# INICIACIÓN EN LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA USANDO GEOGEBRAPRIM EN CUARTO DE PRIMARIA

**Jenny Escobar, Fredy Barbosa y Leonor Camargo**
*Universidad Pedagógica Nacional*
mdma_jescobar164@pedagogica.edu.co, mdma_fbarbosa172@pedagogica.edu.co,
lcamargo@pedagogica.edu.co

Se pone en discusión el avance de una herramienta analítica para estudiar la posibilidad de introducir a niños de grado cuarto de primaria en la práctica de la demostración en geometría con el apoyo de un programa de geometría dinámica.

## DESCRIPCIÓN DE LA PROBLEMÁTICA

Este escrito presenta algunos avances del trabajo de grado *La demostración en geometría: una mirada desde la educación primaria*, que se enmarca en la línea de investigación "Argumentación y prueba¨ de la Maestría en Docencia de la Matemática, programa de postgrado de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia).

El objetivo del trabajo de grado es diseñar, implementar y evaluar una trayectoria de enseñanza que favorezca la actividad demostrativa en grado cuarto de primaria en una perspectiva sociocultural. Se busca que, mediante dicha trayectoria los estudiantes se inicien en la actividad demostrativa en geometría, práctica que caracteriza el quehacer matemático y que se evidencia en procesos como: explorar, descubrir, conjeturar y validar hechos geométricos.

El objetivo de esta comunicación es poner en discusión los primeros avances de la construcción de una herramienta analítica con la que estamos evaluando las intervenciones de los estudiantes y del profesor, en el curso de la implementación de la experiencia. La evaluación nos permitirá explicar los resultados obtenidos en el aprendizaje de los niños, hacer ajustes al diseño de la propuesta y ponerla a consideración de la comunidad de educadores e investigadores en matemáticas.

Escobar, J., Barbosa, F. y Camargo, L. (2013). Iniciación en la actividad demostrativa usando GeoGebraPrim en cuarto de primaria. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 179-186). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

## MARCO REFERENCIAL

En consonancia con las ideas del grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría*, *Æ • G* (Perry, Samper, Molina, Camargo y Echeverry, en evaluación), de la Universidad Pedagógica Nacional, concebimos la actividad demostrativa para niños de cuarto de primaria como una práctica asociada a la resolución de problemas, que involucra dos procesos: la conjeturación y la justificación. Estos se relacionan porque se busca justificar aquello que se conjetura. La conjeturación incluye detectar un invariante mediante la exploración, verificarlo y expresarlo como solución a un problema; el resultado, aun cuando no se exprese como una condicional, se toma como una conjetura. La justificación busca la producción de un argumento que valide dicha conjetura, en un sistema de conocimiento compartido en la clase.

De acuerdo con Stylianides (2007, p. 291), consideramos la justificación, que semenciona en la definición de actividad demostrativa, como una demostración si es un argumento matemático, una secuencia conectada de afirmaciones a favor de un enunciado y si las afirmaciones provienen de un sistema de conocimiento en el que los estudiantes:

- Usan hechos geométricos que son aceptados por la comunidad de la clase; esto quiere decir que los estudiantes los conocen, los aceptan y recurren a ellos cuando los necesitan.
- Usan formas de razonamiento que son válidas, conocidas y al alcance de la comunidad de la clase. En nuestra trayectoria, procuramos que los niños construyan enunciados condicionales en los que usen los hechos geométricos en situaciones específicas y eventualmente se refieran a los hechos geométricos como garantía de lo que afirman.
- Usan formas comunicativas convenidas, es decir, notación, lenguaje simbólico, y expresiones al alcance de la comunidad de la clase. En nuestro caso, intentamos que los niños hagan uso del lenguaje y la notación de objetos de la geometría plana como segmentos, circunferencia, congruencia, bisecar, etc.

