ANÁLISIS DIDÁCTICO, CONOCIMIENTO DIDÁCTICO Y FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

Pedro Gómez, Luis Rico[1]

En este artículo describimos una asignatura de formación inicial de profesores de secundaria. Esta asignatura se fundamenta en una conceptualización del modo en el que el profesor diseña, lleva a la práctica y evalua actividades de enseñanza y aprendizaje y del conocimiento que es necesario para hacerlo. Comenzamos nuestra descripción identificando los aspectos de la literatura de investigación que más relevantes para estos propósitos. En la reflexión conceptual que surge de esa revisión, nos centramos en la problemática del conocimiento del profesor y de la formación inicial de profesores. Formulamos una serie de cuestiones que consideramos deben responderse a la hora de diseñar un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria y asumimos una posición con respecto a estas cuestiones para fundamentar el diseño curricular de la asignatura, que describimos al final.

INTRODUCCIÓN

Los autores de este artículo somos en la actualidad profesores de la asignatura *Didáctica de la Matemática en el Bachillerato* en la Universidad de Granada, España. Esta asignatura forma parte del plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria que ofrece esta universidad. Su propósito es el de contribuir a la iniciación de la formación del futuro profesor de matemáticas mediante la didáctica de la matemática. En este artículo, describimos dos aspectos de esta asignatura. Por un lado, establecemos unos fundamentos para la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Por el otro, nos basamos en estos fundamentos para describir y justificar el diseño de la asignatura.

El artículo se divide en tres partes. En la primera, hacemos una revisión de la literatura de investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas. Centramos nuestro interés en las nociones de conocimiento pedagógico de contenido y currículo, por una parte, y en un modelo que aborda la problemática de conceptualizar la enseñanza de las matemáticas cuando se asume una posición constructivista del aprendizaje de los escolares, por la otra. Partiendo de estas nociones y de este modelo, formulamos una fundamentación para la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Esta fundamentación surge de asumir una posición con respecto a las matemáticas escolares,

1.Este documento es un borrador que no ha sido revisado por Luis.

al aprendizaje en el aula de matemáticas, a las maneras como el profesor debe contribuir a ese aprendizaje, a los conocimientos que el profesor debe tener para lograrlo, a las maneras como el profesor puede construir esos conocimientos, y al contexto en el que tiene lugar la formación inicial del profesor de matemáticas. En la tercera parte, y con base en esta fundamentación, describimos el diseño curricular de nuestra asignatura.

INVESTIGACIÓN SOBRE EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

En este apartado hacemos una revisión de la literatura de investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas. Esta literatura es abundante y variada. Centraremos nuestra atención en las nociones de conocimiento pedagógico de contenido y currículo y en el trabajo de Simon (1995) sobre una pedagogía de las matemáticas desde una perspectiva constructivista. Estas nociones y este trabajo nos servirán de marco conceptual para las reflexiones que haremos posteriormente sobre la fundamentación de programas de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.

La investigación sobre el conocimiento del profesor se centra en dos grandes agendas: aquella preocupada por la manera como el futuro profesor, que no tiene experiencia docente, aprende a enseñar; y aquella que centra su atención en el desarrollo profesional del profesor experimentado. Estas dos agendas de investigación se relacionan con dos esquemas de formación: la formación inicial y la formación permanente. Estas agendas de investigación y estos esquemas de formación corresponden a problemáticas relacionadas pero diferentes. En este artículo nos interesamos por la problemática del aprendizaje del futuro profesor de matemáticas. No obstante, haremos una reflexión general sobre el conocimiento del profesor de matemáticas.

La investigación sobre el conocimiento del profesor y su relación con la enseñanza de las matemáticas ha pasado por varias fases (Ball, 1991; Cooney, 1994). En la primera fase, llamada “de la enseñanza eficiente” y que correspondió al paradigma de investigación conocido como proceso-producto, se buscó identificar, con base en las opiniones de los escolares, las características de los buenos profesores. Se identificaron principalmente características relacionadas con su personalidad. Al tratar de relacionar estos resultados con el rendimiento de los escolares, se hicieron patentes las deficiencias de este esquema y se entró en una segunda fase. En esta fase se buscó asociar las características del profesor con el aprendizaje de sus alumnos y se encontró, entre otras cosas, que el conocimiento matemático del profesor (medido, por ejemplo, con el número de cursos que ha tomado o de títulos que ha obtenido) no es un buen indicador del rendimiento de los escolares. En este segundo esquema, el interés se centró en los resultados de los procesos, más que en los procesos mismos. Lo que sucedía en la mente del profesor y lo que sucedía en el aula se consideraban como cajas negras. En la tercera fase, llamada “del pensamiento del profesor”, se aborda la enseñanza como una actividad de pensamiento y acción. La investigación se interesa entonces por la actuación del profesor, por la manera como esta actuación depende de las decisiones que él toma y por la relación entre estas decisiones, por un lado, y su conocimiento, sus creencias, sus metas y sus intereses, por el otro. En esta aproximación esencialmente cognitiva se resalta la importancia de las creencias y del conocimiento del profesor y se busca caracterizar estas creencias y este conocimiento al identificar los conocimientos disciplinares que le sirven de referencia y al establecer las formas en que estas estructuras cognitivas se conforman, cambian y se movilizan en la práctica. En la actualidad, investigadores como Llinares (1998) y Lerman (2001) sugieren que esta aproximación cognitiva puede ser insuficiente y que la complejidad del proceso de aprendizaje del profesor y de su práctica profesional debe también ser estudiada desde perspectivas socioculturales. Estas perspectivas enfatizan el papel del profesor como miembro de unas comunidades de práctica, resaltan la importancia del contexto en el que tienen lugar esas prácticas, y conciben el aprendizaje del profesor como el proceso en virtud del cual él progresa en su participación como miembro de esas comunidades de práctica.

Conocimiento pedagógico de contenido

Puesto que nuestro interés se centra en el aprendizaje del futuro profesor de matemáticas, fijaremos nuestra atención en aquellos aspectos de la literatura de investigación que consideran el conocimiento del profesor y la manera como un estudiante para profesor construye ese conocimiento. La reflexión sobre el conocimiento del profesor presenta un cisma cuando, en 1986, Shulman introduce las nociones de conocimiento pedagógico del contenido y base de conocimiento para la enseñanza. Estas nociones constituyeron una contribución innovadora para la época puesto que, con base en ellas, Shulman refutó la visión tradicional según la cual para ser buen profesor de matemáticas bastaba con tener suficiente conocimiento de las matemáticas, y complementarlo con algunos conocimientos pedagógicos. Shulman enfatizó la importancia de esta noción como fundamento para la enseñanza: “el conocimiento pedagógico de contenido es de especial interés porque identifica diferentes cuerpos de conocimiento para la enseñanza. Representa la mezcla de contenido y pedagogía en la comprensión de cómo se organizan, representan y adaptan tópicos, problemas o cuestiones particulares a los diversos intereses y capacidades de los estudiantes y cómo se presentan para la instrucción” (1987, p. 8). La noción de conocimiento pedagógico de contenido implica un cambio importante en la comprensión del profesor “de ser capaz de comprender el contenido temático para ellos mismos, a llegar a ser capaz de descifrar ese contenido temático en nuevas formas, reorganizarlo y secuenciarlo, vestirlo con actividades y emociones, en metáforas y ejercicios, y en ejemplos y demostraciones, de tal manera que pueda ser captado por los estudiantes” (p. 13). No obstante, la noción, expresada de esta manera, es muy general y no permite determinar qué tipos de conocimientos específicos se encuentran involucrados, ni la manera como se supone que estos conocimientos se deberían implementar en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

“Con el tiempo, la noción de conocimiento pedagógico de contenido se deslizó, de manera rápida y sin perturbaciones, en la retórica de los formadores de profesores. Hoy, el concepto se da por sentado como si representara el sentido común. No obstante, es un concepto problemático, y estos problemas tienen raíces profundas en el pasado de la formación de profesores. Sus orígenes y su propósito aparecen perdidos y sirven como ejemplo de la 'extensa amnesia individual y colectiva' que de acuerdo con Shulman (1986, p. 11) afecta la enseñanza" (Bullough, 2001, p. 657). El significado de la noción no ha evolucionado de manera relevante en la literatura de investigación en educación matemática durante la última década y media. La mayoría de los trabajos que mencionan la noción la siguen utilizando con el significado general propuesto por Shulman, como el conocimiento necesario para transformar un contenido para la enseñanza. Por ejemplo, Geddis (1993) lo define como la "amalgama entre pedagogía y contenido que les permite a los profesores transformar el conocimiento para hacerlo accesible a los estudiantes" (p. 612) y Brown y Borko (1992) hablan de la "comprensión de cómo representar temas y cuestiones de un contenido específico de manera que sea apropiada para las diversas habilidades e intereses de los aprendices […] Formas de representar ideas, analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones" (p.211). No obstante, Cooney (1994) menciona dos trabajos en los que se ha buscado dar un significado más concreto a esta noción. Wittman (1989) considera que el punto de partida del conocimiento didáctico, o conocimiento pedagógico de contenido, son las matemáticas elementales, desde una perspectiva flexible que permita aplicarlas a los contextos educacionales. Este autor promulga una integración de epistemología, psicología, sociología y matemáticas en el desarrollo de programas de formación de profesores. Por otro lado, Cobb y Steffe (1983), asumiendo una perspectiva psicológica desde el marco constructivista, consideran que el conocimiento del profesor debe basarse en las ideas que tenemos sobre la manera como los estudiantes construyen las ideas matemáticas.

Por otra parte, mientras que en la didáctica de la matemática no parece haber mucho interés en profundizar y desarrollar la noción de conocimiento pedagógico de contenido, la comunidad de investigadores en didáctica de las ciencias sí se ha preocupado por ahondar en los diversos significados y sus posibles aplicaciones en la investigación y en la formación de profesores (Gess-Newsome y Lederman, 2001). En particular, Gess-Newsome (2001) hace una crítica del modelo del conocimiento pedagógico de contenido al formular dudas sobre su grado de precisión y su poder heurístico. Resalta la dificultad que enfrentan los investigadores que utilizan la noción para identificar instancias y componentes específicos del conocimiento pedagógico de contenido. Aunque la noción parece potente, la mayoría de los estudios tienden a centrar su atención en las líneas tradicionales sobre conocimiento temático de contenido o conocimiento pedagógico. Cuando se consideran los constructos que tradicionalmente constituyen el conocimiento pedagógico de contenido (contenido temático, pedagogía y contexto), es posible imaginar un continuo de modelos del conocimiento del profesor. Se parte de un extremo, el modelo integrativo, en el que el conocimiento del profesor se puede explicar a partir de la intersección de esos tres dominios. En el otro extremo, el del modelo transformativo, el conocimiento pedagógico de contenido es la transformación de los conocimientos de contenido temático, pedagógico y del contexto en aquella única forma de conocimiento que afecta la práctica de la enseñanza (p. 10). La posición que se asuma dentro de este rango de modelos posibles determina la manera como cada investigación determina los componentes y relaciones que caracterizan el conocimiento pedagógico de contenido.

La noción de conocimiento pedagógico de contenido dio lugar a nuevas líneas de indagación en el conocimiento del profesor al distinguir un conocimiento exclusivo de la enseñanza que era específico al contenido temático de la misma. En este sentido, ha sido una idea útil: "cualquier idea en educación es inherentemente incompleta y probablemente gravemente imperfecta. Una idea es útil en la medida en que ella puede estimular la reflexión y la erudición de otros" (Shulman, 2001, p. xi). Sin embargo, como lo indicábamos arriba, el gran volumen de literatura de investigación sobre el profesor que la utiliza o la menciona directamente no ha logrado asignarle suficiente precisión y poder heurístico. De hecho, como muchas de las grandes ideas, la noción de conocimiento pedagógico de contenido no ha permitido encontrar respuestas a preguntas existentes, sino que, más bien, ha posibilitado la formulación de nuevas preguntas, inexistentes en el pasado, que parecen centrar de manera más clara la problemática del conocimiento del profesor y su relación con la enseñanza. Al constatar que la formación de profesores se ha ido constituyendo en un campo de indagación sistemática, pero, al mismo tiempo, que la reflexión sobre el conocimiento del profesor de matemáticas y sobre la manera como el profesor construye ese conocimiento no se encuentra plenamente desarrollada, Cooney (1994) formula algunas de estas preguntas: "¿Qué tipos de conocimientos necesitan los profesores para ser eficientes [desde la perspectiva del aprendizaje de los alumnos]? ¿Qué tipos de experiencias deben vivir los profesores para construir ese conocimiento?" (p. 608) y "¿qué perspectivas teóricas nos pueden permitir comprender las experiencias que viven los profesores? ¿Qué perspectivas teóricas nos pueden permitir desarrollar programas de investigación y desarrollo que empujen nuestros esfuerzos hacia adelante?" (pp. 627-628). En otras palabras, ¿qué conocimiento debe tener el profesor, cómo lo puede construir y cómo podemos conceptualizar estas cuestiones? De esta manera, Cooney (1994) enfatiza la importancia de la reflexión sobre la cognición del profesor como elemento de una agenda de investigación. Por otro lado, él identifica otros tres elementos de esta problemática: el contexto, la necesitad de asumir una postura con respecto a la enseñanza para poder reflexionar sobre los conocimientos que necesitan los profesores, y la necesidad de asumir una posición con respecto a la manera como los escolares aprenden (en particular, desde la perspectiva del paradigma constructivista) si se pretende reflexionar sobre esquemas eficientes de enseñanza. Cooney no responde a estas cuestiones. Su preocupación se centra en la importancia de la noción autoridad en la concepción de la formación de profesores. "La orientación de la autoridad puede proveer una manera de conceptualizar cómo los profesores ven las matemáticas y, por consiguiente, proveer una base para influir en sus creencias" (p. 628). No obstante, Simon (1995) sí aborda algunas de estas preguntas. En particular, al centrarse en la problemática de la planificación local y reflexionar sobre la manera como debería ser la enseñanza, si se asume una posición constructivista del aprendizaje de los escolares, Simon introduce ideas que permiten concretar la reflexión sobre el conocimiento del profesor y su relación con la enseñanza de las matemáticas.

Ciclo de enseñanza de las matemáticas

Simon (1995) resume su trabajo de la siguiente manera: "partiendo de una perspectiva de constructivismo social sobre el desarrollo del conocimiento, el artículo continua la discusión sobre las deliberaciones pedagógicas que llevan a la determinación de los contextos de problemas que promueven la participación de los estudiantes. En particular, el artículo extiende la noción de enseñanza como indagación, examina el papel de diferentes aspectos del conocimiento del profesor, y explora el reto intrínseco y actual para *integrar los objetivos y la dirección del profesor para el aprendizaje con la trayectoria del pensamiento y el aprendizaje matemático de los estudiantes*" (p. 121). Simon propone, en términos de Steffe y d'Ambrossio (1995), un *modelo* de enseñanza coherente con los principios constructivistas del aprendizaje de las matemáticas que reconoce al profesor como agente reflexivo y cognitivo. Esto es, como alguien que construye su conocimiento a través de adaptarse a las experiencia que vive dentro de su contexto.

Este modelo, llamado por Simon *el ciclo de enseñanza de las matemáticas*, es un "modelo esquemático de la interrelación de aspectos del conocimiento, pensamiento, toma de decisiones y actuaciones del profesor" (p. 135). En este modelo (ver Figura 1), la enseñanza, desde la perspectiva del profesor,

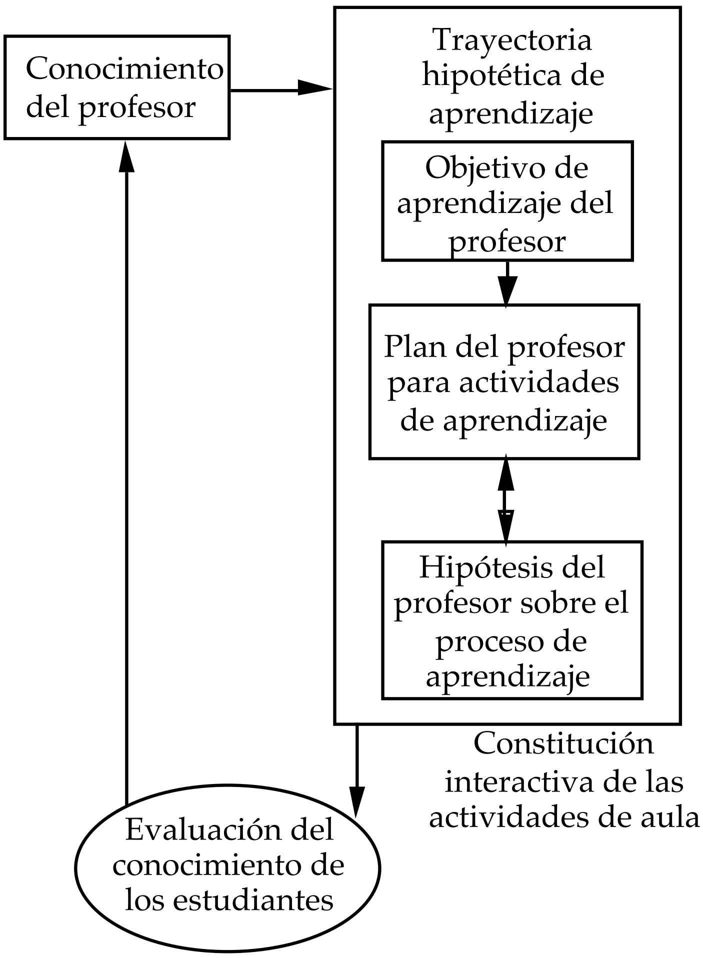

Figura 1. Ciclo de enseñanza de las matemáticas

está guiada por la *trayectoria hipotética de aprendizaje* que consiste en la predicción que el profesor tiene acerca del camino por el cual puede proceder el aprendizaje. “Una trayectoria hipotética de aprendizaje le da al profesor criterios para seleccionar un diseño instruccional particular; por lo tanto, yo tomo mis decisiones de enseñanza basado en mi mejor conjetura acerca de cómo va a proceder el aprendizaje” (p. 135). La trayectoria hipotética de aprendizaje tiene tres componentes, relacionados entre sí: la visión que el profesor tiene del objetivo de aprendizaje, la planificación del profesor para las actividades de aprendizaje y las hipótesis del profesor acerca del proceso de aprendizaje. El objetivo de aprendizaje es la guía que le permite al profesor decidirse por unas actividades de aprendizaje. Esa decisión la toma teniendo en cuenta también sus hipótesis acerca del proceso de aprendizaje. Y estas actividades afectan, a su vez, sus hipótesis sobre el proceso.

El centro de la propuesta consiste en sugerir que se trata de un proceso dinámico y cíclico. La trayectoria hipotética de aprendizaje no es algo que se determine con anterioridad a la realización de la clase y que permanezca estático durante ella. Por el contrario, la trayectoria hipotética de aprendizaje estará en permanente evolución a lo largo de la clase porque la puesta en práctica de las actividades y la permanente evaluación del conocimiento de los alumnos llevará al profesor a revisar dinámicamente la trayectoria hipotética de aprendizaje. El profesor diseña y revisa la trayectoria hipotética de aprendizaje con base en la evaluación de los conocimientos de los alumnos y su propio conocimiento. Es aquí donde entra en juego el conocimiento del profesor, con la aclaración adicional, teniendo en cuenta que se supone que el profesor es un agente cognitivo, de que el conocimiento del profesor también cambia con motivo de la experiencia que está viviendo en el aula. Esto se debe a que, en muchas ocasiones, lo que sucede en el aula es diferente de lo que el profesor esperaba, generando una perturbación que lo obliga a reformular sus hipótesis y su conocimiento.

En resumen, las principales características del modelo son las siguientes. El pensamiento de los estudiantes juega un papel central. El conocimiento del profesor evoluciona permanentemente. La planificación para la enseñanza incluye la generación de una trayectoria hipotética de aprendizaje. El cambio continuo en el conocimiento del profesor produce un cambio continuo en la trayectoria hipotética de aprendizaje. El modelo es local en el sentido de que se centra en la enseñanza de un tópico específico para una sesión de clase.

Aunque Simon (1995) no menciona a Shulman, ni se refiere a la noción de conocimiento pedagógico de contenido, consideramos que su trabajo hace aportes importantes a la reflexión sobre esta noción. En particular, el modelo del ciclo de enseñanza de las matemáticas y la idea de la trayectoria hipotética de aprendizaje permiten reflexionar sobre la relación entre el aprendizaje de los escolares, la manera como el profesor puede contribuir a la construcción de ese conocimiento y los conocimientos que son necesarios para lograrlo. Estas son cuestiones que Shulman (2001) ha resaltado posteriormente: “Espero que aquellos que usen esas ideas ahora y en el futuro le prestarán más atención de la que yo lo hice a las conexiones entre el conocimiento del profesor y sus últimas consecuencias para el aprendizaje y desarrollo de los escolares” (p. xi). Sin embargo, si uno de los intereses de conceptualizar el conocimiento del profesor es el poder diseñar programas de formación, entonces tenemos que preguntarnos sobre los conocimientos que debe tener el profesor y la manera de clasificarlos. Consideramos esta cuestión a continuación.

Clasificaciones del conocimiento del profesor

En este apartado describimos algunas de las clasificaciones del conocimiento del profesor que se han propuesta en la literatura. A partir de estas clasificaciones, examinamos algunas de las deficiencias de la noción de conocimiento pedagógico de contenido en la versión original de Shulman y describimos desarrollos recientes que abordan algunas de estas deficiencias.

Shulman (1987) clasifica los conocimientos del profesor en las siguientes categorías: temático de contenido, pedagógico de contenido, de otras áreas, del currículo, de los aprendices, de las metas educativas, y pedagógico general. Bromme (1994) propone una "topología" compuesta por los siguientes conocimientos: de las matemáticas como disciplina, de las matemáticas escolares, de la filosofía de las matemáticas escolares, de la pedagogía y conocimiento pedagógico específico al contenido y la integración cognitiva desde diferentes disciplinas. Por su parte, Simon identifica los conocimientos que se ponen en juego cuando, con base en la evaluación del conocimiento de los estudiantes, el profesor reformula la trayectoria hipotética de aprendizaje. Menciona los siguientes: conocimiento de las matemáticas, de las actividades matemáticas y las representaciones, hipótesis sobre el conocimiento de los estudiantes, teorías de los profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, y del aprendizaje de los estudiantes sobre un tema específico. Aunque pretende definir una estructura de la relación entre estos conocimientos y los componentes de la trayectoria hipotética de aprendizaje, esto no se logra puesto que sugiere que todos los tipos de conocimiento, excepto aquel sobre las actividades matemáticas y sus representaciones, afectan todos los componentes de la trayectoria hipotética de aprendizaje. Se tiene entonces una estructura muy general en la que casi todos los elementos se encuentran relacionados entre sí. No obstante, la clasificación de Simon, a diferencia de las taxonomías de Shulman y Bromme, es funcional: se asume una posición con respecto al aprendizaje de los escolares, se propone un esquema de enseñanza compatible con esa postura y se identifican los conocimientos que se consideran necesarios para realizar esa enseñanza.

