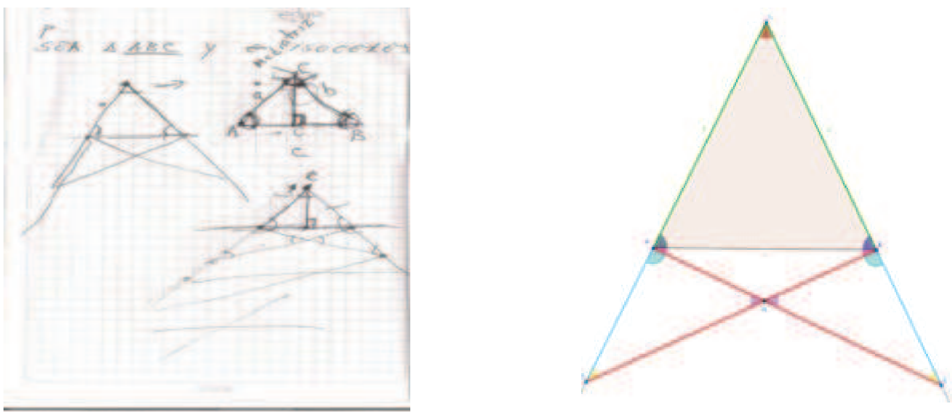

Figura 1: Solución dada por Estudiante 1

C4. Dificultades de sintaxis en la notación simbólica y/o representación gráfica. En relación con la descripción dada para el triángulo isósceles se observa que existe confusión respecto a los ángulos del triángulo, pues establece como requisito que uno de ellos debe medir 90 grados. Después por sugerencia de otro estudiante agregó otra condición: que dos de los lados del triángulo deben ser iguales. Esto constituye una demostración de tipo externo.

C2. Dificultades en cuanto a términos del español especializado, que son diferentes en el lenguaje cotidiano. Una dificultad constante radicó en hacer mal uso del lenguaje matemático, usando términos como "alargamiento" para hablar de prolongar rectas y "paralelas" sin demostrar o tan siquiera observar las rectas que cumplían tal característica; en principio, se observó que el estudiante no pensaba en la finalidad de la proposición, aislando las demostraciones sin realizar una axiomática. En particular, el estudiante tomó como sinónimos palabras del lenguaje cotidiano con respecto al lenguaje matemático, lo que puede generar confusiones.

C1. Dificultades en cuanto a términos del español especializado con condiciones que deberían representarse con más de dos expresiones simbólicas. No utilizar de manera escrita el lenguaje matemático al igual que no interconectar de manera axiomática las ideas para demostrar la veracidad de las afirmaciones. Esto expresa que los estudiantes no creen necesario demostrar ciertas propiedades, porque al parecer "ya están dadas" y por ello no es necesario plantearlas; esta es una dificultad que se puede evitar con el uso adecuado de la demostración en la enseñanza.

En cuanto al Estudiante 2 presenta las siguientes dificultades al momento de resolver la prueba:

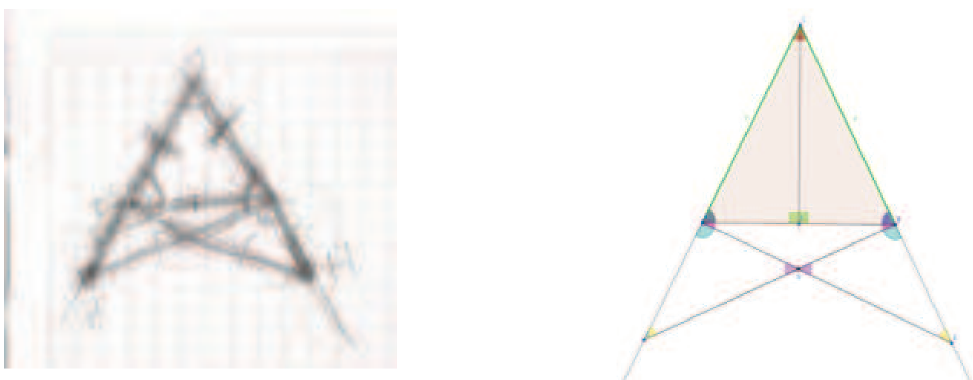

Figura 2: Solución dada por Estudiante 2

C3. Dificultades en los sintagmas del español especializado que tienen significados muy precisos, con mayor exigencia de exactitud que en el lenguaje cotidiano. Dentro del proceso de comprensión de la demostración geométrica, el estudiante empleó en repetidas ocasiones el término "iguales", tomándolo como un término del lenguaje cotidiano, ya que en la geometría este sintagma tiene el significado de congruencia; empleó tal término para referirse a la relación de igualdad geométrica. Con estos hechos, se puede afirmar que al momento de demostrar, el estudiante llevaba a cabo una demostración empírica, inductiva.

C4. Dificultades de sintaxis en la notación simbólica y/o representación gráfica. El estudiante no empleó la notación simbólica, ya que durante el proceso que desarrolló para comprender la proposición presentada, sus afirmaciones y argumentos se basaron únicamente en la representación gráfica, obviando el rigor que requería la demostración. A partir de esto, se puede catalogar esta demostración como externa, más precisamente una demostración ritual, pues supone que es verídica la información de la representación gráfica.

CONCLUSIONES

Los estudiantes no usan una secuencia lógica, que permita dar una interpretación cabal de la proposición 5 del libro 1, esto nos lleva a inferir que no ven la importancia de realizar una demostración específica de cada elemento que tratan, "consideran válido un razonamiento sólo por la forma del mismo, sin reparar en su contenido o su rigor" (Harel y Sowder, 1998, citado en Molfino, 2006, p. 36) realizando una demostración externa ritual.

La principal dificultad radicó en la forma en que se abordó la justificación de las proposiciones, pues los estudiantes daban como válidos elementos geométricos que se presentaban en la proposición o que lograban identificar a partir de la representación gráfica. Así, afirmamos que la demostración externa fue el principal tipo de demostración implementado, y además, que presentan dificultad en cuanto a términos del español especializado con condiciones que deberían representarse con más de dos expresiones simbólicas (Radillo y Huerta, 2007), pues jamás se llegó al nivel de rigor que requiere la demostración de la proposición.

Los estudiantes que fueron objeto de estudio no se catalogaron en la dificultad correspondiente a la categoría C1, ya que en ningún momento hicieron uso de la simbología matemática; por lo tanto, no usaron símbolos para cada una de las palabras que se mostraban en el desarrollo de la demostración euclidiana.

Referencias

Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (Síntesis conceptual). *Revista de Investigación en Psicología*, *9*(1), 123-146. Recuperado de http://sisbib.unmsm.edu.pe/bvrevistas/investigacion_psicologia/v09_n1/pdf/a09v9n1.pdf

Molfino, V. (2006). *Lugares geométricos: ¿Cuál es su rol en la enseñanza de la demostración en geometría?* (Tesis de maestría). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, Montevideo, Uruguay. Recuperado de http://www.fing.edu.uy/imerl/didactica_matematica/Documentos_2008/vmolfino_tesis%20may%2006.PDF

Radillo, M. y Huerta, S. (2007). Obstáculos en el aprendizaje de la geometría euclidiana, relacionados con la traducción entre códigos del lenguaje matemático. En R. Abrate y M. Pochulu (Comps.), *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de matemáticas* (pp. 263-280). Villa María, República Argentina: Universidad Nacional de Villa María. Recuperado de http://unvm.galeon.com/Cap13.pdf

Russell, S. (1999). Mathematical reasoning in the elementary grades. En L. Stiff y F. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12. 1999 Yearbook* (pp. 1-12). Reston, EUA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vera, F. (Tr. y Ed.). (1970). Euclides: elementos de geometría. En *Científicos griegos* (vol. I, pp. 702-980). Madrid, España: Editorial Aguilar.