Para instaurar un ambiente de clase en el que se lleve a cabo la actividad demostrativa con las características mencionadas, se hace necesario un esfuerzo explícito por parte del profesor para establecer normas sociomatemáticas que la promuevan (Cobb y Yackel, 1998), y una actitud para crear una atmosfera de resolución de problemas, por cuanto es ahí donde los estudiantes tienen la posibilidad de exponer sus ideas, argumentar a favor de ellas y justificarlas. Gracias a la autonomía que promueva el profesor, los estudiantes se animan a expresar el resultado de sus exploraciones y a defender los resultados obtenidos en el lenguaje y las formas de razonamiento aceptadas, y con sustento en los hechos geométricos establecidos en la clase. En la trayectoria que estamos evaluando hemos identificado, hasta el momento, las siguientes normas sociomatemáticas: (i) Cada resultado que se obtenga debe ser justificado usando las definiciones y hechos geométricos conocidos. (ii) Para hacer referencia a un objeto geométrico se debe usar el lenguaje acordado.

## Metodología

La metodología de investigación empleada en el trabajo de grado es un experimento de enseñanza que pone a prueba una trayectoria hipotética de aprendizaje sobre la demostración geométrica en grado cuarto de primaria. El diseño de la enseñanza se va modificando en las reuniones del grupo de investigación según sea la interacción que se genere por parte de los aprendices (Steffe y Kieran, 1994; Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble, 2003).

El diseño del experimento contempla la resolución de siete problemas de geometría plana elemental en un ambiente de geometría dinámica mediante el uso del software GeoGebraPrim. Este tipo de ambiente da la posibilidad a los estudiantes de explorar, descubrir invariantes y enunciarlos para convertirlos en hechos geométricos. Algunos de ellos se usan para justificar otros, generalmente los que se enuncian como resultado de los últimos problemas, constituyendo un sistema teórico local. Los problemas se diseñaron en una secuencia que buscaba que los estudiantes tuvieran elementos teóricos para justificar que si un triángulo está inscrito en una circunferencia y uno de sus lados es el diámetro de ésta, entonces el triángulo es rectángulo.

Para efectos del análisis del experimento de enseñanza se hicieron videograbaciones y transcripciones del último problema:

> Problema 7. Construir una circunferencia de centro $O$, un diámetro $AB$, un punto $D$ en ella y el triángulo $ABD$. Arrastrar el vértice $D$ e investigar una propiedad del triángulo. Explicar por qué el triángulo tiene esa propiedad.

Los resultados obtenidos en dos problemas previos (4 y 6) les proporcionaban los hechos geométricos para poder justificar el hecho geométrico detectado en el último problema. En el problema 4, los estudiantes descubrieron que si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes y se bisecan entonces el cuadrilátero es un rectángulo. En el problema 6 descubrieron que si tres segmentos congruentes, *OA*, *OB* y *OC*, tienen un extremo común, *O*, que es el punto medio del lado *AC* de un triángulo *ABC*, entonces el triángulo es rectángulo.

Para sustentar la pertinencia de la herramienta analítica que estamos usando mostraremos algunos fragmentos de la interacción sostenida por tres estudiantes y el profesor, durante la actividad demostrativa que se llevó a cabo alrededor del problema 7. En el Cuadro 1 se presentan las categorías de análisis que hasta ahora son parte de la herramienta. Las dos primeras categorías de la segunda columna aluden a la primera norma sociomatemática.

| ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA | NORMAS SOCIOMATEMATICAS |
|---|---|
| Explora en busca de invariantes. (EBI)<br>Detecta invariante. (DI)<br>Verifica invariante. (VI)<br>Formula conjetura. (FC)<br>Usa hechos geométricos aceptados. (UHG)<br>Usa formas de razonamiento válidas y conocidas. (UFV)<br>Usa formas comunicativas aceptadas. (UFC)<br>Enriquece la figura. (EF) | Justifica con los hechos geométricos aceptados. (JHG)<br>Usa varias formas para justificar. (VFJ)<br>Habla en lenguaje matemático. (HLM) |