Mientras que Simon no hace ninguna referencia a la noción de conocimiento pedagógico de contenido, las taxonomías de Shulman y Bromme separan este conocimiento de los otros conocimientos que incluyen en sus clasificaciones. Al hacerlo, el significado de esta noción se hace más confuso. Por ejemplo, resulta difícil imaginar cómo un profesor puede comprender "cómo se organizan, representan y adaptan tópicos, problemas o cuestiones particulares a los diversos intereses y capacidades de los estudiantes y cómo se presentan para la instrucción" sin tener en cuenta el conocimiento que él tiene de los aprendices. Por lo tanto, este conocimiento debería incluirse dentro del conocimiento pedagógico de contenido, aunque Shulman los presenta como independientes. Algo similar se podría decir, por ejemplo, de la relación entre el conocimiento de las matemáticas escolares y el conocimiento pedagógico específico al contenido de Bromme. Resulta evidente que no es fácil ubicar en compartimientos estancos los conocimientos que el profesor debe implementar en la instrucción y que estos conocimientos se deberían poner en juego de manera estructurada e interrelacionada.

Formulaciones posteriores de la noción de conocimiento pedagógico de contenido abordan estas cuestiones. Ya mencionamos la dualidad entre los modelos integrativos y participativos. Describimos ahora brevemente la propuesta de Morine-Dershimer y Kent (2001), puesto que representa un esfuerzo por evitar las reflexiones generales sobre el conocimiento pedagógico de contenido y profundizar con algún detalle en algunas de sus características. Ellos describen esquemáticamente su propuesta en dos figuras. En la figura 2 representan las categorías que contribuyen al conocimiento pedagógico de contenido. Vemos que la descripción que se hace en el modelo sobre el

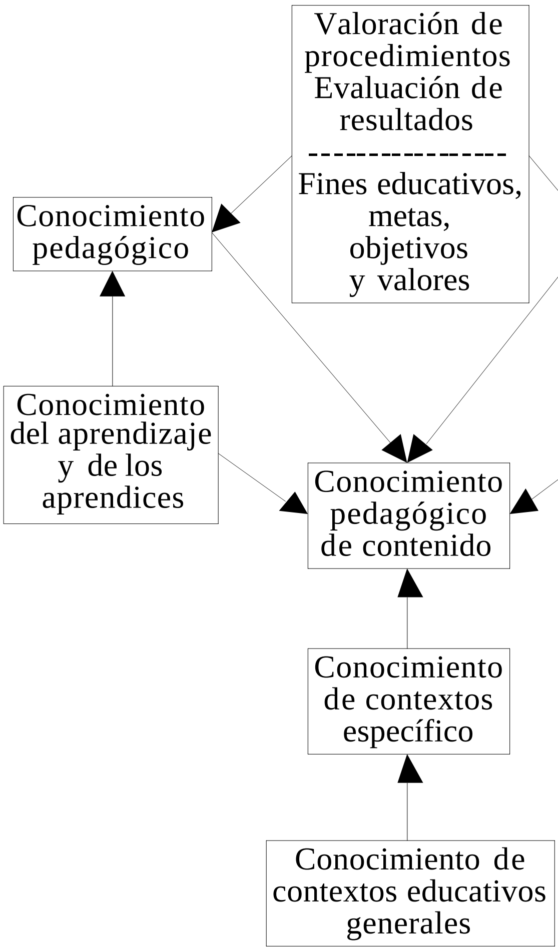

Figura 2. Categorías que contribuyen al conocimiento pedagógico de contenido

conocimiento del contexto, el conocimiento temático de contenido y el conocimiento pedagógico adquiere especificidad al introducir y relacionar el conocimiento sobre el aprendizaje y los aprendices y el conocimiento sobre el currículo, e incluir la evaluación y la reflexión sobre fines, metas y objetivos. Ellos resaltan tres puntos en este esquema: la imposibilidad de independizar el conocimiento de los fines y metas educativos de los procedimientos de evaluación y valoración; el hecho de que el conocimiento del currículo se sustenta en el conocimiento del contenido y en el conocimiento de metas y procedimientos de evaluación, mientras que el conocimiento pedagógico se sustenta tanto en el conocimiento del aprendizaje y de los aprendices, como en el conocimiento de metas y procedimientos de evaluación; y que, aunque en el esquema sólo se da especificidad al conocimiento de los contextos educativos generales, esta especificidad se puede asignar también a cada una de las otras categorías (e.g., conocimiento sobre el contenido específico) (pp. 21-22).

En el esquema de la Figura 3 estos autores profundizan en lo que ellos llaman algunas facetas del conocimiento pedagógico general y su relación con el conocimiento pedagógico de contenido (esquina superior izquierda de la Figura 2). Este esquema resulta interesante porque identifica la dualidad entre el conocimiento disciplinar producto de la investigación o conocimiento teórico (porción superior del esquema) y el conocimiento práctico producto de la experiencia (porción inferior). Estas son las dos fuentes del conocimiento pedagógico general que a su vez es uno de los cimientos del conocimiento pedagógico de contenido.

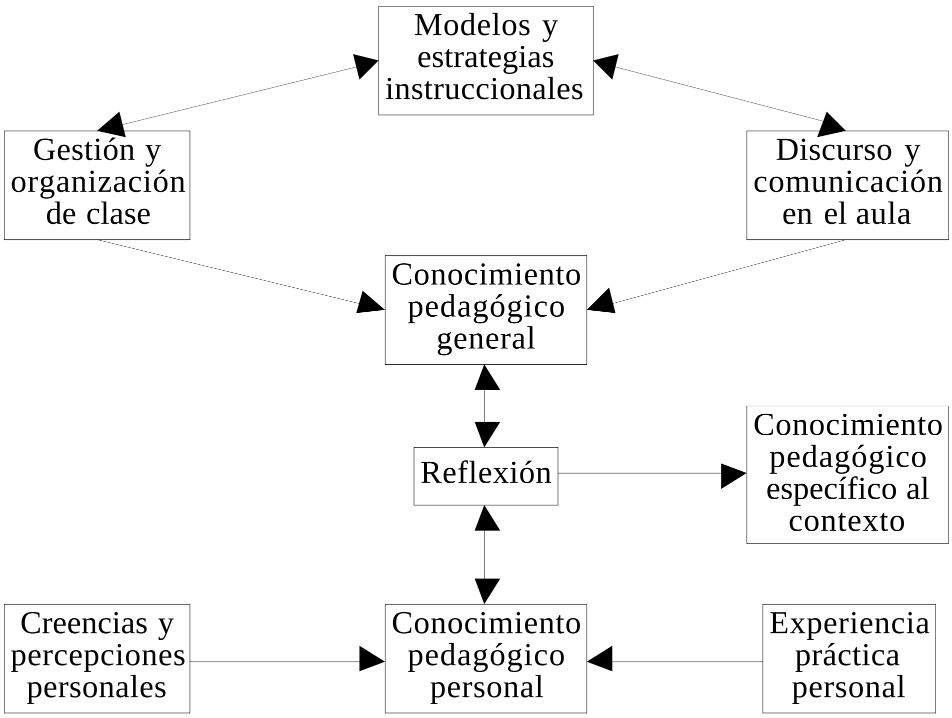

Figura 3. Facetas del conocimiento pedagógico

A diferencia de las clasificaciones de Shulman, Bromme y Simon, el modelo de Morine-Dershimer y Kent es transformativo en términos de Gess-Newsome y Lederman. Su atención a la especificidad de los diversos componentes del conocimiento pedagógico de contenido, a las relaciones entres esos componentes para conformar ese conocimiento y a algunas de las fuentes de donde puede surgir, permite dar un significado más claro y completo a la noción de conocimiento pedagógico de contenido.

CONOCIMIENTO DEL PROFESOR Y FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

La formación inicial de profesores de matemáticas debe apoyarse en una caracterización del conocimiento que el profesor debe poner en juego en la instrucción. Ésta es la razón por la que hemos recogido algunos de las cuestiones más importantes en la literatura de investigación sobre el conocimiento del profesor. La noción de conocimiento pedagógico de contenido es central en esta reflexión. Esta noción resalta la necesidad de caracterizar un conocimiento profesional que es específico a la enseñanza y al contenido a enseñar. Sin embargo, la mayoría de los estudios la utilizan con el significado original propuesto por Shulman. Solamente conceptualizaciones recientes, como la de Morine-Dershimer y Kent, aportan precisión al significado de la noción. No obstante, las ideas de Shulman abrieron nuevos espacios de reflexión y permitieron reconocer la importancia de indagar sobre aquellos conocimientos del profesor que son necesarios para realizar una enseñanza que sea coherente con una cierta visión del aprendizaje de los escolares. Simon aborda estas cuestiones al preguntarse sobre cómo debería ser la enseñanza si se asume una posición constructivista del aprendizaje. Él formula un modelo de carácter local que parte del aprendizaje de los escolares y que supone una cambio permanente en el conocimiento del profesor.

En lo que sigue, nos apoyaremos en algunas de estas ideas, en un esfuerzo por caracterizar el conocimiento que el profesor debe poner en juego cuando diseña, lleva a la práctica y evalúa actividades de enseñanza y aprendizaje de matemáticas. Buscaremos especificar los conocimientos disciplinares que sirven de referencia a este conocimiento, describir la manera como el profesor pone en juego ese conocimiento en su actividad docente, e identificar los ámbitos y esquemas en virtud de los cuales el profesor construye ese conocimiento. Nos apoyaremos en las ideas de Simon para resaltar la necesidad de asumir una postura con respecto al aprendizaje de los escolares y la importancia de considerar la problemática de la planificación local para describir los modos en que el profesor debe manejar la complejidad de las matemáticas escolares. Nuestra conceptualización tendrá como marco de referencia el concepto de currículo. Por esa razón, hacemos a continuación una reflexión sobre esa noción.

NOCIÓN DE CURRÍCULO

Como noción que permite organizar y describir un plan de formación, el concepto de currículo pretende responder a una serie de cuestiones con respecto a la naturaleza del conocimiento a enseñar, del aprendizaje, de la enseñanza y de la utilidad de ese conocimiento. Estas cuestiones dan lugar a cuatro *dimensiones* que permiten estructurar el análisis y el diseño del currículo:

- dimensión cultural/conceptual,
- dimensión cognitiva,
- dimensión ética/formativa y
- dimensión social.

Como veremos enseguida, la noción de currículo, como herramienta analítica del proceso educativo, se puede utilizar en múltiples niveles. Por esa razón, resulta ilustrativo utilizar una representación geométrica, como la de la Figura 4, en la que cada dimensión se representa en un eje (Rico, 1997, pp. 387-388).

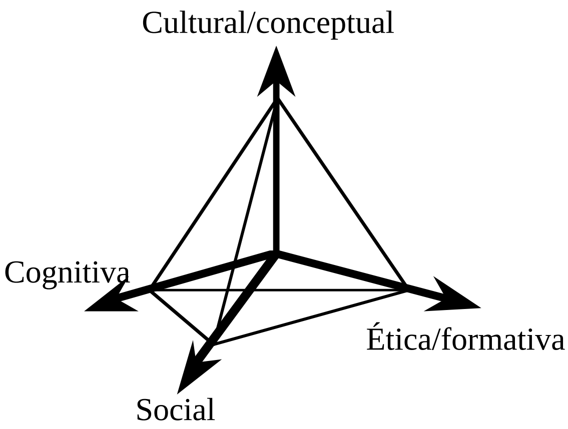

Figura 4. Dimensiones del currículo

En Rico (1997) se estudian cuatro niveles de reflexión sobre el currículo. Para cada uno de estos niveles, es posible determinar unas *componentes* que corresponden a cada una de las dimensiones, como se muestra en la Tabla 1 (p. 409).

		Dimensiones del currículo			
		1ª dimensión	2ª dimensión	3ª dimensión	4ª dimensión
		Cultural/ conceptual	Cognitiva o de desarrollo	Ética o formativa	Social
Niveles	Planificación para los profesores	Contenidos	Objetivos	Metodología	Evaluación
	Sistema educativo	Conocimiento	Alumno	Profesor	Aula
	Disciplinas académicas	Epistemología e Historia de la Matemática	Teorías del aprendizaje	Pedagogía	Sociología
	Teleológico o de fines	Fines culturales	Fines formativos	Fines políticos	Fines sociales

Tabla 1. Componentes del currículo según los niveles y dimensiones

El nivel de planificación para los profesores representa la versión más conocida del currículo. Es el esquema con el que tradicionalmente se describen los planes de formación a cargo de un profesor en el espacio de un aula. El segundo nivel representa la reflexión curricular cuando el ámbito de actuación es la institución educativa y el encargado es la administración. Los dos últimos niveles tienen un carácter más teórico. El tercer nivel considera las disciplinas que fundamentan la noción de currículo y que aportan la información necesaria para el estudio del currículo de matemáticas. El último nivel considera las finalidades para la educación matemática.

La información de los dos últimos niveles de la Tabla 1 es específica a la educación matemática. No obstante, la noción de currículo tiene aplicación general. Nosotros la utilizaremos en lo que sigue para organizar nuestra reflexión sobre dos planes de formación: la formación de unos escolares en una asignatura de matemáticas en una escuela y a cargo de un profesor; y la formación de unos futuros profesores en una asignatura de didáctica de la matemática dentro de un plan universitario de formación inicial de profesores de matemáticas.

CUESTIONES QUE HAY QUE ABORDAR PARA EL DISEÑO DE PLANES DE FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Hemos visto que la problemática del conocimiento del profesor y de su relación con la enseñanza es compleja. Para estudiar esta complejidad, hemos identificado, con base en algunas de las ideas que surgen de la literatura de investigación, una serie de cuestiones que deben fundamentar los planes de formación inicial de profesores de matemáticas. Esta fundamentación debe partir de una perspectiva en la que:

a) se asuma una posición con respecto a las matemáticas escolares;

b) se asuma una posición con respecto a la manera como los escolares construyen su conocimiento matemático;

c) se proponga una descripción cómo el profesor debe aportar a la construcción de ese conocimiento por parte de sus estudiantes;

d) se identifiquen los conocimientos que el profesor debe poner en juego para lograr lo anterior;

e) se asuma una posición con respecto a los procesos mediante los cuales el profesor construye esos conocimientos; y

f) se tenga en cuenta el contexto social, cultural, institucional y personal del plan de formación inicial de los profesores.

Esta cuestiones se refieren a ciertas dimensiones del currículo de dos planes hipotéticos de formación diferentes, aunque relacionados. Los puntos a, b y c se refieren a las dimensiones conceptual, cognitiva y formativa de un plan hipotético de formación en matemáticas de un grupo de escolares dentro del contexto estructurado de la institución educativa. Los puntos d y e se refieren a las dimensiones conceptual y cognitiva de un plan de formación inicial de profesores de matemáticas. No descartamos las otras dimensiones del currículo en ninguno de los dos planes de formación. Estas dimensiones aparecerán y jugarán su papel correspondiente en su debido momento. En los apartados que siguen consideraremos las seis cuestiones que acabamos de enumerar y asumiremos una posición con respecto a ellas. Esa información nos permitirá describir más tarde, de manera fundamentada, la asignatura a nuestro cargo.

MATEMÁTICAS ESCOLARES

Relación con el conocimiento disciplinar

El conocimiento matemático escolar es uno de los ejes centrales de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Este conocimiento matemático escolar tiene como referencia al conocimiento matemático disciplinar. El conocimiento disciplinar es el producto del trabajo de y de la interacción entre los miembros de la comunidad de matemáticos. Esta comunidad busca aportar al conocimiento universal en el área mediante el desarrollo de normas y procedimientos que aseguran el interés y la validez de los resultados que terminan aceptándose como parte del conocimiento matemático. Los resultados que se producen actualmente son necesariamente especializados y específicos. La forma en la que se presentan estos resultados —esencialmente simbólica, formal y deductiva— es consecuencia de las normas que regulan el discurso que se acepta en la comunidad.

Por su parte, el conocimiento matemático escolar debería organizarse, presentarse y justificarse teniendo como propósito el desarrollo de la comprensión de los escolares. Los conocimientos matemáticos que se construyen en la escuela corresponden, en la mayoría de los casos, a resultados matemáticos poco recientes y de carácter general. Mientras que en la disciplina matemática, el conocimiento matemático se organiza alrededor de enunciados que pueden formular proposiciones, teorías, hipótesis o afirmaciones que pueden ser verdaderos o falsos, en la escuela el conocimiento matemático escolar se compone de palabras con las que se formulan conceptos, términos o designaciones que pueden o no ser significativos desde la perspectiva del escolar. [** Referencia a Luis - Popper**]

Uno de los propósitos centrales de la enseñanza es el de presentar y promover la construcción del conocimiento matemático desde múltiples perspectivas y con gran variedad de significados. Por lo tanto, el profesor debe partir del conocimiento matemático disciplinar para que, de su análisis, pueda identificar, desarrollar y estructurar sus múltiples significados. Las maneras como profesores, autores de libros de texto y diseñadores del currículo analizan el conocimiento matemático disciplinar y producen el conocimiento escolar son muy variadas y dependen, entre otros factores, de su visión sobre cómo los escolares construyen su conocimiento y la manera como el profesor aporta a ese proceso de construcción. Consideraremos estos factores más adelante. En este apartado examinamos un tercer factor: su visión sobre las matemáticas como conocimiento disciplinar y como conocimiento escolar. Presentaremos brevemente diversas posiciones a este respecto. Como formadores de futuros profesores de matemáticas, asumiremos una posición que nos servirá de punto de partida para abordar las demás cuestiones que enumeramos en el apartado anterior.

Algunas posiciones con respecto a las matemáticas

No pretendemos hacer una revisión detallada de la historia y la filosofía de las matemáticas. Sin embargo, queremos presentar los aspectos centrales de esta historia para efectos de asumir una posición con respecto a la naturaleza de las matemáticas. Nos basamos en la presentación de Ernest (1991).

La aparición de las paradojas de la aritmética y la teoría de conjuntos al final del siglo 19 produjo la crisis de los fundamentos y motivó el desarrollo el desarrollo de la visión absolutista de las matemáticas. La posición absolutista considera que la verdad matemática es absolutamente cierta y que las matemáticas son un área en la que el conocimiento es objetivo, incuestionable y certero. Considera que el conocimiento matemático está compuesto por verdades absolutas que son el producto de poner en juego unos axiomas lógicos que preservan la verdad a unos axiomas y unas definiciones que se toman como verdaderos. Esta visión absolutista sustenta diferentes escuelas que buscan fundamentar las matemáticas. El logicismo ve las matemáticas como parte de la lógica y supone que todos los conceptos matemáticos se pueden reducir a conceptos lógicos. Pretende mostrar que la certeza del conocimiento matemático se puede reducir a la certeza de la lógica. El formalismo ve las matemáticas como un juego formal (sin significado) que sigue unas reglas. Su propósito es mostrar que es posible traducir las matemáticas a sistemas formales que estos sistemas formales modelan las matemáticas (son completos) y son consistentes. El constructivismo considera que las matemáticas deben crearse sobre métodos constructivos y no acepta las pruebas por contradicción, ni la existencia por necesidad. El constructivismo pretende partir de axiomas intuitivamente evidentes y utilizar métodos de prueba intuitivamente seguros. Los teoremas de incompletitud de Gödel mostraron que no era posible lograr las metas que se habían impuesto las escuelas logicista y formalista. Además, todas las escuelas tienen que partir de supuestos cuya verdad no es posible mostrar. Por lo tanto, no es posible lograr una verdad absoluta en matemáticas. Aparece entonces la visión falibilista de las matemáticas: la verdad matemática es falible y modificable y no puede verse libre de revisión y corrección.

Ernest considera que una reconceptualización de la filosofía de las matemáticas debe preocuparse por asumir una posición con respecto a ellas como parte de la cultura y del conocimiento humano, además de resolver los problemas ontológicos y epistemológicos. Él considera cuatro posturas falibilistas. El empiricismo sugiere que las verdades matemáticas son generalizaciones empíricas. Tanto el origen de los conceptos matemáticos, como la justificación de las verdades matemáticas tienen fundamento empírico. El convencionalismo de Wittgenstein considera las matemáticas como una colección de "juegos de lenguaje". Las nociones de verdad y prueba dependen de que aceptemos las reglas lingüísticas convencionales de esos juegos. Por lo tanto, la verdad matemática depende de reglas lingüísticas del uso de los términos y gramática, junto con las reglas que gobiernan las pruebas. En el cuasi-empiricismo de Lakatos, las matemáticas son hipotético-deductivas. Las teorías formales pueden ser falsificadas por teoremas de la teoría informal. Se propone una heurística de creación del conocimiento con un ciclo de conjetura, prueba, contra-ejemplo y prueba revisada.

Presentamos finalmente la posición del constructivismo social de Ernest. Ésta es la posición que asumimos en este trabajo. De acuerdo con esta posición, las matemáticas son una construcción social. El conocimiento matemático subjetivo del individuo se convierte en conocimiento objetivo a través de su publicación. El proceso de publicación implica una crítica y un escrutinio público, cuya justificación se basa en la lógica del descubrimiento matemático de Lakatos. El conocimiento objetivo se internaliza para formar nuevo conocimiento subjetivo (ver Figura 5). Las experiencias inmediatas del mundo físico

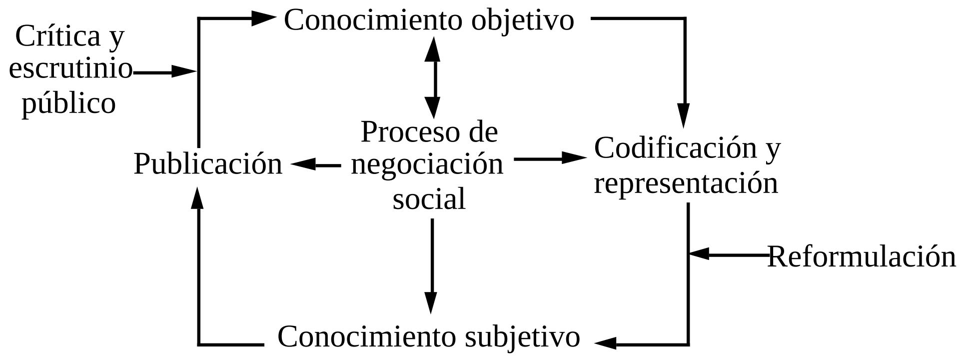

Figura 5. Conocimiento subjetivo y conocimiento objetivo

y social y las teorías previas dan lugar —mediante un proceso de construcción hipotético–deductivo— a las teorías o conjeturas privadas que dan orden al mundo de nuestra experiencia. El conocimiento subjetivo está compuesto por estas teorías privadas que se verifican en los mundos físico y social. El conocimiento objetivo es intersubjetivo y social y se basa en las reglas y convenciones del uso del lenguaje. Por ejemplo, la lógica basa su "razonamiento" en las reglas compartidas del lenguaje. De esta manera, surge la "necesidad" de las matemáticas. Los objetos matemáticos son construcciones sociales o artefactos culturales y existen objetivamente porque son públicos y hay un acuerdo intersubjetivo acerca de su existencia y propiedades.

Para el constructivismo social, las matemáticas (y la ciencia) son construcciones sociales que tienen el propósito de explicar la experiencia humana en el contexto físico y social. Los objetos matemáticos son construcciones sociales que existen objetivamente y la necesidad de los conceptos y las proposiciones matemáticas surge de y se basa en convenciones socialmente aceptadas de prácticas lingüísticas. Por lo tanto, el conocimiento matemático es producto de la actividad de una comunidad que se rige por unas normas y que aborda y resuelve problemas con unos propósitos (la explicación de la experiencia).

Tomaremos esta posición acerca de las matemáticas como nuestro punto de partida para las reflexiones que siguen a continuación. En particular, buscaremos establecer una relación entre esta visión del conocimiento matemático disciplinar y el conocimiento matemático escolar. También, buscaremos relacionar esta posición con una visión de la manera como los escolares construyen su conocimiento matemático.

Conocimiento matemático escolar

En este apartado presentamos nuestra visión de las matemáticas escolares. Para ello, establecemos una relación entre el conocimiento matemático escolar y nuestra visión (de constructivismo social) del conocimiento matemático disciplinar. Vemos las matemáticas escolares como una construcción social y vemos el aula de matemáticas como el espacio en el que una comunidad de práctica (de aprendices y profesores) construyen conjuntamente un conocimiento matemático (escolar). La construcción de este conocimiento matemático escolar está condicionado por unas normas que regulan el discurso en el aula. Mientras que para el conocimiento matemático disciplinar, las normas que regulan el discurso matemático buscan justificar la necesidad de este conocimiento, para el conocimiento matemático escolar, estas normas buscan promover y establecer un conocimiento significativo y útil para los escolares. El discurso matemático del aula se refiere a unos objetos matemáticos y a sus propiedades y relaciones través de una variedad de significados que pretenden presentar diferentes perspectivas complementarias de esos objetos, propiedades y relaciones. El proceso de construcción del conocimiento matemático escolar progresa cuando los escolares participan apropiadamente en el discurso compartiendo y utilizando socialmente estos múltiples significados.

Por lo tanto, el propósito del discurso en el aula no es exclusivamente el de justificar la validez y necesidad del conocimiento matemático escolar de manera formal, deductiva, simbólica y rutinaria. Por el contrario, el propósito de este discurso debe ser el de presentar y compartir socialmente unas normas que ponen en juego una multiplicidad de significados, de tal forma que los escolares tengan una variedad de alternativas para participar en este discurso. Tanto profesores, como autores de libros de texto y diseñadores del currículo, deben identificar esta multiplicidad de significados y diseñar los espacios en los que los escolares participen progresivamente en un discurso y en una comunidad de práctica que se rige por esos significados. Uno de los propósitos de este artículo es proponer unos procedimientos y unas herramientas conceptuales y metodológicas para establecer esta multiplicidad de significados del conocimiento matemático escolar y para diseñar las actividades de enseñanza y aprendizaje que promuevan la participación de los escolares en el discurso matemático del aula.

En nuestra visión del conocimiento matemático disciplinar, sostuvimos que las matemáticas tienen como propósito explicar la experiencia humana en el contexto físico y social. En nuestra visión del conocimiento matemático escolar, resaltamos también esta relación entre matemáticas y experiencia. Esta relación se encuentra en la base de uno de los significados que se deben construir dentro del discurso del aula. Recalcamos, por lo tanto, la relación entre las estructuras matemáticas y los fenómenos de donde ellas surgen y que son modelizados por ellas.

En resumen, partiendo de la visión de constructivismo social del conocimiento matemático disciplinar, vemos el conocimiento matemático escolar como una construcción social dentro de un comunidad de práctica en la que los escolares participan progresivamente en un discurso que se rige por unas normas que regulan una multiplicidad de significados. Como veremos a continuación, esta visión de las matemáticas escolares da lugar a una visión de la manera como los escolares construyen su conocimiento matemático. Éste es el tema del siguiente apartado.

APRENDIZAJE DE LOS ESCOLARES

Nuestra posición sobre la manera como los escolares construyen su conocimiento matemático en el aula pretende ser coherente con la posición que acabamos de presentar sobre las matemáticas escolares. De hecho, la identificaremos con el mismo término: constructivismo social. Para describirla, tenemos primero que hacer una reflexión sobre el constructivismo desde su perspectiva cognitiva y contrastarla con una visión sociocultural del aprendizaje de las matemáticas.

Aprendizaje (constructivismo, perspectiva cognitiva)

En esta sección describimos brevemente la perspectiva cognitiva del constructivismo como postura sobre el aprendizaje de las matemáticas en la escuela. Consideramos el aprendizaje como el proceso en virtud del cual los individuos nos adaptamos a la experiencia de los mundos físico y social. La posición cognitiva del constructivismo postula la existencia de unas estructuras cognitivas (EC en la Figura 6) que son el producto de este proceso de adaptación del sujeto al medio con el que interactua. Cuando el resultado de la interacción entre el sujeto y el medio es diferente de lo que el sujeto esperaba con base en sus estructuras cognitivas, se da un desequilibrio (conflicto cognitivo). El sujeto busca restablecer el equilibrio y, para ello, se ve obligado a cambiar sus estructuras cognitivas, ya sea agregando nueva información (asimilación) o cambiando la distribución y orden de estas estructuras (acomodación). El resultado de la resolución del desequilibrio son unas nuevas estructuras cognitivas que, en principio, se adaptan a la experiencia que dio lugar al desequilibrio.

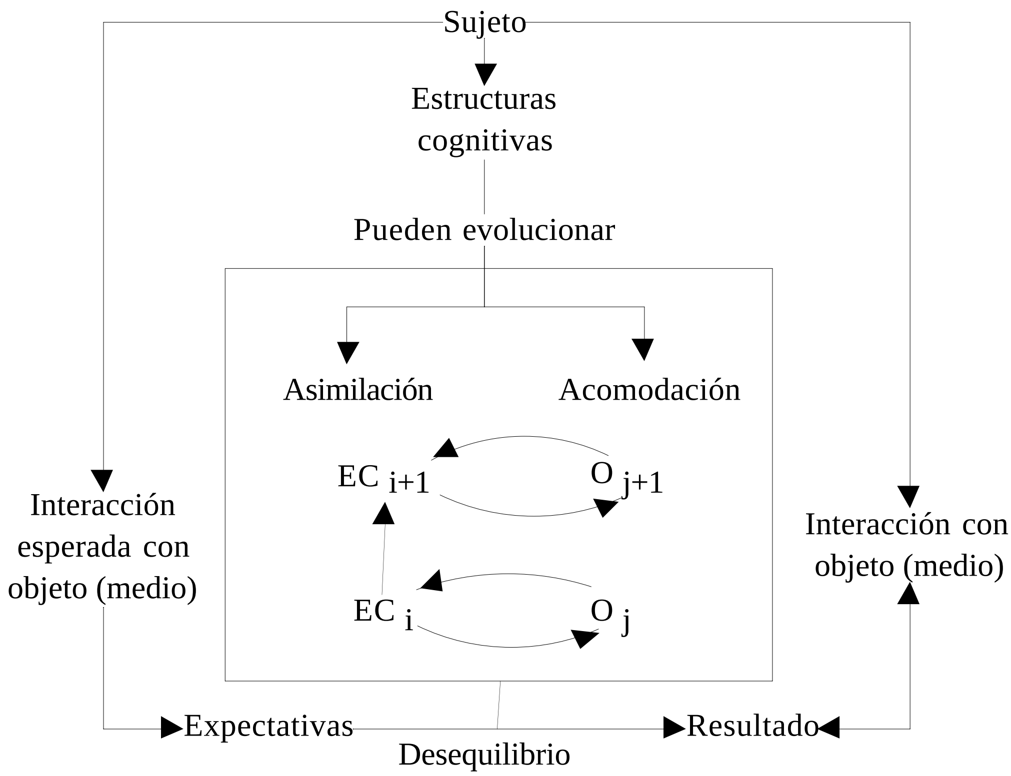

Figura 6. Aprendizaje (perspectiva cognitiva)

La anterior es una descripción simplificada de una postura mucho más compleja. Pretendemos resaltar sus características principales. La aproximación supone y requiere de unos entes mentales (las estructuras cognitivas) que son estables y que permiten explicar e interpretar las actuaciones del sujeto. El sujeto adquiere (o construye) estas entidades privadas y el profesor está allí para transmitir o guiar ese proceso de adquisición. Desde la perspectiva de la investigación, Sfard (1997) denomina a esta aproximación el esquema adquisicionista. Como alternativa, ella sugiere el esquema participacionista en el que el discurso es el centro de atención, las actuaciones dependen del contexto y no hay necesidad de hacer referencia a entidades mentales porque no se supone ninguna estabilidad en ellas. Este esquema pertenece a una visión sociocultural del aprendizaje que describimos a continuación.

Aprendizaje (perspectiva sociocultural)

Desde la perspectiva sociocultural, "el aprendizaje de un tema se concibe como un proceso de convertirse en miembro de una cierta comunidad. Esto implica la habilidad para comunicarse en el lenguaje de esa comunidad y actuar de acuerdo con sus normas particulares. Las normas mismas se negocian en el proceso de consolidar la comunidad. Mientras que los aprendices son los recién llegados y los reformadores potenciales de la práctica, los profesores son los preservadores de su continuidad" (Sfard, 1998, p. **). Esta aproximación sociocultural se focaliza más en los grupos o comunidades que en los individuos; ve el aprendizaje como algo que sucede entre personas cuando se involucran en actividades comunes; considera que los individuos construyen socialmente nuevas formas de significados y comprensión en un proceso de aprendizaje que surge de y crea prácticas situadas (o contextos) a las que ellos traen diversas perspectivas y niveles de habilidad; y centra la atención en las interacciones colaborativas que ocurren cuando los individuos intentan desarrollar y mejorar su práctica (Stein y Brown, 1997, p. 159).

Constatamos una relación entre esta visión sociocultural del aprendizaje y la visión de constructivismo social de las matemáticas como disciplina. Ambas posiciones centran su atención en el discurso matemático y en la manera como matemáticos, en un contexto, y escolares y profesores, en otro, colaboran en la resolución de problemas comunes, negociando las normas que regulan el discurso y progresando en su capacidad de participar en él. En el caso de las matemáticas escolares, profesores y escolares buscan construir socialmente la multiplicidad de significados que le dan sentido a las estructuras matemáticas objeto del discurso.

Aprendizaje (nuestra posición)

Consideramos que las aproximaciones cognitiva y sociocultural son complementarias. Resaltamos la importancia del discurso en un proceso de aprendizaje en el que los significados individuales están en el origen de la construcción de los significados sociales que, a su vez, condicionan la construcción de los significados individuales. La construcción de los significados (individuales y sociales) surge de los desequilibrios que individuos y grupos perciben cuando comparan el resultado de su experiencia con sus expectativas. El proceso de progresar en su participación dentro de una comunidad de práctica hace parte de esa experiencia que grupos e individuos viven cuando negocian las normas del discurso matemático del aula.

El constructivismo, en cualquiera de sus vertientes, es una postura con respecto a la manera como se supone que los escolares construyen su conocimiento matemático. De esta postura no se deduce ninguna propuesta sobre cómo debe ser la instrucción (Simon, 1995). En todo caso, sí se puede pensar que existen modelos de enseñanza que son coherentes con una posición constructivista del aprendizaje (Steffe y & D'Ambrosio, 1995; Simon, 1995b). En el apartado que sigue presentaremos un modelo que pretende ser coherente con la posición que hemos asumido aquí.

ANÁLISIS DIDÁCTICO: UN PROCEDIMIENTO PARA ORGANIZAR LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

La tercera cuestión sobre la que se deben fundamentar los planes de formación inicial de profesores de matemáticas es la descripción de la manera como el profesor debe contribuir a la construcción del conocimiento matemático de los escolares. Para ello, describiremos un procedimiento, que denominamos análisis didáctico, que representa nuestra visión ideal de cómo el profesor debería diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje si parte de una visión del aprendizaje de sus estudiantes basada en el constructivismo social. En otras palabras, pretendemos presentar un modelo de enseñanza que sea coherente con las posiciones que hemos asumido en los apartados anteriores con respecto a las matemáticas escolares y al aprendizaje de las matemáticas en la escuela.

El apartado comienza ubicando el análisis didáctico en un nivel local del currículo y estableciendo su relación con los otros niveles del currículo y con las creencias y metas del profesor. A continuación, se identifica la información necesaria para iniciar el ciclo. Esta información determina las condiciones en las que el profesor realiza la siguiente fase del procedimiento, compuesta por los análisis de contenido, cognitivo y de instrucción. Estos análisis se presentan en detalle, incluyendo la descripción de cada una de las herramientas conceptuales y metodológicas en las que se basan. La fase de diseño y selección de tareas se presenta enseguida, junto con una reflexión sobre la puesta en práctica de las actividades, el discurso en el aula y la gestión de clase. Finalmente, describimos el análisis de actuación como la última fase de un ciclo en la que se produce la información que dará lugar al inicio del siguiente ciclo.

Planificación global y planificación local

El análisis didáctico se ubica en un nivel local del currículo. Nuestra preocupación se centra en el procedimiento en virtud del cual el profesor planifica, lleva a la práctica y evalua una unidad didáctica, una hora de clase o una porción de una clase. Entendemos por unidad didáctica "una unidad de programación y actuación docente constituida por un conjunto de actividades que se desarrollan en un tiempo determinado para la consecución de unos objetivos específicos" (Segovia y Rico, 2001, p. 87). Por lo tanto, el contenido matemático que es objeto de la instrucción es una estructura matemática específica o uno o más aspectos de una estructura matemática. El periodo de tiempo en el que tiene lugar la instrucción es limitado. Como veremos más adelante, la especificidad del contenido permite profundizar en sus múltiples significados. Esta visión local de la enseñanza es similar a la adoptada por Simon (1995), quien también se centra en las actividades que conciernen un periodo limitado de tiempo y un contenido matemático específico, y constituye una reflexión curricular diferente de aquella que corresponde la planificación global para los profesores.

Rico (1997a) y Segovia y Rico (2001) han puesto de manifiesto las dificultades de la noción de currículo al nivel de planificación global para los profesores. En este nivel, el profesor debe identificar unos objetivos, unos contenidos, una metodología y un esquema de evaluación con el que se pretende describir el currículo como plan de formación para una asignatura o para una porción amplia de una asignatura. Nosotros pretendemos diferenciar entre, por un lado, los problemas de diseño curricular global (para una asignatura completa en la escuela, por ejemplo) y, por el otro, los problemas de diseño curricular local (para una unidad didáctica o una hora de clase sobre una estructura matemática específica o uno o más aspectos de ella). Si consideramos únicamente los problemas de diseño curricular global (con el esquema de objetivos, contenidos, metodología y evaluación), entonces los profesores tienden a ver la planificación como la secuenciación de contenidos matemáticos y a considerar la enseñanza como el "cubrimiento" de estos contenidos. Al no considerar las problemáticas conceptuales, cognitivas y de instrucción de las estructuras matemáticas específicas, el profesor tiene que describir los objetivos, la metodología y la evaluación en términos generales. Por lo tanto, lo que diferencia a las diferentes parcelas del diseño curricular son los contenidos. Cuando consideramos a nivel local los problemas de diseño curricular y nos concentramos en una estructura matemática específica, es posible ampliar esta visión de la planificación y de la enseñanza y abrir un nuevo espacio de trabajo. Veremos que, de esta manera, es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significados del conocimiento matemático escolar, como lo sugiere nuestra posición sobre las matemáticas escolares y su aprendizaje.

Una búsqueda en Internet con el término "análisis didáctico" produce, a comienzos de 2002, más de 500 resultados. Este término se ha convertido en una expresión genérica utilizada en muchos campos con diferentes significados. Por ejemplo, Freud (1981) lo utilizó cuando se refirió a la formación de psicoanalistas. En la didáctica de la matemática varios autores utilizan el término (i.e., Puig, 1997 y González, 1998). Puig (1997) lo define de la siguiente manera: "el análisis didáctico de las matemáticas, esto es, el análisis de los contenidos de las matemáticas que se realiza al servicio de la organización de su enseñanza en los sistemas educativos" (p. 61). Nosotros utilizaremos el término para designar un procedimiento que se encuentra en el centro del modelo de enseñanza que queremos describir en este apartado. En lo que sigue buscaremos concretar el significado de este término. Primero debemos considerar algunas cuestiones previas.

Creencias, metas y contexto

El análisis didáctico es la descripción de la manera *ideal* como nosotros concebimos que el profesor debería planificar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje que contribuyan a la construcción del conocimiento matemático de los escolares. Sin embargo, hay factores que pueden influir en las decisiones y actuaciones del profesor y que pueden llevarlo a actuar de maneras diferentes a las que sugiere el análisis didáctico. Las metas y las creencias del profesor, por un lado, y los contextos institucional, educativo y social, por el otro, condicionan la manera como él puede realizar su práctica docente. En este apartado hacemos algunas consideraciones sobre el papel del contexto y de las metas y las creencias del profesor en sus decisiones y actuaciones. Más adelante exploramos en detalle la relación entre el conocimiento del profesor y su práctica docente.

Schoenfeld (2000), en su propuesta para construir un modelo del profesor de matemáticas, describe de la siguiente manera la relación entre las creencias, las metas y el conocimiento del profesor y su práctica docente: "Postulamos que las creencias, las metas y el conocimiento del profesor, ya sea que se mantengan conscientemente o no, son factores claves en el proceso de toma de decisiones del profesor y que ese proceso de toma de decisiones toma en cuenta esos factores…El modelo de un profesor particular contendrá representaciones de metas, creencias y conocimiento atribuidos a ese profesor y un mecanismo de toma de decisiones que sugiere cómo, en unas circunstancias dadas, esas metas, creencias y conocimiento configuran la decisión del profesor con respecto a qué hacer 'después'" (pp. 248-249). Las metas es lo que uno quiere lograr. Las metas pueden ser globales con respecto a los estudiantes en periodos largos de tiempo, para las lecciones, para partes particulares de la lección y locales a una interacción particular. Pueden estar orientadas epistemológicamente (con respecto al contenido) o socialmente. Pueden estar predeterminadas o pueden ser emergentes. Usualmente hay varias metas operativas en un momento dado (p. 250). "Las creencias del profesor … configuran lo que el profesor ve como creíble, posible o deseable. Por lo tanto, las creencias configuran la selección de metas y planes de acción" (p. 253).

Se han realizado una gran variedad de estudios sobre el papel de las creencias en la actuación del profesor (Thompson, 1992). No obstante, no se puede afirmar que esta relación sea evidente (Lerman, 2001). En todo caso, "como sucede en las demás áreas, las creencias configuran la percepción que el individuo tiene de su experiencia. Ellas configuran las metas que el profesor se impone para la interacción en el aula, las opciones que el profesor cree que están disponibles para lograr esas metas, y la manera en que estos recursos (en este caso, diferentes tipos de enseñanza y de contenido matemático, rutinas de clase, etc.) se pueden emplear" (Schoenfeld, 2000, p. 248). La línea divisoria entre creencias y conocimiento no es evidente. En este documento vamos a considerar como creencias las visiones que el profesor tenga de las matemáticas como disciplina, de las matemáticas escolares, de su enseñanza y de su aprendizaje. Como veremos más adelante, el profesor puede y debe tener un conocimiento sobre las diferentes posturas que es posible asumir en estos temas. Sin embargo, él asume una postura con respecto a cada uno de ellos. El primero hace parte de su conocimiento, mientras que la segunda hace parte de sus creencias.

El contexto social, educativo e institucional condiciona la instrucción. Este contexto determina las normas y valores que rigen social e institucionalmente y determina aquello que se valora como deseable en el proceso educativo. De esta manera, el contexto restringe las opciones de las que el profesor puede escoger para realizar su práctica docente. Por ejemplo, las normas legales pueden determinar unas finalidades de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, mientras que el proyecto educativo del centro puede promover modelos de evaluación particulares. Por otro lado, el profesor debe tener en cuenta los intereses, conocimientos y capacidades de sus estudiantes y reconocer las diferencias entre ellos. Estos y otros factores hacen parte del contexto social, educativo e institucional que conforman el marco en el que el profesor realiza su trabajo. El contexto del aula es el entorno estructurado dentro del cual tiene lugar la construcción del conocimiento matemático por parte de los escolares. Vemos este contexto como el espacio en el que se constituye y se desarrolla una comunidad de práctica de las matemáticas escolares. Este contexto se negocia y conforma conjuntamente entre profesor y estudiantes y, por consiguiente, no condiciona la instrucción.

Las creencias, las metas y el contexto condicionan la actividad del profesor. Estas condiciones se expresan, entre otros, en el diseño curricular global de la asignatura. El diseño curricular global y lo que haya sucedido en las sesiones anteriores, determinan unos objetivos que se deben lograr, un contenido que se debe tratar y unos esquemas generales para la gestión de la clase y la evaluación de los estudiantes. En la mayoría de las ocasiones, las indicaciones que provienen del diseño curricular global son de carácter general y no tienen en cuenta la especificidad de la estructura matemática que se desea tratar, ni las condiciones cognitivas e instruccionales de la hora de clase que se quiere planificar. El profesor tiene que realizar un proceso de planificación local (el análisis didáctico) que tenga en cuenta estas especificidades conceptuales, cognitivas e instruccionales. Iniciamos a continuación la descripción de este procedimiento.