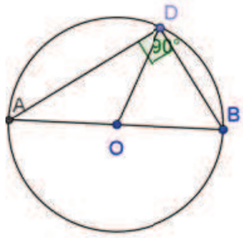
## ANÁLISIS DE LOS DATOS

El fragmento con el que vamos a ejemplificar los análisis comienza después de que los estudiantes: (i) han reportado, mediante la opción 'Texto' del programa GeoGebraPrim la conjetura a la que llegaron luego de la exploración, es decir, que el triángulo *ABD* es rectángulo con ángulo recto en *D*; (ii) han hallado un primer camino para justificar la conjetura, construyendo el segmento *OD*, mediante el hecho geométrico resultado del problema 6; (iii) y la profesora les pide buscar otra manera de justificar que el triángulo *ABD* es rectángulo.

23. Profesora: (…) ¿Qué otro camino [hay para justificar que el triángulo *ABD* es rectángulo]? (…)

…

25. Profesora: ¡No! Ya lo tienen ahí… sin decirme medidas. Miren, ustedes no utilizaron medidas. Utilizaron hechos geométricos, utilizaron hechos geométricos que tenemos.




…

30. Oñate: Al hacer el punto *D* y unirlo con *O* se… se da…

31. Torres: Para que se bisequen tiene que ser que se crucen […]

….

38. Torres: Para que se bisequen hay que hacer eso [señala con dos dedos lo que significa que dos segmentos se bisequen]. Mire, cuando se bisecan es que se cruzan.

…

41. Torres: Sí se bisecan, mire… vea, al cruzarse [toma un punto *C* de la circunferencia, traza las rectas *AC*, *CB* y *OC*]; éstos [señala lados *AC* y *CB*] se cruzan.

La profesora afianza la norma sociomatemática de usar varias formas de justificar [23] (VFJ) y de usar los hechos geométricos conocidos por la clase [25] (JHG). Los estudiantes se embarcan en una nueva exploración de la figura, en busca de propiedades que les permitan usar hechos geométricos conocidos. Oñate sugiere colocar un punto *C* en la circunferencia y unirlo con *O* [30] (EF), acción que Torres interpreta como la búsqueda de dos segmentos que se bisequen [31]. Por ello, intenta traer a colación un hecho geométrico relacionado con segmentos que se bisecan [31, 38] (UHG). Después, enriquece la representación en busca de otro camino que justifique la conjetura [41] (EF). Aunque es un intento fallido en busca de una propiedad con la que puedan justificar el hecho geométrico, es importante porque les da ideas para la siguiente exploración.

En la Figura 1 se muestran dos imágenes que ejemplifican el trabajo posterior de los niños en busca de argumentos geométricos (EBI) que justifiquen por qué el triángulo *ABD* es recto en *D*. Inicialmente, Torres propone hacer "otro triángulo rectángulo, en la parte de abajo, idéntico". Para ello colocan un punto *C* en la circunferencia, procurando que no quede en el mismo semiplano determinado por la recta *AB* donde está *D*. Buscan hacer un triángulo parecido al triángulo *ABD* en el otro semiplano. Trazan las rectas *CO*, *CA* y *CB*. Luego, arrastran el punto *D* hasta que los puntos *C*, *O* y *D* quedan colineales (EF). Oñate exclama: "¡ah, se bisecan!" y Torres dice "¡ah, claro, ahí se bisecan los dos [segmentos]!".