Inicio del ciclo

En la Figura 7 presentamos un esquema general de un ciclo del análisis didáctico. Haremos múltiples referencias a este esquema en lo que sigue. En la gráfica hemos identificado con números las diferentes fases del ciclo y con letras las relaciones que identifican las condiciones iniciales que hemos descrito en el apartado anterior. La relación (a) expresa la manera como los diferentes contextos condicionan la instrucción. La relación (b) expresa el hecho de que la planificación local tiene lugar dentro del entorno de una planificación global. Esta planificación global debe tener en cuenta las condiciones impuestas por los contextos social, educativo e institucional. Las relaciones (c) y (d) muestran (en uno de los sentidos) la manera como las metas y las creencias del profesor influyen en sus decisiones en el proceso de planificación. Incluimos también aquí la manera como el proceso de planificación, puesta en práctica y evaluación de las actividades de enseñanza y aprendizaje puede influir en las metas y creencias del profesor (el otro sentido de las flechas). En este apartado describimos el inicio de un ciclo a partir de estas condiciones iniciales. Nos referimos al cuadro identificado con el número 1. En los apartados subsiguientes examinaremos secuencialmente cada uno de los cuadros en el orden en el que aparecen en el esquema.

El ciclo se inicia con la determinación, por parte del profesor, de la comprensión que los estudiantes tienen en ese momento de los contenidos que se pretenden tratar y de los objetivos que se quieren lograr. El diseño curricular global delimita inicialmente esos objetivos y contenidos. Pero la determinación

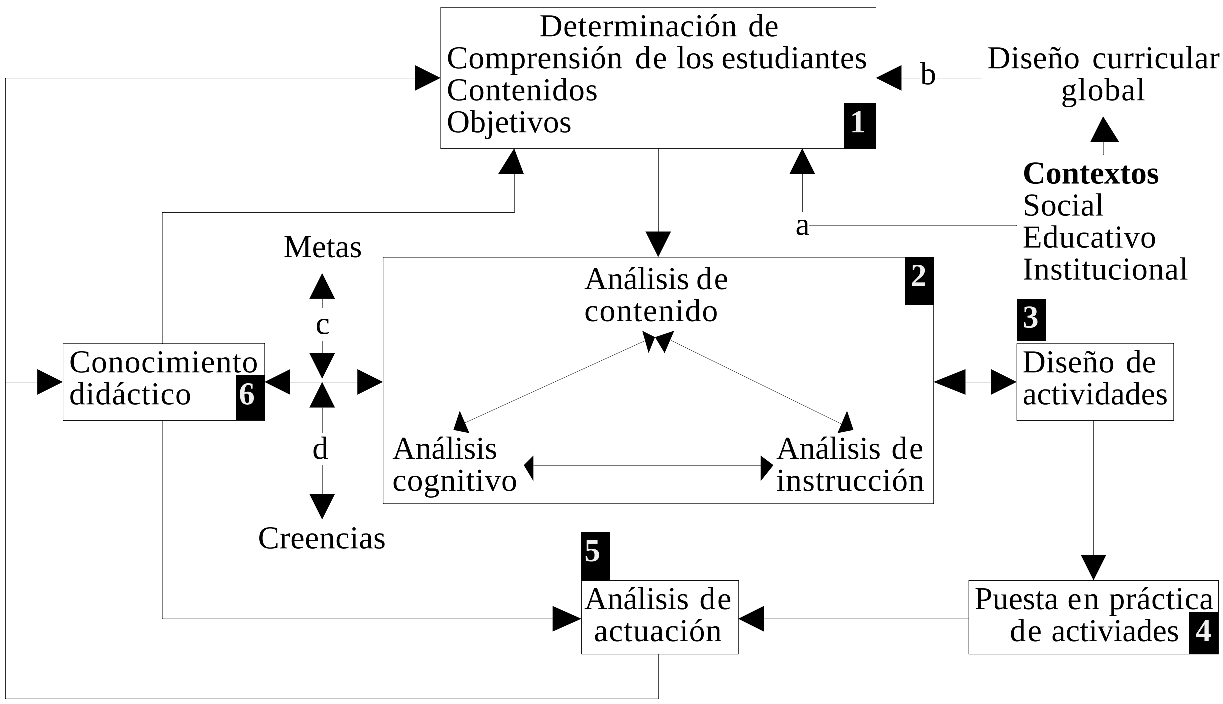

Figura 7. Ciclo de análisis didáctico

de los objetivos específicos que se deben buscar y de los contenidos matemáticos particulares que se deben tratar también depende del resultado del ciclo anterior del análisis didáctico. El análisis de actuación (cuadro 5 del esquema) provee al profesor con información sobre las actuaciones y producciones de los escolares al final del ciclo anterior. Con esta información, el profesor debe hacer una descripción de la comprensión de sus estudiantes sobre la estructura matemática en cuestión. Esta descripción deberá identificar:

- las tareas que sus estudiantes pueden resolver,
- las tareas que no pueden resolver,
- los errores en los que los estudiantes han incurrido al abordar las tareas,
- las dificultades que subyacen a esos errores, y
- los obstáculos que es necesario superar para resolver esas dificultades.

Describiremos con mayor detalle este procedimiento cuando consideremos, más adelante, el análisis cognitivo. Esta información cognitiva es central para determinar con suficiente especificidad los objetivos y los contenidos de la unidad didáctica o la hora de clase que se pretende planificar. La manera como el profesor recoja, analice e interprete esta información dependerá de sus conocimientos y sus creencias. El resultado de esta etapa inicial del análisis didáctico debe ser la identificación de una estructura matemática específica y la delimitación de los objetivos que se quieren lograr con respecto a esa estructura matemática. La siguiente etapa del análisis didáctico es el análisis de contenido que describimos a continuación (cuadro 2 del esquema).

Análisis de contenido

El contenido matemático es el eje central del análisis didáctico. El proceso de planificación, puesta en práctica y evaluación de las actividades de enseñanza y aprendizaje se refiere a una estructura matemática específica. Las herramientas conceptuales y metodológicas en las que se basa el análisis didáctico, y que describiremos a continuación, adquieren sentido cuando se utilizan para analizar los diferentes significados de esa estructura matemática. Por lo tanto, el análisis de contenido, siendo el análisis *matemático* de esa estructura matemática, debe ser el punto de inicio y de referencia en el proceso cíclico del análisis didáctico. El análisis de contenido es un análisis de las matemáticas escolares. Su propósito es la descripción de la estructura matemática desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje en el aula.

Rico (1997a, p. 31) describe el conocimiento conceptual de la siguiente manera.

> *Los conceptos son aquello con lo que pensamos y, según su mayor o menor concreción, podemos distinguir tres niveles de conocimientos en el campo conceptual:*
> *i) los* <u>*hechos*</u>*, que son unidades de información y sirven como registros de acontecimientos;*
> *ii) los* <u>*conceptos*</u> *propiamente tales, que describen una regularidad o relación de un grupo de hechos, suelen admitir un modelo o representación y se designan con signos o símbolos;*
> *iii) las* <u>*estructuras conceptuales*</u>*, que sirven para unir conceptos o para sugerir formas de relación entre conceptos constituyendo, a veces, conceptos de orden superior, ya que pueden establecer algún orden o relación entre conceptos no inclusivos.*

La anterior es una descripción cognitiva de la noción de concepto en sus distintos niveles de concreción. Al interpretarla desde la perspectiva de las matemáticas escolares, podemos afirmar que, en la dimensión conceptual, el conocimiento matemático se puede organizar en hechos, conceptos y estructuras conceptuales. Nosotros restringimos el análisis de contenido a los conceptos y las estructuras conceptuales. Los hechos pueden ser utilizados como ejemplos o casos particulares de los conceptos, pero no los incluiremos formalmente en el análisis.

En el análisis de contenido se busca identificar y describir estructuradamente los diversos significados *matemáticos* de la estructura matemática. Este análisis se hace desde la perspectiva de las matemáticas escolares y tiene en cuenta tres tipos de significados: la estructura conceptual, los sistemas de representación y los modelos (análisis fenomenológico). A continuación consideramos cada uno de estos significados.

Estructura conceptual

La estructura conceptual, como herramienta para el análisis de las matemáticas escolares, es la descripción, a nivel de conceptos y relaciones entre ellos, de la estructura matemática en cuestión. Por lo tanto, la estructura conceptual no es solamente la enumeración de los conceptos que se encuentran involucrados en la estructura matemática. La construcción de la estructura conceptual es un proceso que se inicia con la identificación de los conceptos y algunas de sus relaciones pero que se desarrolla en la medida en que se tienen en cuenta los sistemas de representación, los modelos y los fenómenos asociados. La Figura 8 muestra una versión inicial de la estructura conceptual para la función de segundo grado (Gómez y Carulla, 2001).

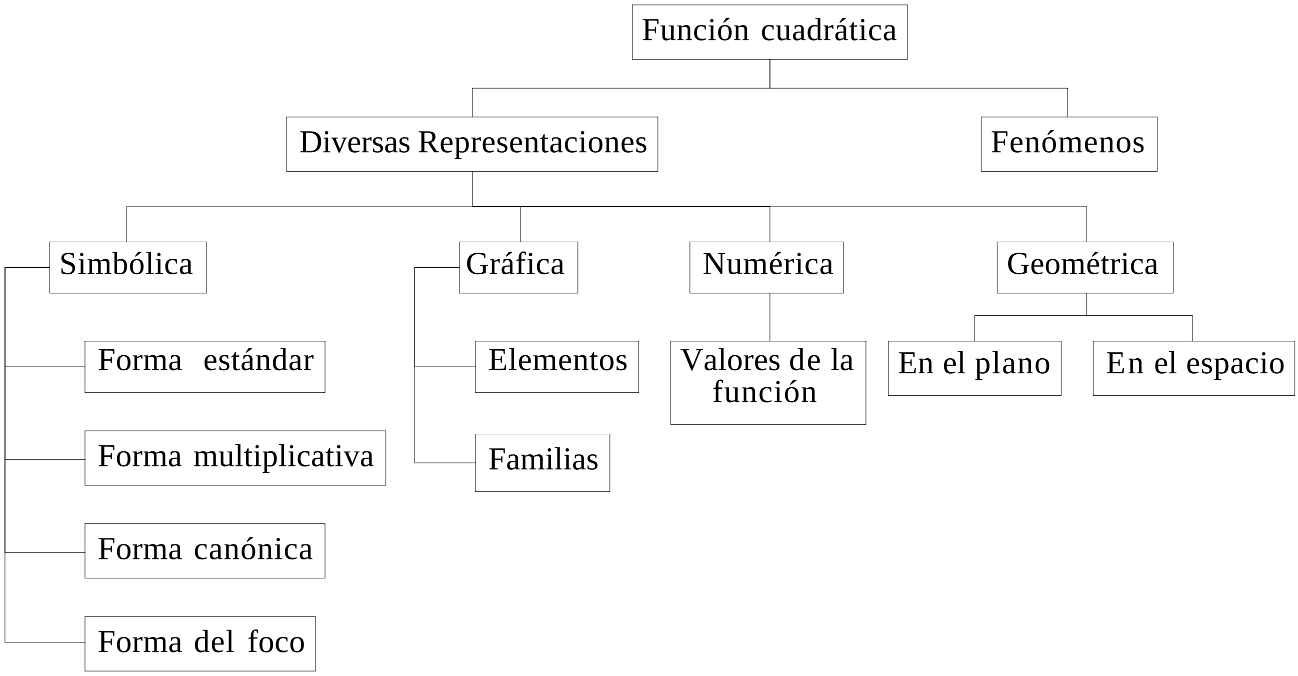

Figura 8. Estructura conceptual de la función de segundo grado

Resaltamos dos aspectos de esta estructura conceptual: su representación en forma de mapa conceptual y su organización con base en los sistemas de representación. Los mapas conceptuales son una técnica para representar visualmente la estructura de la información que se rige por normas relativamente sencillas: “los conceptos se representan por nodos a los que se les da una etiqueta por medio de una palabra o una frase corta que indica el concepto. Las relaciones se representan por líneas (enlaces) que conectan los nodos” (Lanzing, 1998, p. 2).

Como esquema de presentación, los mapas conceptuales tienen dos ventajas:

- permiten descripciones no lineales de la estructura matemática y,
- al tener un carácter gráfico, resaltan la estructura de la información.

Al nivel de detalle en el que se presenta la estructura matemática en la estructura conceptual de la Figura 8 no es posible identificar los conceptos involucrados. Para ello, tenemos que entrar en mayor detalle. La Figura 9 muestra algunos aspectos de la representación simbólica de la función cuadrática. Apreciamos que, a este otro nivel detalle, es posible identificar algunos conceptos. En este caso, aparecen los parámetros de las diversas formas simbólicas. Cuando podemos identificar conceptos dentro de la estructura conceptual, vemos la necesidad de establecer relaciones. En la figura se insinúan relaciones entre los parámetros de las formas simbólicas cuya descripción requiere de otros submapas. Por otro lado, cuando representamos los conceptos en la estructura conceptual, aparece la necesidad de representar las diferentes maneras en las que estos conceptos y sus representaciones se relacionan entre sí. La

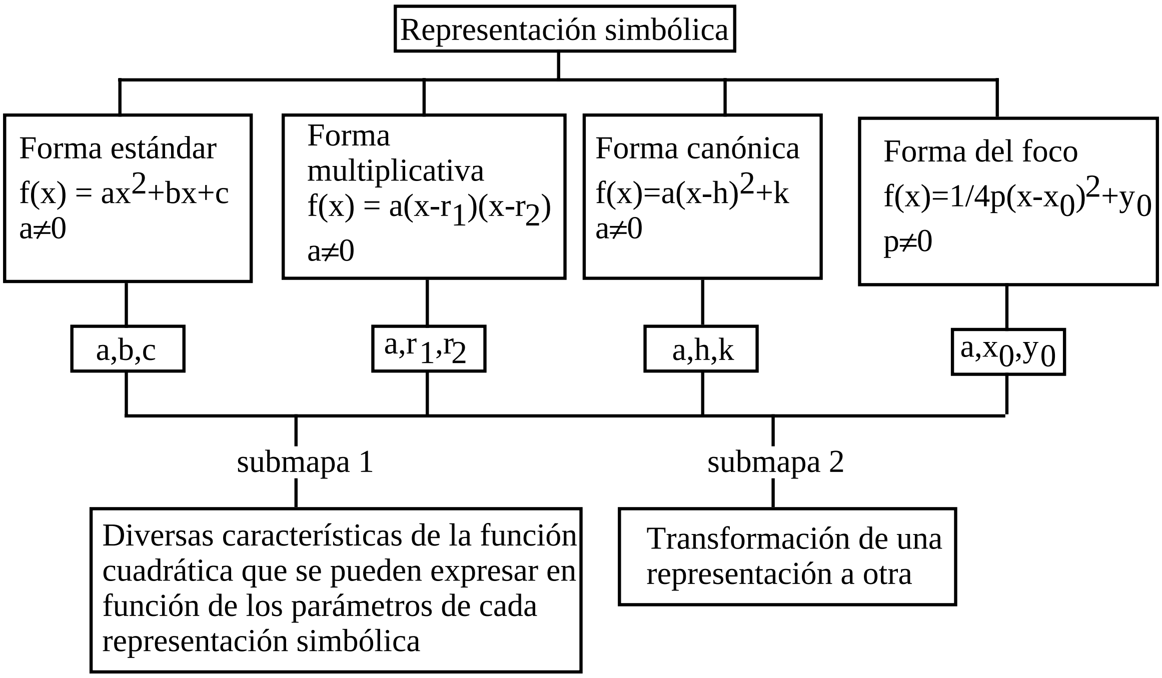

Figura 9. Representación simbólica de la función cuadrática

Figura 10 muestra un ejemplo de las diferentes relaciones o conexiones que es posible establecer en una parte de la estructura conceptual de la función cuadrática. Se pueden identificar diferentes tipos de conexiones:

- aquellas que establecen relaciones entre diferentes conceptos de la estructura matemática (por ejemplo, entre las diferentes formas simbólicas y sus parámetros),
- aquellas que identifican las diferentes representaciones de un mismo elemento (por ejemplo, los parámetros de la forma multiplicativa y las raíces de la parábola),
- aquellas que muestran transformaciones de un elemento en otro dentro de un sistema de representación (por ejemplo, el procedimiento de factorización para pasar de la forma simbólica estándar a la forma simbólica multiplicativa), y
- aquellas que muestran la relación entre categorías de fenómenos y las subestructuras que los modelizan (por ejemplo, la relación entre las propiedades del foco de la parábola y los fenómenos de óptica que utilizan estas propiedades —que no se muestra en la figura).

La construcción de la estructura conceptual se basa en los sistemas de representación. A continuación describimos algunas de las características de los sistemas de representación y estudiamos su papel en el análisis de contenido.

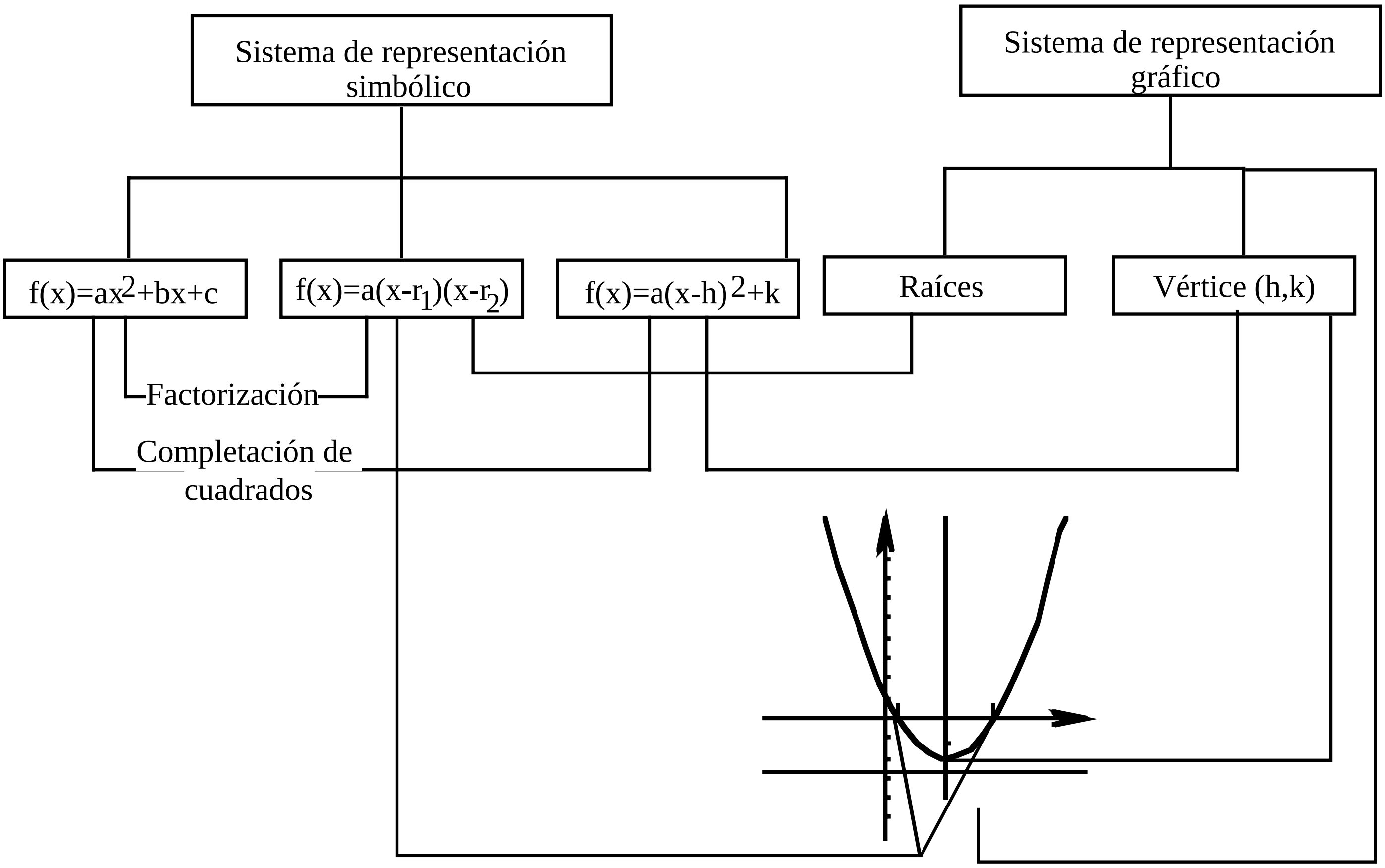

Figura 10. Conexiones en una estructura conceptual

Sistemas de representación

El análisis de contenido se centra en la noción de sistema de representación. La estructura conceptual deberá representar la estructura matemática en todos sus posibles sistemas de representación. Cada uno de estos sistemas de representación aporta un significado de la estructura matemática desde la perspectiva de las matemáticas escolares. El término "sistema de representación" tiene diferentes significados en la didáctica de la matemática (Goldin y Janvier, 1998, p. 1-2) y nosotros hemos hecho una selección que describimos a continuación.

Utilizamos los sistemas de representación para representar diferentes facetas de un concepto o estructura matemática y trabajamos con los sistemas de representación bajo el supuesto de que se ciñen a un conjunto de reglas que se encuentran condicionadas por las matemáticas, en general, y por el concepto matemático específico, en particular. Por estas razones, consideramos que la definición de Kaput (1992) sobre sistema de notación se adapta a nuestras necesidades. De acuerdo con esta definición, un sistema de representación es "un sistema de reglas para (i) identificar o crear caracteres, (ii) operar en ellos y (iii) determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia)" (p. 523). Complementamos esta definición de Kaput con la primera de las definiciones de Goldin y Janvier (1998), en la que un sistema de representación puede ser también "una situación física externa estructurada, o un conjunto de situaciones estructuradas en un ambiente físico que pueden ser descritas matemáticamente o pueden interpretarse en el sentido de involucrar ideas matemáticas” (p. 1). Esta definición complementaria permite considerar, como parte de las características de un concepto o estructura matemática, al conjunto de fenómenos sociales, naturales y matemáticos que pueden ser organizados por subestructuras de dicha estructura.

La noción de sistema de representación permite describir las actividades matemáticas que tienen lugar en el discurso matemático del aula. Esta descripción se basa en cuatro operaciones que se pueden realizar con respecto a los sistemas de representación y que es posible representar en la estructura conceptual (ver figuras 8, 9 y 10).

La primera operación es la *creación de signos o expresiones*. Esta operación está regida por las normas que regulan el sistema de representación y es importante en las matemáticas escolares porque es la que produce expresiones válidas e inválidas ($(x)f = 2x^2 + 1$ es un ejemplo de una expresión inválida).

Las segunda y tercera operaciones son las *transformaciones sintácticas variantes e invariantes*. Estas son transformaciones de una expresión en otra dentro de un mismo sistema de representación. Por ejemplo, en $f(x) = (x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$ tienen lugar dos transformaciones sintácticas invariantes (el objeto matemático no cambia), mientras que la traslación vertical de la parábola A a la parábola B en la Figura 11 es una transformación sintáctica variante (el objeto matemático cambia).

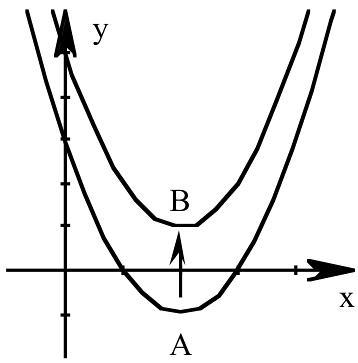

Figura 11. Transformación sintáctica variante

La cuarta operación es la *traducción entre sistemas de representación*. Se refiere al paso de un sistema de representación a otro. Es el caso de identificar la parábola A de la figura 11 con su representación simbólica $f(x) = (x-2)^2 - 1$.

Es posible imaginar los sistemas de representación como planos paralelos conectados. En un plano dado, uno puede crear signos o expresiones (primera operación) o transformar sintácticamente expresiones (segunda y tercera operaciones). Y uno puede pasar de un plano a otro por medio de traducciones entre sistemas de representación (cuarta operación). Detrás de estas operaciones hay dos elementos que las regulan: los conceptos matemáticos representados y las normas de los sistemas de representación.

Para construir la estructura conceptual de un tópico, el profesor debe atender a tres dimensiones que se complementan y se desarrollan paralelamente: los conceptos, los sistemas de representación y las conexiones. En la medida en que el profesor identifica conceptos que conforman la estructura matemática, él debe determinar las diversas representaciones de esos conceptos. Y, al distinguir estas representaciones, él tendrá que establecer las relaciones entre ellas. Algunas de estas relaciones serán de pertenencia. Por ejemplo, al afirmar que el foco es un elemento de la representación gráfica de la función cuadrática o que la dilatación (parámetro a) es un elemento de todas sus representaciones simbólicas. El profesor tendrá que identificar y explicitar en la estructura conceptual las diversas representaciones de un mismo concepto y las relaciones entre ellas. Estas relaciones determinan las traducciones entre sistemas de representación. También tendrá que exponer la manera como dos o más conceptos se relacionan dentro de un mismo sistema de representación, relaciones que describen las transformaciones sintácticas. La construcción de la estructura conceptual con base en los sistemas de representación es un proceso cíclico en el que, en la medida en la que se avanza, se descubren nuevos aspectos que se deben considerar. Al realizar este proceso, el profesor debe poner en juego su conocimiento matemático. Sin embargo, no bastará con movilizar el conocimiento simbólico formal que tradicionalmente se utiliza en las matemáticas disciplinares. El profesor tiene que abordar el análisis de la estructura matemática desde la perspectiva de los significados estructurales y representacionales expuestos hasta ahora y profundizar en la manera como esos significados se expresan en la estructura matemática en la que trabaja. La descripción detallada de la estructura conceptual con base en los sistemas de representación permite identificar y delimitar las subestructuras matemáticas que conforman la estructura matemática representada. Algunas de esas subestructuras pueden modelizar fenómenos sociales, naturales y matemáticos. Consideramos a continuación esa posibilidad.

Análisis fenomenológico y modelos

Nuestra postura con respecto a las matemáticas escolares resalta la relación entre las matemáticas y la experiencia. El profesor debe analizar esta relación para identificar, describir, caracterizar y clasificar los fenómenos naturales, sociales y matemáticos que pueden ser organizados (modelizados) por subestructuras contenidas en la estructura en cuestión. El profesor debe incluir este análisis dentro de la estructura conceptual que resulta del análisis de contenido. Denominamos a esta procedimiento análisis fenomenológico. Para describirlo, comenzamos con algunos ejemplos.

La función cuadrática permite modelizar multitud de fenómenos naturales, sociales y matemáticos. Con base en ese proceso de modelización es posible resolver problemas relacionados con esos fenómenos. El problema de prever y describir la trayectoria de una pelota de golf o del obús de un cañón, el problema de optimizar el área de un terreno que debe tener un perímetro fijo, el diseño de antenas de satélite o de lentes, y el problema de hallar dos números que cumplen ciertas condiciones con respecto a su suma y producto son ejemplos de este tipo de problemas. En general, la resolución de estos problemas utiliza sólo algunos de los elementos y propiedades de la estructura matemática. Por ejemplo, el diseño de antenas de satélite o de lentes utiliza propiedades del foco de la parábola o el problema de optimizar el área de un terreno con un perímetro dado utiliza el hecho de que el vértice de una parábola con dilatación negativa es su punto máximo. En otras palabras, la resolución de estos problemas pone en juego una subestructura de la estructura matemática en cuestión.

Los ejemplos que hemos presentado muestran que una misma subestructura se puede relacionar con diversos fenómenos. Por ejemplo, la subestructura que permite abordar el problema de la trayectoria de una pelota de golf, modeliza todos aquellos fenómenos que se refieren al movimiento de cuerpos en un campo de fuerza uniforme. Podemos por lo tanto establecer una relación entre subestructuras y fenómenos en la que a cada fenómeno le asignamos la subestructura que lo modeliza. Se pueden establecer parejas (Subestructura_i, Fenómeno_j), en las que el Fenómeno_j es modelizado por la Subestructura_i. La Figura 12 muestra un esquema de estas relaciones.

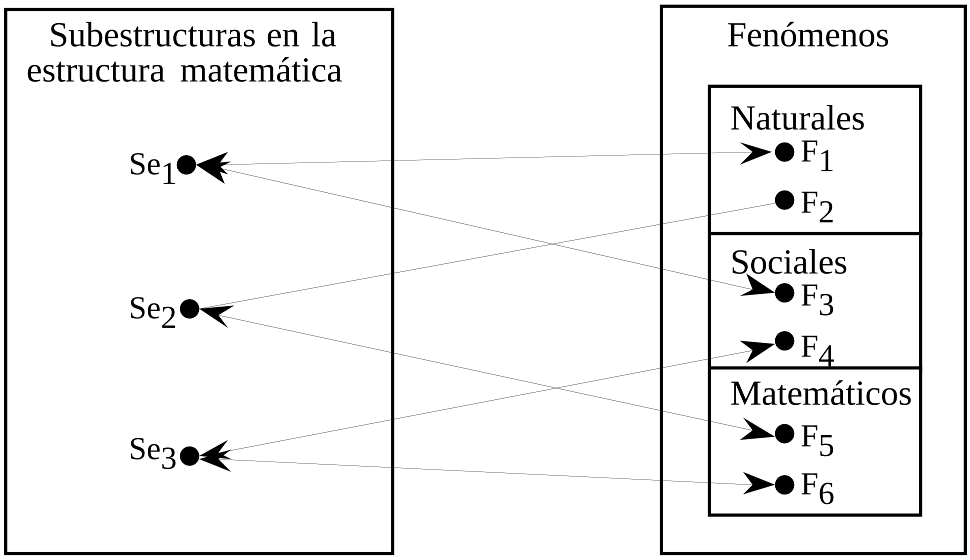

Figura 12. Análisis fenomenológico y modelos

El análisis fenomenológico de una estructura matemática consiste en la identificación de las subestructuras correspondientes a esa estructura, de los fenómenos organizados por ellas y de la relación entre ellos. De esta manera se puede establecer una relación de equivalencia en la que cada clase de equivalencia, representada por una subestructura dada, organiza todos aquellos fenómenos que pueden ser modelizados por ella. “El análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste entonces en describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto y la estructura con esos fenómenos” (Puig, 1997, p. 63). Denominamos *modelo* a la tripla (subestructura, fenómeno, relación) en la que la subestructura modeliza el fenómeno de acuerdo con el establecimiento de una relación en la que se identifican aquellas características estructurales del fenómeno que se pueden representar con elementos y propiedades de la subestructura en cuestión. Por lo tanto, el término modelo se puede referir a una tripla en la que se identifica un fenómeno específico (por ejemplo, la caída libre de una pelota de una masa específica desde una altura dada), o al conjunto de triplas que reúne a todos los fenómenos de caída libre de objetos, o, inclusive, a todos los fenómenos que se refieren al movimiento de cuerpos no relativistas en un campo de fuerzas. Dado que la subestructura matemática organiza y caracteriza los fenómenos, en algunas ocasiones se utiliza el término modelo para designar la subestructura misma. Nosotros utilizaremos el término *modelo matemático* para ello.

El análisis fenomenológico no consiste únicamente en establecer la relación entre subestructuras y fenómenos y clasificar los fenómenos de acuerdo con las subestructuras con las que están relacionados. En el análisis fenomenológico el profesor debe también describir esas relaciones. En esta descripción, el profesor debe caracterizar los aspectos relevantes del fenómeno (o del problema que se quiere resolver dentro del contexto del fenómeno) que pueden asociarse (modelizarse) con elementos y propiedades específicas de la estructura matemática. Por ejemplo, en el caso de los reflectores parabólicos se pone en juego una propiedad de la parábola, por un lado, y un principio de la física, por el otro. La propiedad de la parábola establece que la tangente en cualquier punto de la parábola forma ángulos iguales con el segmento que une el punto con el foco y con la recta que pasa por el punto y es paralela al eje de simetría de la parábola. El principio de la física afirma que cuando un rayo choca contra una superficie reflectora, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. Por lo tanto, en el análisis fenomenológico se identifican, por un lado, aquellas características del fenómeno (o de un problema relacionado con el fenómeno) que son relevantes dentro del problema desde el punto de vista matemático y se relacionan con elementos y propiedades la estructura matemática en uno o más sistemas de representación, por el otro (Ver Figura 13). Más adelante, en el apartado correspondiente al análisis de instrucción,

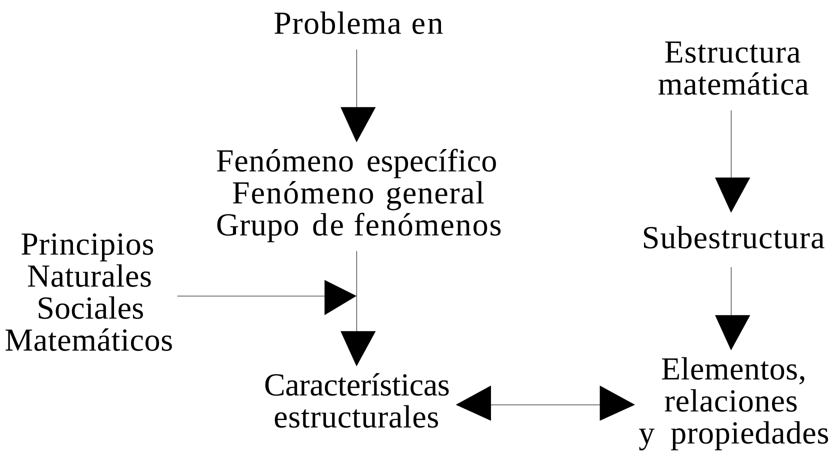

Figura 13. Análisis fenomenológico

consideraremos con más detalle el proceso de modelización que aquí se insinúa. El propósito de la modelización no es únicamente el de describir matemáticamente (en uno o más sistemas de representación) aspectos relevantes de un fenómeno. La potencia de la modelización surge de la capacidad que nos da el modelo matemático (y las propiedades de la estructura matemática en la que se representa) para resolver problemas relacionados con el fenómeno que no se podrían resolver en el contexto no matemático del fenómeno.

Para llegar a producir la descripción detallada y estructurada (en la que se explicitan las relaciones) de la estructura matemática desde la perspectiva de los sistemas de representación y su relación con los fenómenos, el profesor debe poner en juego unos conocimientos y unas capacidades. Hemos visto que el profesor debe ser capaz de construir una estructura conceptual (basada en la noción de mapa conceptual) identificando las relaciones entre los conceptos, las diversas representaciones de la estructura matemática, las relaciones que se pueden establecer entre elementos de diferentes sistemas de representación y entre elementos de un mismo sistema de representación, y las relaciones entre subestructuras de la estructura matemática en cuestión y los fenómenos que ellas modelizan. Para lograrlo es necesario que el profesor, además de asumir una posición fundamentada con respecto a las matemáticas escolares, conozca el significado técnico de al menos las siguientes nociones de la didáctica de la matemática: estructura conceptual, sistema de representación, análisis fenomenológico y modelo. El debe conocer estas nociones de tal forma que pueda ponerlas en juego en el análisis de la estructura matemática en cuestión (Figura 14).

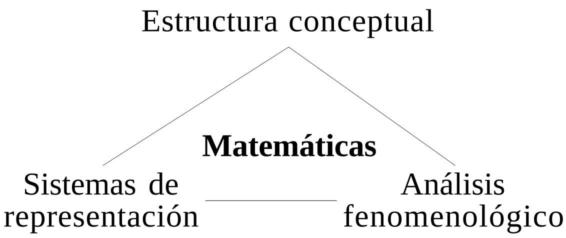

Figura 14. Conocimientos movilizados en el análisis de contenido

La discusión sobre los sistemas de representación en la didáctica de la matemática puede llevar a una serie de paradojas (Rico, 2000). Algunas de estas paradojas tienen que ver con la condición ontológica de los objetos matemáticos y con la dualidad entre las representaciones internas y externas. Con respecto a la existencia de los objetos matemáticos, suponemos, siguiendo a Sfard (2000) y Dörfler (2000), que ellos no existen por fuera del discurso matemático. Sin embargo, "la sensación de los participantes [en el discurso] de que los objetos existen es una condición necesaria para el uso eficiente de los significantes" (Sfard, 2000, p. 91). Por lo tanto, aunque los objetos matemáticos no existen por fuera del discurso, quienes participan en él se comportan como si existieran. Para Cobb, Yackel y McClain (2000) la dualidad entre representaciones internas y externas desaparece: símbolo y significado se construyen dinámicamente. Lo importante es la actividad de simbolización en la que el sujeto se hace capaz de actuar socialmente compartiendo significados. El significado para un sistema de símbolos se construye en la medida en que se llegan a acuerdos sociales sobre la manera como se manejan los símbolos. Estas aclaraciones resaltan el papel de esta noción en las actividades de profesor y escolares en la construcción del conocimiento matemático y la relación entre el análisis de contenido y el análisis cognitivo que consideraremos a continuación.

Análisis cognitivo

Dada su percepción de la comprensión de los estudiantes en un momento dado del ciclo del análisis didáctico y teniendo en cuenta los objetivos que él se ha propuesto para el siguiente ciclo, el contenido que pretende tratar, y el contexto, en el análisis cognitivo, el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje. El análisis cognitivo es un análisis *a priori*. Con él, el profesor pretende prever las actuaciones de los escolares en la fase posterior del ciclo en la que se ponen en juego las actividades de enseñanza y aprendizaje que él ha diseñado. Estas hipótesis deben estar sustentadas por una descripción de aquellos aspectos cognitivos que se relacionan directamente con la estructura matemática sobre la cual se trabaja en dichas actividades. Por lo tanto, el análisis de contenido que el profesor acaba de realizar sirve de punto de partida y de punto de referencia para el análisis cognitivo. Por otro lado, para poder realizar el análisis cognitivo el profesor debe tener un conocimiento y asumir una posición con respecto a la comprensión y el aprendizaje en matemáticas. Este conocimiento y esta posición no dependen de la estructura matemática sobre la que se esté trabajando. Ya consideramos estos conocimientos y estas posiciones en nuestra reflexión sobre los fundamentos de las matemáticas escolares. A continuación consideramos los aspectos específicos a la estructura matemática.

El análisis cognitivo de una estructura matemática es, por un lado, la identificación, descripción y caracterización sistemática, detallada y fundamentada de las tareas (relacionadas con dicha estructura matemática) que los escolares pueden resolver en ese momento y de aquellas tareas (problemas) que deberían poder abordar durante la sesión que se está planificando. Por otro lado, el análisis cognitivo es también la identificación, descripción y caracterización de los errores en los que los escolares pueden incurrir al abordar dichas tareas, de las dificultades que subyacen a esos errores y de los obstáculos que es necesario superar para resolver dichas dificultades.

La estructura conceptual que el profesor ha producido en el análisis de contenido, su conocimiento sobre el aprendizaje y la comprensión, y su conocimiento sobre la estructura matemática en cuestión deben permitirle caracterizar las tareas que los escolares pueden resolver y las que deberían poder abordar desde la perspectiva de:

a) los elementos (conceptos y estructuras conceptuales) involucrados en la tarea,
b) las representaciones de esos conceptos y estructuras conceptuales,
c) las relaciones entre esas representaciones,
d) las relaciones entre los elementos de una misma representación, y
e) los modelos involucrados.

Vemos por lo tanto la relación entre el análisis de contenido y el análisis cognitivo. Cada tarea involucra unos conceptos (o estructuras conceptuales) pertenecientes a la estructura matemática sobre la que se está trabajando. El punto a) requiere que el profesor identifique aquellos elementos de la estructura conceptual que pueden llegar a ponerse en juego cuando los escolares aborden la tarea. Es posible que una tarea pueda abordarse poniendo en juego más de un grupo de conceptos. Es decir, que su resolución no requiera de la puesta en juego de una única subestructura. La identificación de estos elementos (conceptos y estructuras conceptuales) debe hacerse en aquellos sistemas de representación que, en principio, podrían o deberían activarse en la resolución de dicha tarea. De nuevo, diferentes aproximaciones a la tarea pueden poner en juego diferentes representaciones de los conceptos involucrados. Mientras que en el análisis de contenido, el profesor identifica estos elementos desde la perspectiva matemática, en el análisis cognitivo, el profesor busca identificar estos elementos desde la perspectiva del conocimiento conceptual que el escolar debería movilizar para poder abordar las tareas. Estos aspectos se refieren a los puntos a) y b).

Los puntos c) y d) tienen que ver con el conocimiento procedimental. Desde la perspectiva del análisis de contenido, en estos puntos el profesor identifica relaciones entre representaciones de un mismo concepto, entre diferentes expresiones de ese concepto dentro de un mismo sistema de representación y entre diferentes conceptos de la estructura conceptual. Desde la perspectiva del análisis cognitivo, el interés del profesor se debe centrar en identificar las capacidades de los escolares para establecer las relaciones necesarias para abordar y resolver la tarea en cuestión. Identificamos estas capacidades con los niveles del conocimiento procedimental (Rico, 1997a, p. 31):

> *Los procedimientos son aquellas formas de actuación o ejecución de tareas matemáticas; igualmente podemos distinguir tres niveles diferentes en el campo de los procedimientos:*
> *i) las destrezas consisten en la transformación de una expresión simbólica en otra expresión; para ello hay que ejecutar una secuencia de reglas sobre manipulación de símbolos; por lo general, las destrezas se ejecutan procesando hechos;*
> *ii) los razonamientos se presentan al procesar relaciones entre conceptos, y permiten establecer relaciones de inferencia entre los mismos*
> *iii) las estrategias, que se ejecutan sobre representaciones de conceptos y relaciones; las estrategias operan dentro de una estructura conceptual y suponen cualquier tipo de procedimiento que pueda ejecutarse, teniendo en cuenta las relaciones y conceptos implicados.*

Las destrezas tienen que ver entonces con dos de las relaciones que el profesor identifica en el análisis de contenido: las relaciones entre diferentes representaciones de un mismo concepto (por ejemplo, la representación gráfica y simbólica de la función cuadrática) y las transformaciones de las expresiones de un concepto dentro de una misma representación (por ejemplo, la completación de cuadrados como procedimiento para transformar una forma simbólica de la función cuadrática en otra). Los razonamientos, por su parte, describen la capacidad de los escolares para relacionar dos o más conceptos dentro un sistema de representación (por ejemplo, la relación entre el foco y la directriz de la parábola en la representación gráfica de la función cuadrática). Las estrategias tienen que ver, al menos parcialmente, con el punto e).

El punto e) se refiere al análisis fenomenológico descrito en el análisis de contenido. En este análisis, el profesor debe identificar, describir, caracterizar y clasificar los fenómenos naturales, sociales y matemáticos que pueden ser organizados (modelizados) por subestructuras contenidas en la estructura en cuestión. Por lo tanto, desde la perspectiva matemática se da un juego entre fenómenos por un lado y modelos matemáticos por el otro. Se establecen parejas de fenómenos y subestructuras matemáticas que los modelizan. Desde la perspectiva del análisis cognitivo, cuando los escolares abordan una tarea cuya formulación involucra fenómenos y no está descrita en lenguaje matemático, su resolución requiere de estrategias. Estas estrategias tienen que ver con la identificación del fenómeno, la representación del fenómeno en términos matemáticos dentro de la subestructura que lo modeliza, la resolución del problema dentro de las representaciones matemáticas, la traducción e interpretación de los resultados de la resolución en términos del fenómeno original, y la verificación de la solución. Estas estrategias componen el proceso de modelización que consideraremos más adelante.

La identificación, descripción y caracterización del conocimiento conceptual y procedimental que puede llegar a ponerse en juego cuando los escolares abordan unas tareas específicas es una parte del análisis cognitivo. El análisis cognitivo también involucra la identificación, descripción y caracterización de los errores en los que los escolares pueden incurrir, de las dificultades que subyacen a esos errores y de los obstáculos que es necesario superar para resolverlas. Cuando un alumno proporciona una respuesta incorrecta a una cuestión matemática se puede decir que su respuesta es errónea, y la solución proporcionada es un error en relación con la cuestión propuesta (Radatz, 1979). Los errores se identifican en las producciones de los escolares cuando ellos abordan tareas específicas poniendo en juego el conocimiento que tienen en ese momento. Por lo tanto, la mayor parte de los errores son consecuencia de ese conocimiento y de la manera como los escolares lo movilizan para resolver la tarea. Los errores se pueden clasificar de múltiples maneras (Rico, 1995). En el análisis cognitivo, el profesor identifica aquellos errores que son producto del conocimiento de los escolares y los puede clasificar en dos categorías: aquellos que son producto de un conocimiento que es independiente de la estructura matemática que se está trabajando y aquellos que surgen de un conocimiento que es específico a esa estructura matemática. Por ejemplo, los escolares pueden incurrir en errores porque no conocen o no utilizan apropiadamente reglas lógicas de deducción. Éste es un conocimiento que no es específico a la estructura matemática que se pone en juego en la tarea. El conocimiento que el profesor debe tener sobre el aprendizaje y la comprensión en matemáticas le debe permitir identificar esos errores. Por otro lado, cada estructura matemática tiene asociados unos errores que son específicos a ella.