Figura 1: Exploración en busca de dos segmentos que se bisequen

Oñate se da cuenta de que se ha formado un cuadrilátero especial, pero no alude al hecho de que sea un cuadrado o un rectángulo, y pide a sus compañeros buscar en los apuntes de clase, qué hecho geométrico podrían usar (HG). Con ayuda de la profesora, elaboran la justificación:

| | | |
|---|---|---|
| 50. | Oñate: | ¿Y si hay un cuadrilátero? Vaya leyendo las citas, que ahí dicen muchas cosas. |
| 51. | Torres: | ¿Las que? |
| 52. | Oñate: | Las citas, sí ahí [en el cuaderno]. |
| 53. | Oñate: | Si hay un cuadrilátero… |
| … | | [La profesora se acerca al grupo] |
| 58. | Profesora: | Bueno. Listo. Entonces ¿qué es lo que quieren justificar? ¿Esto? [Señala con el dedo el ángulo recto *D*]. Qué este triángulo sea rectángulo, ¿cierto? Hicieron las diagonales que se bisecan y son congruentes. Y cuando pasa eso… ese cuadrilátero, ¿el cuadrilátero es un…? |
| 59. | Oñate: | Es un rectángulo. |

…

65. Profesora: (…) ¿y qué pasa con los rectángulos?

…

70. Profesora: (…) ¿Cómo son sus ángulos?

…

72. Oñate: ¡Ángulos rectos!

…

75. Profesora: Entonces estoy justificando que todos estos ángulos son rectos [Los ángulos *A*, *B*, *C* y *D*] entonces [tapa la mitad del cuadrilátero] voy a justificar que este [Se refiere al ángulo *D*] ¿es?:

…

82. Torres: Recto.

83. Profesora: Recto, y ¿qué pasa con un triángulo que tiene un ángulo recto?

84. Oñate: Es un triángulo rectángulo.

En las intervenciones [50-53], los niños buscan hechos geométricos relacionados con cuadriláteros (HG). La profesora se acerca al grupo y les insinúa una vía para elaborar la justificación [58]. Oñate evoca el hecho geométrico que necesitan [59]. La profesora [65-70] busca que los estudiantes aludan a propiedades o hechos geométricos sobre los rectángulos para justificar por qué *D* es un ángulo recto [65]. Al hacer esto promueve el uso de una de las normas sociomatemáticas (JHG) y formula una nueva pregunta con el objetivo de que los estudiantes centren la atención en los ángulos del cuadrilátero *ABCD* [70]. Posteriormente, Oñate reconoce que los ángulos *A*, *B*, *C* y *D* son rectos [72], pues conocían esta propiedad de los rectángulos y la habían consignado en sus apuntes. Finalmente, la profesora orienta la discusión con una nueva pregunta que permite a Torres identificar el ángulo *D* como recto [82] y a Oñate usar la garantía anterior para llegar así a la justificación de la conjetura [83] (HG).

## REFLEXIONES FINALES

Los análisis realizados hasta el momento nos permiten afirmar que la herramienta analítica parece ser útil para explicar la iniciación a la actividad demostrativa de estudiantes de primaria. Hemos podido detectar intervenciones en las que los niños exploran en busca de invariantes, enriquecen la figura para hacer conexiones con hechos geométricos, y con ayuda de la profesora justifican un invariante detectado usando un hecho geométrico conocido.

En el fragmento con el que se ejemplifica el análisis se aprecia que los niños logran hacer la justificación, pero no de manera autónoma. Sin embargo, valoramos su desempeño porque se hace evidente que ellos han empezado a refinar su lenguaje matemático, comienzan a adaptarse a las normas sociomatemáticas de la clase y quizá empiezan a comprender qué significa justificar con hechos geométricos. Estos son elementos considerados por Stylianides (2007) como centrales en el aprendizaje de la demostración.

## REFERENCIAS


Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Cobb, P. y Yackel, E. (1998). A constructivist perspective on the culture of the mathematics classroom. En F. Seeger, J. Voigt y U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 158-190). Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Perry, P., Samper, C., Molina, Ó., Camargo. L. y Echeverry, A. (en evaluación). *Actividad instrumentada y mediación semiótica: dos teorías para describir la conjeturación como organizador curricular*, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Steffe, L.P. y Kieren, K. (1994). Radical constructivism and mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(6), 711-733.

Stylianides, A.J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 289-321.