Mientras que los errores se expresan en la resolución de una tarea específica, la identificación, descripción y caracterización de las dificultades le permite al profesor organizar los errores y relacionarlos con el conocimiento que se pone en juego cuando los errores se producen. Podemos también clasificar las dificultades dependiendo de si son o no específicas a la estructura matemática. Aquellas que lo son pueden ser organizadas de acuerdo con la dualidad entre conocimiento conceptual y procedimental. Por ejemplo, cuando los escolares no pueden identificar el foco en la gráfica de una parábola, ellos pueden incurrir en errores, puesto que no conocen apropiadamente hechos que son necesarios en la resolución de la tarea. De la misma manera, se puede incurrir en un error cuando se ponen en juego uno o más conceptos o cuando la tarea requiere relacionar esos conceptos. Éste sería el caso de confundir las coordenadas del foco de una parábola con las coordenadas de su corte con el eje de las ordenadas. Por otro lado, los escolares pueden incurrir en errores al desconocer o aplicar mal una destreza, realizar un razonamiento o poner en juego una estrategia. Por ejemplo, los escolares pueden cometer errores al relacionar elementos de la representación simbólica en la representación gráfica (para obtener las coordenadas del foco a partir de la forma estándar), al relacionar diferentes expresiones dentro de un mismo sistema de representación (en el procedimiento de completación de cuadrados), al establecer relaciones entre dos conceptos (al hacer la equivalencia entre las soluciones de la ecuación cuadrática y los valores para los cuales la función cuadrática se anula), o al interpretar un fenómeno en términos de una representación matemática (al resolver problemas de tiro parabólico).

Las dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas. Cuando estas relaciones entre dificultades resultan en conocimientos firmemente establecidos que han funcionado con éxito en el pasado, resulta difícil resolverlas. Es el caso entonces de un conocimiento parcial, arraigado cuya movilización genera errores en algunas circunstancias. Nos encontramos con un obstáculo. Un obstáculo es un conocimiento adquirido que tiene un dominio de eficacia. Los escolares lo utilizan para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto en el que el dominio de ese conocimiento es eficaz y adecuado. No obstante, cuando se usa este conocimiento fuera de ese contexto genera respuestas inadecuadas, y se producen errores. En resumen, "las dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores" (Socas, 1997, p. 125).

Hemos visto que los diferentes elementos del análisis cognitivo están relacionados. Hemos establecido la relación entre obstáculos y dificultades, entre errores y dificultades, entre las tareas y los errores en los que los escolares incurren cuando las abordan, y entre la descripción de esas tareas y el resultado del análisis de contenido de la estructura matemática. Para identificar, describir y caracterizar las tareas, los errores, las dificultades y los obstáculos el profesor debe movilizar diversos conocimientos. Hemos visto que el profesor debe tener un conocimiento y asumir una postura con respecto a la comprensión y el aprendizaje en matemáticas. Este conocimiento, que es independiente de la estructura matemática en cuestión, le puede permitir identificar algunos errores, dificultades y obstáculos. Por otro lado, el profesor necesita profundizar en el significado cognitivo de la estructura matemática para efectos de identificar, describir y caracterizar las tareas que los escolares pueden abordar y los errores en los que ellos pueden incurrir al hacerlo, las dificultades que subyacen a esos errores y los obstáculos en donde se originan (Figura 15).

De la misma manera que los resultados del análisis de contenido pueden implicar la necesidad de revisar la formulación de los contenidos propuestos al inicio del ciclo, los resultados del análisis cognitivo pueden llevar al profesor a

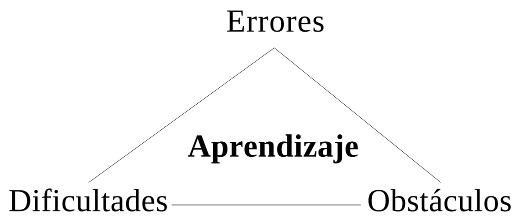

Figura 15. Conocimientos movilizados en el análisis cognitivo

reformular los objetivos que desea lograr. Por otra parte, hemos visto cómo la información que se produce en el análisis cognitivo depende de la información que se produce en el análisis de contenido. La descripción que se hace de las tareas que los escolares pueden abordar se basa en la identificación de los diversos elementos y relaciones de la estructura conceptual que pueden estar involucrados en la tarea. Estos elementos y relaciones (conceptos y conexiones entre ellos) están en la base de las dificultades que son específicas a la estructura matemática y que subyacen a una parte de los errores en los que los escolares pueden incurrir cuando abordan las tareas. Al profundizar en el análisis cognitivo, el profesor revisará el análisis de contenido. Esta revisión puede dar lugar a reformulaciones de esa información. De esta manera, el profesor mantiene una relación biunívoca entre el análisis de contenido y el análisis cognitivo (que se representa por la flecha en los dos sentidos en la Figura 7). La relación entre el análisis cognitivo y el análisis de instrucción es similar. Con el análisis cognitivo el profesor busca predecir los errores en los que los escolares pueden incurrir cuando aborden las tareas que conformarán las actividades de enseñanza y aprendizaje que él diseñe en el análisis de instrucción. Y estas tareas deberán ser escogidas y diseñadas de tal manera que pongan en juego el conocimiento (dificultades y obstáculos) que subyacen a esos errores. Por lo tanto, el análisis cognitivo y el análisis de instrucción deben hacerse de manera coordinada. En el apartado que sigue describimos el análisis de instrucción.

Análisis de instrucción

El resultado del análisis de instrucción debe ser la identificación y descripción de las tareas que es posible utilizar en el diseño de las actividades de enseñanza y aprendizaje. Utilizamos el término “actividades de enseñanza y aprendizaje” en un sentido amplio. Una actividad puede ser una presentación introductoria hecha por el profesor o la resolución de una tarea por parte de los escolares, entre otras. Las actividades se refieren al contenido descrito en la estructura conceptual y examinado en el análisis de contenido y deben tener como propósito lograr los objetivos descritos al comienzo del ciclo. Por lo tanto, deben abordar los errores, dificultades y obstáculos identificados en el análisis cognitivo. Como veremos en el siguiente apartado, el diseño de actividades se centra en la selección y justificación de las tareas que conformarán esas actividades a partir de un universo de tareas que son compatibles con el análisis de contenido y el análisis cognitivo. En el análisis de instrucción el profesor organiza este universo y lo complementa con dos consideraciones adicionales: la resolución de problemas y los materiales y recursos disponibles.

El énfasis que hemos hecho en la relación entre las matemáticas y la experiencia nos lleva a resaltar la modelización de fenómenos en la selección de las tareas que pueden componer las actividades de enseñanza y aprendizaje. En el marco del análisis de contenido describimos la idea de modelo como una relación biunívoca entre elementos y propiedades de una subestructura de la estructura matemática y características estructurales de fenómenos sociales, naturales y matemáticos y establecimos su relación con el análisis fenomenológico. Estas relaciones entre estructura matemática y fenómenos se expresan en el proceso de modelización y en las destrezas, los razonamientos y las estrategias que los escolares deben desarrollar para identificar el modelo matemático que corresponde a un fenómeno (o a un problema que se refiere a un fenómeno), para expresar ese fenómeno o problema en términos de uno o más sistemas de representación, para resolver el problema o interpretar el fenómeno dentro de esos sistemas de representación, para traducir la solución o la interpretación en términos del fenómeno, y para verificar esa solución o interpretación. En la Figura 16 hemos identificado estos procedimientos. Por otro lado, también hemos identificado (en subrayado) dos procedimientos que el profesor debe realizar para diseñar la tarea: el análisis fenomenológico, como el procedimiento que le permite establecer la relación entre fenómenos (y los problemas que se refieren a ellos) y la estructura matemática; y la descripción que el profesor de hacer del problema del mundo real en un texto del tipo que comúnmente se conoce como problema de palabras (Ortíz, 2000, p. 15).

Desde la perspectiva del análisis de instrucción, la gestión de tareas que busquen el desarrollo de destrezas, razonamientos y estrategias de modelización implica la necesidad de que el profesor tenga conocimientos sobre resolución de problemas. En este sentido se establece una relación entre el análisis fenomenológico como parte del análisis de contenido, las estrategias de modelización como parte del análisis cognitivo, y la resolución de problemas como parte del análisis de instrucción.

El universo de tareas disponibles puede ampliarse cuando el profesor tenga en cuenta los materiales y recursos que tiene disponibles y la manera como estos materiales y recursos permiten diseñar experiencias matemáticas complementarias a aquellas que es posible proponer con papel y lápiz. Los materiales y recursos pueden transformar la manera como profesor y escolares representan los conceptos y estructuras conceptuales que hacen parte de la estructura matemática. Por ejemplo, algunos materiales manipulativos pueden convertirse en “modelos no matemáticos”[2] de subestructuras de la estructura matemática que se desea tratar. Con estos modelos físicos (como el ábaco) es posible establecer una relación biunívoca entre algunos elementos de la estructura matemática y elementos del modelo y entre las normas que rigen el manejo del modelo y las normas matemáticas que regulan los elementos correspondientes de la estructura matemática. De esta manera, la manipulación del modelo permite “simular” el funcionamiento de la estructura matemática y genera un nuevo significado para ella. Otros materiales y recursos, como las

2.Recordemos que la noción de modelo involucra una tripla (fenómeno, estructura matemática, relación). En esta caso, el fenómeno es el material junto con las normas que regulan su utilización. Por lo tanto, aquí estamos utilizando el término “modelo” con dos significados relacionados, pero diferentes.

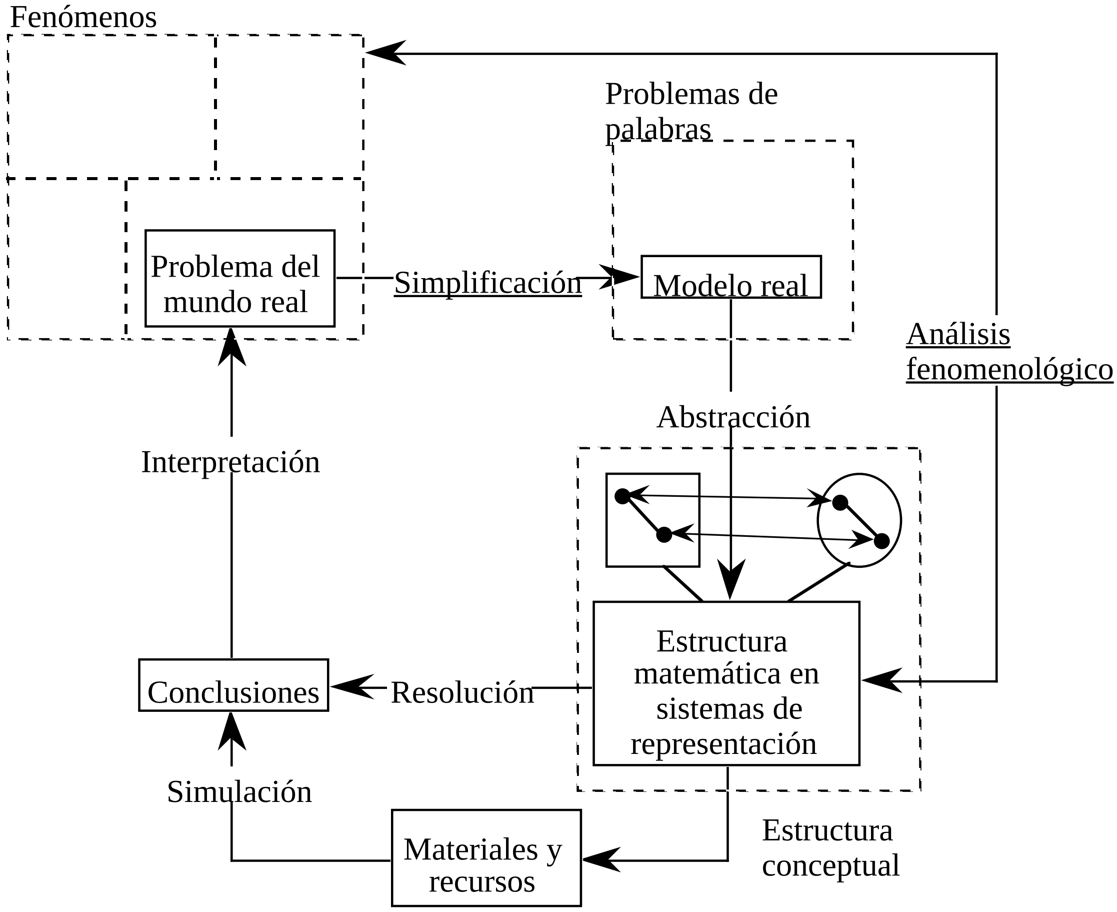

Figura 16. Análisis fenomenológico, resolución de problemas y modelización

calculadoras y algunos programas de ordenador, pueden verse como sistemas de representación complementarios en los que no sólo se representan los conceptos involucrados, sino que también es posible manipular dinámicamente estos conceptos. Estos modelos y estas nuevas representaciones pueden sugerir formas alternativas en las que los escolares ponen en juego su conocimiento al resolver tareas y, por lo tanto, pueden insinuar nuevas tareas que permitan abordar los errores, dificultades y obstáculos identificados en el análisis cognitivo.

Diseño y selección de tareas

Para cualquier estructura matemática existen multitud de tareas disponibles en los libros de texto y en la literatura de investigación e innovación curricular. Por lo tanto, el problema de la planificación en esta fase del análisis didáctico no es necesariamente el de crear nuevas tareas, sino el de seleccionar justificadamente un grupo de tareas que sean coherentes con los contenidos y objetivos propuestos al inicio del ciclo y con los resultados de los análisis de contenido, cognitivo y de instrucción (cuadro 3 del esquema de la Figura 7).

La delimitación de las tareas que se pueden seleccionar para una estructura matemática surge de diferentes fuentes. Por un lado, la selección de contenidos y objetivos al inicio del ciclo determina unos marcos conceptuales y cognitivos para el análisis didáctico. Dentro de este contexto, en el análisis de contenido se identifican:

a) los conceptos y estructuras conceptuales a tratar,
b) las representaciones de estos conceptos y estructuras conceptuales,
c) las conexiones entre diversas representaciones de un mismo elemento de la estructura conceptual,
d) las conexiones entre diferentes elementos en un mismo sistema de representación, y
e) los modelos involucrados.

Por otro lado, en el análisis cognitivo se determinan:

- los significados que se pueden construir (hechos, conceptos y estructuras conceptuales relacionados con los puntos a y b anteriores),
- los procedimientos que se pueden desarrollar (destrezas, razonamientos y estrategias relacionados con los puntos c, d y e), y
- los errores, las dificultades y los obstáculos que se pueden abordar (descritos en términos de los significados y los procedimientos anteriores).

Finalmente, en el análisis de instrucción se identifican:

- los procesos de modelización y de resolución de problemas específicos a la estructura matemática y
- los materiales y recursos disponibles.

De esta manera, la información que resulta de los análisis de contenido, cognitivo y de instrucción delimita el universo de tareas que se pueden utilizar en las actividades de enseñanza y aprendizaje. La selección de tareas y la planificación de su gestión en el aula también depende de la visión que se tenga con respecto a las matemáticas escolares, su aprendizaje y enseñanza. Nuestra postura de constructivismo social con respecto al aprendizaje implica la formulación de tareas que:

- tengan en cuenta la comprensión de los escolares en ese momento,
- generen su interés,
- puedan ser abordadas por los escolares con el conocimiento que tienen en ese momento,
- representen un desafío para ellos,
- pongan en juego su conocimiento con el propósito de generar conflictos cognitivos, y
- promuevan la construcción social de significados.

Vemos entonces que, en esta fase del análisis didáctico, el profesor debe hacer un proceso de selección de tareas. Esta selección debe ser tal que las tareas que terminen conformando las actividades de enseñanza y aprendizaje sean coherentes con los contenidos y objetivos previstos y con el resultado de los análisis de contenido, cognitivo y de instrucción. Se puede pensar que el proceso va en un solo sentido: de los análisis al diseño. Y que, una vez que se han realizado los análisis, las actividades se deducen del resultado de esos análisis. Sin embargo, la riqueza de las estructuras matemáticas desde la perspectiva didáctica propuesta aquí y la complejidad de los procesos cognitivos necesarios para su comprensión implican que puede haber gran variedad de diseños que sean compatibles con unos resultados dados de los análisis de contenido, cognitivo y de instrucción. Por consiguiente, el diseño no se deduce de los análisis. Pero además, el profesor se encontrará siempre en un proceso sin terminar, puesto que la selección de una posible actividad requiere de su evaluación con respecto a los análisis que le dieron lugar. Al escoger o diseñar una actividad él tiene que vislumbrar las diferentes maneras como los escolares pueden abordar la actividad, los diferentes caminos y estrategias que ellos pueden tomar y utilizar al intentar resolverla, y las dificultades que pueden tener y los errores en los que pueden incurrir al intentarlo. En este proceso de puesta en juego hipotética de la actividad (que hace parte del diseño del análisis de actuación que consideramos más adelante), la información recogida en los otros análisis juega un papel central. La previsión de los caminos, estrategias, dificultades y errores (entre otros) debe surgir del análisis del contenido matemático, de los aspectos cognitivos y de los aspectos de instrucción. Cuando el profesor analiza la actividad escogida a la luz de los diferentes análisis y de sus correspondientes elementos, se dará cuenta que puede revisar y mejorar esos análisis. Por consiguiente, el análisis de la actividad puede implicar la necesidad de reformular los análisis generando un nuevo ciclo, cuyo producto final será la selección de una nueva actividad compatible con el nuevo análisis (doble flecha entre los cuadros 2 y 3 del esquema de la Figura 7).

Las reflexiones anteriores pueden dar a entender que el profesor no termina nunca de hacer análisis, seleccionar actividades, evaluarlas a la luz de los análisis, reformular esos análisis con motivo de la evaluación y volver a seleccionar actividades. Sin embargo, es el profesor quien decide cuándo termina una fase de este proceso. Habrá diferentes razones para hacerlo, entre ellas el tiempo. No obstante, el profesor deberá buscar al menos cuatro resultados:

- una selección de las tareas que conforman las actividades de enseñanza y aprendizaje;
- una justificación informada y sistemática, a la luz del análisis didáctico, de la validez de las actividades y tareas escogidas con respecto al contenido matemático en cuestión, a la comprensión de los escolares y a los objetivos que se ha propuesto;
- una previsión de las posibles actuaciones de los alumnos cuando se lleve a la práctica la actividad; e
- ideas para la gestión de la clase, para el análisis de las actuaciones de los alumnos, y para sus reacciones a esas actuaciones.

Al realizar el análisis de instrucción y el diseño de tareas, el profesor pone en juego diversos conocimientos. La manera como él aborde la selección de tareas y el tipo de tareas que él seleccione dependerá de su visión y su conocimiento acerca de la enseñanza de las matemáticas. Hemos visto cómo esta visión y conocimiento están relacionados con sus visiones y conocimientos acerca de las matemáticas escolares y el aprendizaje de las matemáticas. Estas visiones y estos conocimientos no dependen directamente de la estructura matemática para la que se realiza la planificación. Sin embargo, el profesor pone también en juego conocimientos que son específicos a la estructura matemática. Es el caso de su conocimiento sobre el proceso de modelización y su relación con la resolución de problemas, por un lado, y de los materiales y recursos disponibles, por el otro (Figura 17). Con la selección de las tareas y la previsión de las

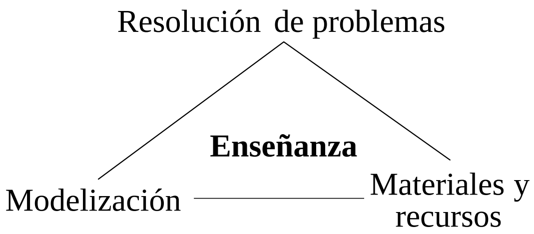

Figura 17. Conocimientos movilizados en el análisis de instrucción

actuaciones de los alumnos y las posibles reacciones del profesor a ellas culmina la fase de planificación del análisis didáctico. A continuación consideramos algunos aspectos de la puesta en práctica de esas actividades.

Puesta en práctica de las actividades. Discurso en el aula y gestión de clase

En este artículo no pretendemos reflexionar en profundidad sobre la problemática de la gestión de la clase de matemáticas. Por ejemplo, no consideramos las reflexiones pedagógicas de carácter general. Nos interesamos por dos aspectos de la gestión de clase que están directamente relacionados con los fundamentos de las matemáticas escolares mencionados anteriormente, el análisis didáctico y la estructura matemática objeto del proceso de enseñanza y aprendizaje. Se trata del discurso en el aula y de la planificación sobre la marcha que, en algunas ocasiones, el profesor debe realizar en el aula.

Hemos resaltado el papel del discurso en el proceso de construcción de significados sociales que parten de y condicionan la conformación de los significados individuales. Esta construcción de significados (y el consiguiente desarrollo de destrezas, razonamientos y estrategias) debe surgir de la negociación de las normas que regulan el discurso matemático en el aula. Por lo tanto, los procesos de comunicación y justificación son centrales en el diseño y gestión de las tareas que componen las actividades de enseñanza y aprendizaje. En el trabajo en grupo, los escolares deben asegurarse que el objeto de discusión es común y que existe un consenso en los significados que le asignan a ese objeto. Para ello, dado que en muchas ocasiones existirán posiciones conflictivas, tienen que buscar un consenso. Este consenso requiere que cada quien justifique su posición y busque convencer a los otros. Paralelamente, en la comunidad de práctica del aula, grupos e individuos deben comunicarse y convencer a los demás participantes. El profesor, siendo el participante experto en esta comunidad, deberá guiar esta comunicación para resaltar las justificaciones válidas y promover la construcción de significados que estén acordes con los significados de las matemáticas escolares establecidos previamente por él. La planificación que resulta del análisis didáctico debe proveer al profesor con criterios para tomar estas decisiones y actuar a nivel local dentro del aula. Sin embargo, éste no es necesariamente el último nivel de la planificación.

Cuando reflexionamos sobre la noción de currículo vimos que la planificación se puede realizar a diferentes niveles. Podemos pensar en la planificación a nivel oficial, con las directrices que la administración sugiere a las instituciones y profesores, la planificación a nivel del centro educativo, o la planificación global al nivel de los profesores. En este último caso, los profesores diseñan el currículo de una asignatura con base en las nociones de contenidos, objetivos, metodología y evaluación. En los apartados anteriores hemos presentado otro nivel de planificación que se centra en las actividades que conciernen un periodo limitado de tiempo y un contenido matemático específico. Esta planificación puede referirse a una unidad didáctica o una hora de clase. Pero el proceso de planificación no termina a este nivel. El profesor debe hacer también ciclos de análisis didáctico dentro de su gestión de clase. Describimos a continuación este nivel de planificación.

La planificación de una hora de clase con base en el análisis didáctico debe contener, entre otras cosas, la previsión de las actuaciones de los escolares cuando abordan las tareas que componen las actividades propuestas. La complejidad del contenido matemático y de los procesos cognitivos necesarios para construirlo hace que las actuaciones de los escolares puedan ser diferentes de aquellas previstas por el profesor en su planificación. Esta diferencia entre lo previsto y lo que realmente sucede puede ser un indicativo de dificultades y obstáculos que el profesor creía superados o que no logró prever y, por lo tanto, puede invalidar la planificación hecha previamente. El profesor puede considerar que no tiene sentido continuar con un seguimiento estricto de la planificación inicial. Él tendrá entonces que reformular los objetivos y los contenidos de al menos una parte de la clase y producir una o más actividades que aborden esos errores, dificultades y obstáculos. Para ello, tendrá que realizar, sobre la marcha, un nuevo ciclo de análisis didáctico que parte de su percepción de las dificultades no previstas. En este caso, el profesor tendrá que poner en juego el análisis de contenido que ya ha producido, incluir aquellos aspectos de la estructura matemática que no se encuentren en ella y que estén en la base de las dificultades, reformular los análisis cognitivo y de instrucción y seleccionar nuevas tareas. Este tipo de análisis didáctico "sobre la marcha" debería sustentar aquellas decisiones y actuaciones del profesor que no tiene previstas en su planificación de la hora de clase. Aunque la gestión de clase incluye otros aspectos que no tratamos aquí (como, por ejemplo, el manejo de la disciplina), vemos la gestión de las matemáticas escolares dentro del aula como un juego entre las actuaciones que el profesor tiene previstas en su planificación previa y las decisiones y las actuaciones que el profesor realiza con base en análisis didácticos "sobre la marcha" cuando las actuaciones de los escolares no corresponden a sus previsiones. Otro aspecto de la gestión de clase del profesor es la observación y registro de las producciones y actuaciones de sus alumnos. Esta actividad es el punto de partida para el análisis de actuación que consideramos a continuación.

Análisis de actuación

El análisis de actuación es la última fase del análisis didáctico (cuadro 5 del esquema de la Figura 7). El profesor recoge la información para el análisis de actuación durante la puesta en práctica de las actividades y con base en las actuaciones de los escolares. Mientras que en el análisis cognitivo el profesor hace una previsión de las actuaciones de los escolares cuando ellos aborden las tareas propuestas, en el análisis de actuación él debe describir esas actuaciones.

El análisis cognitivo es un análisis *a priori* y el análisis de actuación es un análisis *a posteriori*. Los dos análisis se apoyan en el mismo tipo de información: tareas, errores, dificultades y obstáculos.

El resultado del análisis de actuación es la descripción sistemática de la comprensión de los escolares con el propósito de proporcionar información que sea útil para el inicio de un nuevo ciclo del análisis didáctico. Esta descripción debe hacerse, por un lado, en términos de las tareas que los escolares pudieron resolver. Estas tareas pueden ser indicadores del conocimiento adquirido en ese ciclo del análisis didáctico y de las dificultades y obstáculos que los escolares pudieron superar. Por el otro lado, en muchas ocasiones los escolares no podrán resolver adecuadamente todas las tareas propuestas. Aparecerán, por lo tanto, soluciones incompletas y con errores. El profesor deberá analizar estas soluciones con el objetivo de dilucidar las dificultades que subyacen a esos errores y los posibles obstáculos que explican esas dificultades. Este análisis surgirá de su experiencia y de su conocimiento sobre el aprendizaje y la comprensión de la estructura matemática en cuestión. El análisis de las actuaciones de los escolares se centra en la descripción de la manera como ellos abordan las tareas. Esta descripción seguirá esquemas similares a los utilizados en el análisis cognitivo. Es decir, el profesor debe identificar:

- los conceptos y estructuras conceptuales puestos en juego,
- las representaciones de esos conceptos que fueron utilizadas,
- las relaciones que establecieron entre los conceptos,
- las relaciones que establecieron entre las representaciones de los conceptos, y
- los modelos utilizados.

Esta descripción del conocimiento conceptual de los escolares, debe permitirle al profesor analizar al menos una parte de los errores en los que ellos hayan incurrido. Este análisis de errores conceptuales debe conjugarse con el consiguiente análisis del conocimiento procedimental. En este análisis el profesor debe determinar las destrezas, los razonamientos y las estrategias utilizados por los escolares y los errores relacionados con ellos. El resultado de este análisis será la descripción de la comprensión de los escolares en este punto de la instrucción en términos, por un lado, del conocimiento adquirido y, por el otro, de las dificultades y obstáculos que es necesario superar. Con base en esta información el profesor podrá iniciar un nuevo ciclo del análisis didáctico.

Al realizar el análisis de actuación, el profesor pone en juego diversos conocimientos. Por un lado, su conocimiento y visiones sobre el aprendizaje y la evaluación en matemáticas condicionarán la manera como realice los análisis. Por el otro lado, él tendrá que poner en juego su experiencia y su conocimiento sobre los errores, dificultades y obstáculos relacionados con la estructura matemática en cuestión (Figura 18).

El análisis de actuación cierra el ciclo del análisis didáctico. A continuación hacemos una reflexión sobre el esquema general de este procedimiento y comparamos este esquema con otros propuestos en la literatura.

Análisis didáctico como procedimiento para organizar

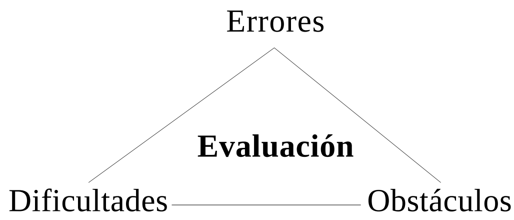

Figura 18. Conocimientos movilizados en el análisis de actuación

la enseñanza de las matemáticas

Hemos descrito el análisis didáctico como el procedimiento que idealmente el profesor debiera seguir para el diseño, puesta en práctica y evaluación de actividades de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Este procedimiento de planificación a nivel local se sustenta en nuestras posturas sobre las matemáticas escolares y su aprendizaje y pretende mostrar una manera de aproximarse a una enseñanza compatible con esas posturas. El procedimiento es cíclico y está compuesto por una sucesión de fases que esquematizamos en la Figura 7. Hemos descrito con algún detalle la fase de planificación del ciclo (cuadros 1, 2 y 3 de la figura) cuyo centro son los análisis de contenido, cognitivo y de instrucción.

El ciclo del análisis didáctico se inicia en la constatación de un estado inicial y pasa por una planificación, con base en la cual tiene lugar una actuación (de profesores y escolares) que es observada y evaluada con el propósito de dar lugar al inicio de un nuevo ciclo. Estos pasos son equivalentes a los propuestos en la investigación–acción: planificación, acción, observación y reflexión (Kemmis y McTaggart, 1988). Shulman (1987) detalla más estos pasos desde la perspectiva del profesor en su modelo de razonamiento y acción pedagógicos. En este modelo, él sugiere las fases de comprensión, transformación, instrucción, evaluación, reflexión y nueva comprensión (p. 15). De la misma manera, el modelo del ciclo de enseñanza de las matemáticas de Simon (1995) (Figura 1), partiendo de una visión constructivista del aprendizaje, sugiere un procedimiento similar, en el que se determina un objetivo de aprendizaje, se realiza un plan de actividades, se formulan hipótesis sobre el proceso de aprendizaje, se ponen en práctica las actividades y se evalúa el conocimiento de los escolares. Con la descripción detallada del análisis didáctico que hemos hecho en los apartados anteriores, hemos buscado dotar de un significado específico, desde la perspectiva de las matemáticas escolares, a este esquema cíclico que ya ha sido sugerido de diferentes maneras en la literatura.

Además de describir las herramientas conceptuales y metodológicas que el profesor debe poner en juego para realizar el análisis didáctico, hemos enfatizado las múltiples relaciones entre los análisis que lo componen y las herramientas que se ponen en juego. El análisis didáctico se inicia con la determinación del contenido a tratar y de los objetivos a lograr a partir de la percepción del profesor de la comprensión de los escolares con motivo de los resultados del análisis de actuación del ciclo anterior y teniendo en cuenta los contextos social, educativo e institucional en los que se enmarca la instrucción. A partir de esta información, el profesor inicia la planificación con el análisis de contenido. La información que surge del análisis de contenido sustenta el análisis cognitivo. A su vez, la realización del análisis cognitivo puede dar lugar a la revisión del análisis de contenido. Esta relación simbiótica entre los análisis también se establece con el análisis de instrucción. Su formulación depende de y debe ser compatible con los resultados de los análisis de contenido y cognitivo, pero, a su vez, su realización puede generar la necesidad de corregir las versiones previas de estos análisis. Finalmente, la selección de tareas debe ser coherente con los resultados de los tres análisis y la evaluación de esas tareas a la luz de los análisis puede llevar al profesor a realizar un nuevo ciclo de análisis, antes de seleccionar definitivamente las tareas que componen las actividades de enseñanza y aprendizaje.

Por otro lado, en la medida que hemos descrito las diferentes fases del análisis didáctico, hemos ido identificando los diferentes tipos de conocimientos que el profesor debe movilizar para realizarlos. Estos conocimientos forman parte del conocimiento didáctico del profesor. En la Figura 7 identificamos el conocimiento didáctico del profesor en el cuadro 6. A continuación analizamos la naturaleza del conocimiento didáctico y sus múltiples relaciones con los demás elementos del análisis didáctico.

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO

Pasamos ahora a considerar la cuarta cuestión sobre la que se basa el diseño de nuestra asignatura. El conocimiento didáctico es el único elemento del esquema de la Figura 7 que no hemos considerado hasta ahora. De hecho, determinamos el significado de este término a partir de la descripción que hemos hecho del análisis didáctico: el conocimiento didáctico es el conocimiento que el profesor pone en juego y construye cuando realiza el análisis didáctico. A continuación, analizamos el conocimiento didáctico desde tres perspectivas:

- los conocimientos disciplinares que le sirven de referencia,
- la manera como el conocimiento didáctico se pone en juego en el análisis didáctico, y
- la manera como el profesor construye el conocimiento didáctico en la práctica.

Conocimientos disciplinares de referencia

No es posible realizar apropiadamente el análisis didáctico de una unidad didáctica o de una hora de clase a partir de la intuición o la experiencia. El análisis didáctico requiere de unos conocimientos técnicos que permiten analizar el contenido matemático con el propósito de identificar, desarrollar y organizar sus diversos significados. Estos conocimientos, que sustentan el proceso de planificación, ejecución y evaluación, tienen unos conocimientos disciplinares de referencia. Organizamos estos conocimientos de referencia en tres ejes:

- la noción de currículo,
- los fundamentos de las matemáticas escolares y
- los organizadores del currículo.

En este apartado consideramos cada uno de estos ejes, dando significado a los términos “fundamentos de las matemáticas escolares” y “organizadores del currículo” y estableciendo la relación entre ellos. Comenzamos por la noción de currículo.

Noción de currículo

La noción de currículo organiza la mayor parte de las reflexiones que hemos hecho hasta ahora. La hemos utilizado como noción que permite simplificar y organizar los fenómenos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje en la escuela. En este sentido, la idea de los niveles del currículo nos permitió establecer el papel que juegan los contextos social, educativo e institucional como elementos que determinan el entorno en el que se realiza el análisis didáctico. Por otra parte, la idea de las dimensiones del currículo se encuentra presente y coordina buena parte de nuestra presentación. Los cuatro análisis que conforman el análisis didáctico se organizan de acuerdo con estas dimensiones: análisis de contenido (dimensión conceptual), análisis cognitivo (dimensión cognitiva), análisis de instrucción (dimensión formativa) y análisis de actuación (dimensión social). De esta manera, la noción de currículo, como modelo de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la escuela, precisa nuestra propuesta sobre la manera como el profesor debe realizar idealmente su actividad docente. Podemos utilizar la representación geométrica que presentamos antes para representar el análisis didáctico como otro nivel del currículo (Figura 19).

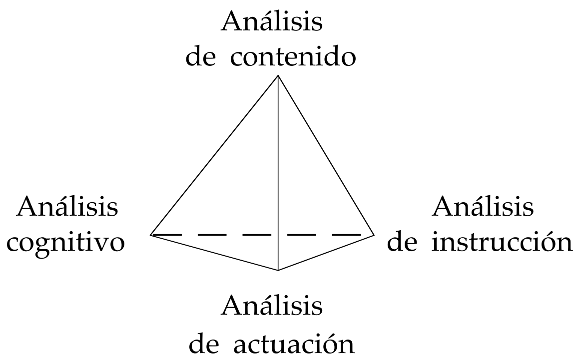

Figura 19. Análisis didáctico como nivel del currículo

Éstas son algunas de las razones que justifican la importancia que damos a la noción del currículo como parte de los conocimientos del profesor:

> *La cuestión clave en la teoría curricular, a nuestro juicio y con el nivel de conocimiento alcanzado, la ubicamos en la necesidad de proporcionar a los profesores herramientas conceptuales bien construidas y funcionalmente potentes, con las que mejorar la propia formación y disponer de un marco de referencia adecuado…estas herramientas deben permitir a los profesores un mayor grado de autonomía intelectual, y, en segundo lugar, les han de facilitar la gestión coordinada de la complejidad de problemas derivados de la enseñanza y aprendizaje de cada una de las áreas curriculares, en nuestro caso, de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas dentro del sistema educativo. [Por lo tanto,] el concepto de currículo, cuya complejidad venimos analizando, es una*

> *de las herramientas claves para el profesional de la educación matemática.* (Rico,1997b, pp. 379-380)

También utilizamos el término currículo para designar un plan de formación. En este sentido, el análisis didáctico se ubica en un nivel de planificación local, relacionándose estrechamente con los otros niveles del currículo. Ya describimos estas relaciones cuando establecimos las condiciones iniciales que determinan el contexto en el que el profesor realiza el análisis didáctico y reflexionamos sobre las dificultades a las que se enfrenta el profesor cuando mira el diseño curricular desde la perspectiva de los contenidos, los objetivos, la metodología y la evaluación. El análisis didáctico, como procedimiento de planificación local del profesor, es una manera de resolver estas dificultades y de dar significado específico y operacional a esas componentes del currículo. El profesor debe, por lo tanto, conocer estas nociones y ser capaz de relacionarlas con su actividad de planificación a nivel local.

Fundamentos de las matemáticas escolares

Llamamos fundamentos de las matemáticas escolares a aquellos conocimientos relacionados con las matemáticas escolares que no son específicos a la estructura matemática sobre la que se trabaja, pero que condicionan el contexto en el que se realizan los diversos análisis del análisis didáctico. Organizamos, de nuevo, estos conocimientos de acuerdo con las dimensiones del currículo: matemáticas escolares, aprendizaje, enseñanza y evaluación. Recordemos que cada uno de estos temas surgió como uno de los conocimientos que el profesor pone en juego cuando realiza el análisis didáctico. Vimos que el conocimiento que el profesor tenga y la postura que él asuma con respecto a las matemáticas escolares condiciona la manera como él se aproxima al análisis de contenido. Esta relación también se mantiene entre el aprendizaje y el análisis cognitivo, la enseñanza y el análisis de instrucción, y la evaluación y el análisis de actuación.

Al introducir el análisis didáctico, indicamos que las decisiones que el profesor toma durante la gestión y planificación de clase dependen parcialmente de sus creencias sobre las matemáticas, el aprendizaje, la enseñanza y la evaluación. Es por ello que decimos que el profesor asume una postura con respecto a estos temas cuando realiza el análisis didáctico. La postura que él asuma y la justificación que él pueda dar a esta postura dependerán de su conocimiento de las diferentes teorías que existen sobre cada uno de los temas.

De hecho, estas cuestiones, que Rico (1997b, p. 381) expresa en términos de cuatro preguntas:

> -*¿Qué es, en qué consiste el conocimiento?*
> -*¿Qué es el aprendizaje?*
> -*¿Qué es la enseñanza?*
> -*¿Qué es, en qué consiste el conocimiento útil?,*

permiten establecer las cuatro dimensiones del currículo y relacionan los dos primeros ejes de los conocimientos disciplinares que sirven de referencia al conocimiento didáctico del profesor, la noción de currículo y los fundamentos de las matemáticas escolares.

Organizadores del currículo

Al describir cada uno de los análisis que conforman el análisis didáctico, hemos identificado unos conocimientos que el profesor debe poner en juego en el proceso de planificación y que tienen como referencia unas nociones de la didáctica de la matemática. Con excepción del análisis histórico, que no hemos mencionado aún y que consideraremos en seguida, hemos identificado y ubicado estas nociones en cada uno de los análisis: estructura conceptual, sistemas de representación, análisis fenomenológico y modelos (análisis de contenido), errores, dificultades y obstáculos (análisis cognitivo y análisis de actuación), resolución de problemas, modelización y materiales y recursos (análisis de instrucción). La puesta en juego de estas nociones en el análisis didáctico es específica a la estructura matemática sobre la que se trabaja. Su utilización le permite al profesor identificar, organizar y caracterizar la multiplicidad de significados del tópico que es objeto del discurso matemático en el aula. Utilizamos el término “organizadores del currículo” para referirnos a estas nociones (Rico et al., 1997) y consideramos que son la referencia de “aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas” (p. 45). Si, como lo hemos propuesto antes, el propósito del discurso matemático del aula debe ser el de presentar y compartir socialmente unas normas que ponen en juego una multiplicidad de significados, de tal forma que los escolares tengan una variedad de alternativas para participar en este discurso, entonces los organizadores del currículo juegan un papel central en la identificación de estas normas y de estos significados. Cada organizador del currículo es una herramienta conceptual y metodológica que le ofrece al profesor una perspectiva desde la cual él puede identificar, desarrollar y organizar esos significados de la estructura matemática.

Hemos descrito las principales características de cada uno de los organizadores del currículo, junto con el papel que ellos juegan en la realización del análisis didáctico. Sin embargo, no habíamos mencionado hasta ahora el organizador “historia” porque éste es un organizador transversal que puede ser puesto en juego de diferentes maneras en cada uno de los análisis del análisis didáctico. Por esa razón, lo describimos brevemente aquí. El análisis histórico de una estructura matemática permite analizar y caracterizar la manera como la humanidad ha avanzado a lo largo del tiempo en su aproximación y comprensión de esa estructura matemática. Este tipo de análisis permite por lo tanto caracterizar los conceptos que han sido puestos en juego dentro y en relación con la estructura matemática, la manera como esa estructura matemática se ha representado y las relaciones que se han establecido entre esas representaciones, los fenómenos y problemas de donde han surgido esos conceptos y los modelos relacionados con esa estructura que han permitido resolver esos problemas. Por otro lado, es posible postular que algunas de los errores en los que los escolares incurren y algunas de las dificultades y obstáculos que subyacen a esos errores pueden ser similares a los errores, dificultades y obstáculos que la comunidad matemática enfrentó cuando estaba construyendo su conocimiento sobre el tema. El análisis histórico también permite caracterizar en algunos casos el papel de los materiales y recursos utilizados en el desarrollo del conocimiento sobre la estructura matemática. Es en este sentido, en el que el organizador “historia” es transversal. El análisis histórico provee información que puede contribuir a la puesta en juego de los demás organizadores del currículo. Adicionalmente, la historia como uno de los significados que se pueden construir dentro del discurso del aula, contribuye a la instrucción al permitir reconocer el papel de las matemáticas dentro de la cultura y al motivar a los escolares en el análisis de las matemáticas como una construcción social en permanente evolución.

Relaciones entre los conocimientos

En este apartado organizamos los diferentes tipos de conocimientos de referencia que sustentan el conocimiento didáctico del profesor. También enfatizamos las múltiples relaciones que existen entre ellos. Ubicamos estos conocimientos y relaciones en la Tabla 2 en la que esquematizamos algunas de estas relaciones. La primera casilla muestra los tres ejes de los conocimientos de referencia

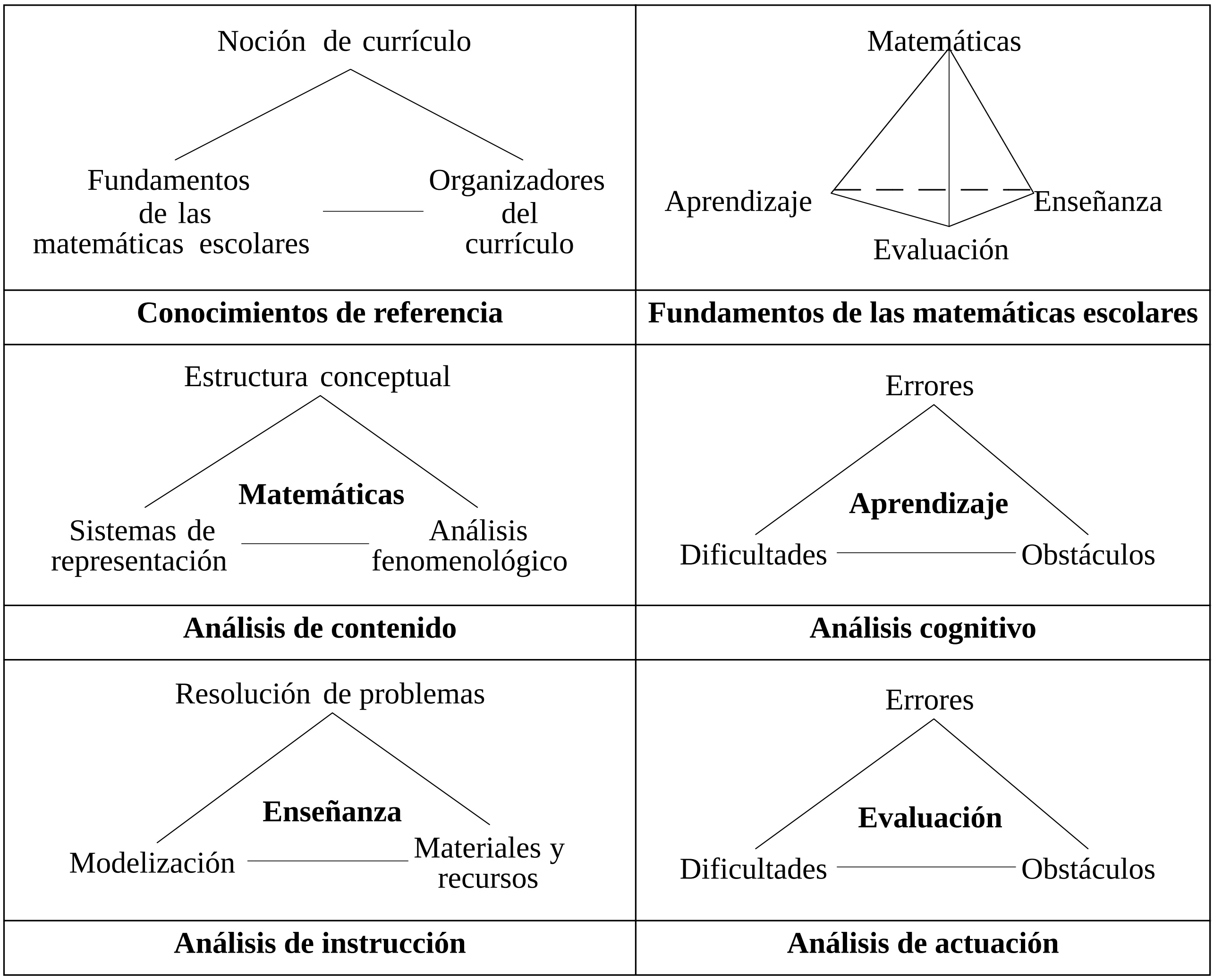

Tabla 2. Conocimientos de referencia para el conocimiento didáctico

y resalta las relaciones entre ellos. En la segunda casilla de la primera fila organizamos los fundamentos de las matemáticas escolares. Las relaciones entres sus componentes han sido descritas en varios lugares de este artículo. En particular, la descripción del análisis didáctico como procedimiento para organizar la enseñanza se ha basado y busca ser coherente con las posturas que asumimos con respecto a las matemáticas escolares y al aprendizaje. Estas posturas sustentan la manera como nos aproximamos a cada uno de los análisis que conforman el análisis didáctico. En las siguientes casillas de la tabla identificamos y estructuramos los organizadores del currículo, relacionándolos con los análisis del análisis didáctico y con los componentes de los fundamentos de las matemáticas escolares. Recordamos que el organizador "historia" se puede poner en juego en todos los análisis.

Las reflexiones anteriores nos permiten caracterizar el conocimiento didáctico como un constructo cognitivo que tiene unos conocimientos disciplinares de referencia (la noción de currículo, los fundamentos de las matemáticas escolares y los organizadores del currículo), tiene una utilidad práctica (el diseño y desarrollo curricular a nivel local), y su puesta en juego se enmarca dentro de una estructura analítica (el análisis didáctico). El profesor necesita construir su conocimiento didáctico sobre estas nociones desde tres perspectivas:

- los significados de estas nociones como elementos de una estructura conceptual de la didáctica de la matemática que permite organizar y describir el currículo de las matemáticas escolares,
- los significados específicos que algunas de estas nociones adquieren (en particular, los organizadores del currículo) cuando se ponen en juego para analizar una estructura matemática específica, y
- sus capacidades para recoger, organizar y estructurar la información que surge de la utilización de estas nociones con el propósito de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje.

A continuación consideramos la manera como el profesor debe poner en juego el conocimiento didáctico al realizar el análisis didáctico.

Puesta en juego del conocimiento didáctico

En la presentación que hicimos del análisis didáctico describimos con cierto detalle la manera como el profesor debe poner en juego cada uno de los componentes del conocimiento didáctico. En este apartado recogemos y organizamos esa información con el propósito de enfatizar el carácter cíclico del procedimiento y resaltar las relaciones entre los diferentes elementos del mismo. La noción de currículo, además de encontrarse en el trasfondo de todo el ciclo, establece el contexto dentro del cual se inicia el análisis didáctico, puesto que el profesor debe recoger, organizar y explicitar la información que determina el currículo de su asignatura en sus diversos niveles. Con base en esta información y en la que produce el análisis de actuación del ciclo anterior, el profesor debe establecer unos contenidos a tratar y unos objetivos que pretender lograr. Hemos visto que el análisis de contenido, al ser el análisis matemático de la estructura matemática sobre la que se trabaja, provee la información inicial para los otros análisis del análisis didáctico. Por lo tanto, el profesor debe comenzar por el análisis de contenido.

La puesta en juego del conocimiento didáctico en el análisis de contenido no es secuencial. El profesor no puede hacer primero una estructura conceptual, para después reflexionar sobre los sistemas de representación y para finalmente realizar el análisis fenomenológico. Estos conocimientos se deben poner en juego de manera simultánea y coordinada, dadas las relaciones que ya hemos establecido entre estos organizadores del currículo. Algo similar sucede en el análisis cognitivo en el que la organización relativa a los errores, las dificultades y los obstáculos se construye simultáneamente. Ya hemos mostrado cómo el profesor debe hacer esta reflexión sobre los significados cognitivos del tópico teniendo como referencia los significados estructurales, representacionales y fenomenológicos producidos en el análisis de contenido. Por el otro lado, en el análisis de instrucción, al delimitar el universo de tareas que pueden conformar las actividades de enseñanza, el profesor pone en juego su conocimiento sobre modelización, resolución de problemas y materiales y recursos, pero también debe utilizar la información producida en los dos análisis anteriores. Finalmente, al diseñar las actividades, el profesor debe coordinar de manera sistemática y coherente el producto de todos los análisis. Por lo tanto, aunque el profesor debe recoger, organizar y, en algunos casos, presentar la información sobre cada uno de los organizadores del currículo de manera secuencial, las relaciones estructurales que hemos establecido entre ellos lo obliga a tenerlos en cuenta simultáneamente y a mantener un esquema de revisión permanente de todos los elementos de esa estructura.

Construcción del conocimiento didáctico en la práctica

Aunque la asignatura a la que se refiere este artículo es una asignatura de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria en la que los futuros profesores no tienen acceso a la práctica, consideramos importante presentar algunas reflexiones sobre la manera como la práctica puede contribuir a la construcción del conocimiento didáctico del profesor (o del futuro profesor). Dentro de nuestra asignatura estas reflexiones son importantes por dos razones. Por un lado, como lo veremos más adelante, en la asignatura nosotros pretendemos simular un proceso de planificación en el que se realizan todas las etapas del análisis didáctico con excepción del análisis de actuación. Por el otro lado, los estudiantes de nuestra asignatura (los futuros profesores) cursan una asignatura paralela en la que tienen la oportunidad de llevar a la práctica en un instituto un diseño curricular producido por ellos. Esto sucede al comienzo del segundo trimestre del curso y los futuros profesores regresan a nuestra asignatura con las reflexiones e inquietudes que surgen naturalmente de esta experiencia. Por lo tanto, nosotros esperamos que, dentro de su misma formación inicial, los futuros profesores construyan una parte del conocimiento didáctico con base en la práctica. En la Figura 7 se identifican dos fuentes de construcción del conocimiento didáctico con las dos flechas que llegan al cuadro 6. Una de estas flechas viene del cuadro 2 que contiene los análisis de contenido, cognitivo y de instrucción. La otra flecha proviene del análisis de actuación (cuadro 5). Vamos considerar ahora estas dos relaciones.

Al realizar los análisis de contenido, cognitivo y de instrucción, el profesor pone en juego su conocimiento didáctico. La complejidad conceptual, cognitiva y didáctica de las estructuras matemáticas sobre las que trabaja implica que los análisis que él produce son siempre parciales y sujetos a mejoras. En muchas ocasiones, él puede reconocer esta deficiencia en sus producciones y buscar solventarla. Esto lo logra haciendo investigación: mejorando su conocimiento sobre las nociones de la didáctica de la matemática en cuestión y desarrollando su capacidad para utilizar esas nociones en el análisis de una estructura matemática específica. Al concentrarse en una estructura matemática específica, su conocimiento también puede cambiar con respecto a esa estructura. Al investigar y revisar la literatura, el profesor descubre nuevos aspectos conceptuales, cognitivos y de instrucción específicos a la estructura matemática. De esta manera, basándose en lo que otros ya han hecho, el profesor avanza en la construcción de su conocimiento didáctico con motivo de la necesidad de resolver un problema práctico.

La construcción del conocimiento didáctico del profesor (o futuro profesor) puede también ser producto de su propia reflexión. Esta reflexión es potenciada por las nociones de la didáctica de la matemática que se ponen en juego. Por ejemplo, cuando el profesor no conoce la noción de sistemas de representación, la descripción que él hace de la estructura matemática tiende a ser una enumeración más o menos estructurada de unas etiquetas que representan conceptos ya sea involucrados en la estructura matemática o relacionados con ella (Gómez, 2001a). Cuando el profesor descubre la noción de sistemas de representación desde una perspectiva general (como noción de la didáctica de la matemática) y la implementa en el análisis de la estructura matemática, su visión de esta estructura (y, por consiguiente, su conocimiento) cambia: él logra describir la estructura matemática de manera más estructurada y detallada. Los sistemas de representación sirven como catalizador de una reestructuración que, partiendo de un conocimiento ya existente, produce un conocimiento más profundo, detallado y estructurado. Esto puede suceder con todos los análisis del análisis didáctico y con la mayoría de las nociones involucradas en ellos. Por ejemplo, el conocimiento del profesor sobre las dificultades de aprendizaje de los estudiantes en relación con una estructura matemática puede cambiar cuando él realiza con suficiente detalle el análisis de contenido de esa estructura matemática.

En el análisis de actuación, el profesor hace una previsión de las actuaciones de los estudiantes y recoge y analiza información sobre estas actuaciones. En la mayoría de los casos, habrá diferencias entre las previsiones y las actuaciones. Estas diferencias pueden llevar al profesor a revisar los supuestos con base en los cuales él formuló sus previsiones, con el propósito de adaptar y acomodar su conocimiento didáctico a la experiencia del salón de clase. Estos procesos de adaptación y acomodación deben surgir de la conciencia del profesor de que su conocimiento didáctico no es compatible con la experiencia. Como lo mencionamos en el párrafo anterior, es posible que en algunas ocasiones el profesor pueda cambiar su conocimiento didáctico a partir de su propia reflexión sobre la experiencia de clase. Sin embargo, aunque la reflexión sobre las diferencias entre sus previsiones acerca de las actuaciones de los estudiantes y las actuaciones mismas pueden hacerlo consciente de deficiencias en su conocimiento didáctico, éste no será necesariamente un estímulo suficiente para reformular su conocimiento didáctico de manera adecuada. En muchas ocasiones, el producto de esta reflexión es el reconocimiento, por parte del profesor, de la necesidad de adaptar su conocimiento didáctico a los conocimientos disciplinares que le sirven de referencia. La reflexión es necesaria para reconocer las deficiencias en el conocimiento didáctico, pero no es la única fuente de soluciones para resolver estas diferencias.

Vemos que el profesor puede construir una parte importante de su conocimiento didáctico con base en la reflexión. Aunque aquí nos estamos refiriendo a la reflexión del profesor en el proceso de realizar el análisis didáctico, no la vemos en el mismo sentido de la "reflexión en la acción" propuesta por Schön (1987):

> *Lo que yo llamo reflexión en la acción es esta capacidad para responder a la sorpresa sobre la marcha a través de la improvisación… Esta reflexión en la acción es tácita y espontánea, se produce frecuentemente sin recurrir al pensamiento y no es una actividad intelectual particular. Pero, en todo caso, involucra la capacidad para darle significado a las sorpresas, volcando el pensamiento sobre sí mismo para pensar de nuevas maneras acerca de los fenómenos y acerca de la manera como nosotros pensamos sobre esos fenómenos.*

La reflexión a la que nos referimos aquí es una reflexión consciente y sistemática que se produce con motivo del deseo del profesor de resolver un problema (el diseño y desarrollo curricular a nivel local) utilizando unas herramientas técnicas (el conocimiento didáctico). Compartimos las opiniones de Lerman (2001) en relación con la práctica reflexiva cuando afirma que "aparece, muy frecuentemente sin elaboración, en muchos trabajos sobre la formación, el desarrollo y cambio de los profesores. Hay tantos artículos que se refieren a profesores y futuros profesores reflexionando sobre sus experiencias, como si la mera evocación de ella fuese suficiente para el aprendizaje" (p. 39). Consideramos que la reflexión del profesor debe ser sistemática, inclusive cuando tiene que reaccionar sobre la marcha a "sorpresas" en el aula. Ya sugerimos que en estos casos el profesor puede realizar un análisis didáctico en el acto, que pone en juego su conocimiento didáctico y que le permite proponer y justificar razonadamente nuevas actividades. Cuando las diferencias entre lo esperado y lo sucedido en clase se perciben con motivo del análisis de actuación, el profesor puede reflexionar no solamente para mejorar su diseño curricular, sino también para adaptar y acomodar su conocimiento didáctico. En este sentido, nuestro interés se centra el conocimiento teórico del profesor: aquel conocimiento que, teniendo como referencia unos conocimientos disciplinares, le sirve para realizar el análisis didáctico. La construcción y el desarrollo de este conocimiento teórico puede estar motivado por la reflexión que surge de sus experiencias en la práctica.

Concluimos de esta manera nuestras reflexiones sobre el conocimiento didáctico. Pasamos ahora a la penúltima de las cuestiones que sustentan el diseño de nuestra asignatura: el aprendizaje del profesor dentro de un plan de formación inicial.

APRENDIZAJE DEL FUTURO PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Todo plan de formación inicial de profesores de matemáticas debe asumir una posición acerca de cómo los futuros profesores construyen su conocimiento didáctico. Utilizamos el término "aprendizaje del futuro profesor" para designar "esos múltiples caminos en los que el [futuro profesor] aprende potencialmente diferentes maneras de ser profesor" (Lerman, 2001, p. 34). De la misma manera que lo hicimos para el aprendizaje de los escolares, nuestra posición con respecto al aprendizaje del futuro profesor se basa en una relación complementaria entre el constructivismo social desde la perspectiva cognitiva, por un lado, y las teorías socioculturales, por el otro. Ya presentamos las principales ideas del constructivismo social como teoría del aprendizaje, cuando consideramos el aprendizaje de los escolares. Aquí daremos más énfasis a una visión sociocultural del aprendizaje del futuro profesor.

Compartimos con Lerman (2001) su preocupación por conceptualizar la formación inicial de profesores desde perspectivas que tengan en cuenta la complejidad de las prácticas sociales que se encuentran involucradas tanto en la formación de los futuros profesores, como en su futura práctica docente. Por esta razón, nos inclinamos a enfatizar el proceso de aprendizaje como transformación de la participación en las prácticas de una comunidad, en cambio de restringirlo a un proceso de aprendizaje de profesores individuales que se transforman (Stein y Brown, 1997). En todo caso, el constructivismo social, como perspectiva psicológica del aprendizaje, sigue siendo importante cuando consideramos a profesores individuales que aprenden dentro de contextos estructurados.

La aproximación sociocultural tiene las siguientes características: 1) se focaliza en los grupos o comunidades más que en los individuos que participan; 2) ve el aprendizaje como algo que sucede entre personas cuando se involucran en actividades comunes; 3) considera que los individuos construyen socialmente nuevas formas de significados y comprensión en un proceso de aprendizaje que surge de y crea prácticas situadas (o contextos) a las que ellos traen diversas perspectivas y niveles de habilidad; y 4) su atención se centra en "las interacciones colaborativas que ocurren cuando los profesores intentan desarrollar y mejorar su práctica" (Stein y Brown, 1997, p. 159).

> *Al considerar una comunidad de práctica como un grupo de individuos que comparten comprensiones acerca de lo que están haciendo y de lo que esto significa para sus vidas y sus comunidades, Stein y Brown ven el aprendizaje como un aspecto integral e inseparable de la práctica social. "Desde esta perspectiva del aprendizaje, el cambio profesoral se debe entender en relación con las comunidades de práctica en las cuales los profesores participan. La exploración del proceso de cambio del profesor involucra por lo tanto la identificación de los propósitos, valores y prácticas de trabajo de la comunidad, junto con el seguimiento de las trayectorias de los recién llegados en la medida que se mueven desde la periferia hacia formas más completas de participación en las prácticas de trabajo de la comunidad"* (p. 164). *"La mayor parte de lo que cons-*

tituye aprendizaje consiste en la negociación de metas, significados y motivaciones entre los individuos que comienzan su trabajo juntos con agendas y expectativas diferentes. Por lo tanto, se le da importancia a la comprensión de las metas de las interacciones colaborativas (tanto iniciales, como emergentes), al significado que los individuos le dan a sus acciones y a lo que los motivó para involucrarse inicialmente en la interacción" (p. 187).

En nuestra asignatura, vemos al futuro profesor como miembro de la comunidad de educadores matemáticos y como futuro miembro de una comunidad de práctica dentro de su centro educativo. Imaginamos su trabajo en el centro como un trabajo en equipo en el que, junto con sus colegas, diseña y desarrolla el currículo de matemáticas, por un lado, y avanza continuamente en la construcción de su conocimiento didáctico, al negociar con ellos las normas que regulan su práctica y al reflexionar sistemáticamente sobre su experiencia, por el otro. Desde la perspectiva de su formación en la asignatura, concebimos el trabajo de los futuros profesores como un proceso en el que ellos, como individuos y como grupos, avanzan en su participación en una comunidad de práctica del aula. Las prácticas de esta comunidad del aula se centran en la negociación de los múltiples significados del conocimiento didáctico y de su puesta en juego en el diseño y desarrollo curricular. Nosotros, los formadores, asumimos la posición de miembros expertos de esa comunidad y pretendemos apoyar a los futuros profesores para que desarrollen formas cada vez más técnicas y estructuradas de participar en las prácticas de trabajo que se promueven dentro de la asignatura. Para ello, organizamos el trabajo alrededor de dos comunidades de práctica: la práctica en pequeños grupos que enfocan su trabajo en una estructura matemática particular; y el trabajo en el aula, en la que se comparte y discute el fruto del trabajo de los grupos con el propósito construir socialmente aquellos significados que se consideran válidos y útiles. Describiremos con algún detalle el funcionamiento de estas comunidades de práctica cuando presentemos el apartado de metodología del diseño curricular de la asignatura.

FUNDAMENTOS PARA EL DISEÑO DE UN PLAN DE FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

En la primera parte de este artículo formulamos una serie de cuestiones que deben resolverse cuando se diseña un plan de formación inicial de profesores de matemáticas. Sugerimos que este diseño debe abordarse desde una perspectiva en la que:

a) se asuma una posición con respecto a las matemáticas escolares;
b) se asuma una posición con respecto a la manera como los escolares construyen su conocimiento matemático;
c) se proponga una descripción cómo el profesor debe aportar a la construcción de ese conocimiento por parte de sus estudiantes;
d) se identifiquen los conocimientos que el profesor debe poner en juego para lograr lo anterior;
e) se asuma una posición con respecto a los procesos mediante los cuales el

profesor construye esos conocimientos; y

f) se tenga en cuenta el contexto social, cultural, institucional y personal del plan de formación inicial de los profesores.

Hasta ahora hemos abordado las primeras cinco cuestiones. Hemos asumido una posición de constructivismo social con respecto a las matemáticas escolares. Nos apoyamos en una visión del aprendizaje de los escolares en la que se complementan las teorías del constructivismo social y las teorías socioculturales del aprendizaje, visión que es coherente con nuestra posición acerca de las matemáticas escolares. El análisis didáctico es nuestra propuesta para describir la manera como creemos que el profesor debe contribuir a la construcción del conocimiento de los escolares. Este procedimiento es coherente con y se basa en nuestras posturas acerca de las matemáticas escolares y el aprendizaje. Definimos el conocimiento didáctico como el conocimiento que el profesor debe poner en juego cuando realiza el análisis didáctico e identificamos los conocimientos disciplinares que le sirven de referencia, la manera como el profesor debe poner en juego ese conocimiento en la práctica, y el papel de esa práctica en la construcción del conocimiento didáctico. Finalmente, asumimos una postura con respecto al aprendizaje del futuro profesor dentro de un plan de formación que, siendo coherente con los parámetros generales de las teorías constructivistas, centra su atención en el aprendizaje como proceso en virtud del cual los futuros profesores progresan como participantes de unas comunidades de práctica. Estos son los fundamentos en los que se basa nuestra asignatura. Sin embargo, además de ser coherente con estos fundamentos, el diseño y desarrollo curricular de la asignatura debe satisfacer las condiciones que impone el contexto social, cultural, institucional y personal en el que tiene lugar. A continuación describimos ese contexto.

CONTEXTO DENTRO DEL QUE TIENE LUGAR LA ASIGNATURA

Los futuros profesores que participan en nuestra asignatura han optado por la rama de Metodología dentro de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Granada. En Gómez, Cañadas y Peñas (2002) describimos de la siguiente manera el contexto en el que tiene lugar la asignatura (pp. 475-476):

> *La gran mayoría de los estudiantes que desean hacer estudios superiores entran en la universidad española. La titulación que un estudiante escoge depende de su puntuación en el examen de estado (la selectividad) y de la puntuación mínima requerida en las diferentes titulaciones. Esta puntuación mínima depende de la cupos disponibles en la titulación y de la demanda que se tiene por esos cupos. En la actualidad, de 600 estudiantes que entran a la universidad en primer año, se gradúan 150 al final: la selección de los estudiantes se hace dentro de la universidad. Aún así, la universidad produce en la actualidad más profesionales de los que el mercado de trabajo puede absorber. Para poder convertirse en profesor de matemáticas de secundaria, el licenciado en matemáticas debe aprobar otra serie de exámenes, conocidos como las "oposiciones". Dado que en la actualidad hay más de veinte candidatos*

para cada plaza disponible, el licenciado debe prepararse durante por lo menos dos o tres años adicionales para llegar a tener éxito en las oposiciones.

Éste no es el lugar para reflexionar sobre la manera como se ha desarrollado la cultura académica (desde la perspectiva de la enseñanza) en la Universidad de Granada y, en particular, en sus Departamentos de Matemáticas. No obstante, consideramos importante hacer una descripción estereotipada de algunas de sus características. Los exámenes son un elemento central del sistema educativo español. Hay pocos exámenes y en ellos el estudiante se juega su futuro. Algo similar sucede dentro de la universidad: en la mayoría de los casos, el estudiante aprueba una asignatura si tiene éxito en uno o dos exámenes. Él prepara intensamente los exámenes algunos días antes de los mismos y en el intermedio hace ejercicios y "pasa los apuntes", revisando lo que ha anotado en clase y produciendo, en algunas ocasiones, un nueva versión. Estos apuntes son las notas que él ha recogido en las clases de la asignatura a partir del discurso magistral del profesor. Entre los estudiantes existe una cultura de temor a la intervención, producto del "miedo al ridículo", tanto ante el profesor, como ante los propios compañeros. No hay libro de texto y hay poca interacción por fuera del aula entre el profesor y el estudiante.

La formación inicial de profesores de matemáticas tiene lugar dentro del contexto anterior. Al entrar al cuarto curso, los estudiantes deben escoger una de tres posibles ramas: Fundamental, Estadística o Metodología. La primera pretende formar matemáticos puros, la segunda matemáticos que puedan desempeñarse en las empresas y la tercera profesores de matemáticas de secundaria. En la rama de Metodología, los estudiantes deben cursar tres asignaturas relacionadas con educación: Supuestos de la Educación, Práctica de la Educación Matemática y Didáctica de la Matemática en el Bachillerato, siendo esta última el objeto de este artículo. En la asignatura de prácticas, se busca que los futuros profesores reflexionen sobre la práctica docente al planificar, realizar y evaluar un período de prácticas en un instituto. De esta manera se espera que los alumnos desarrollen destrezas de observación, análisis y preparación de clases (Flores, 2000).

En este mismo estudio mostramos que los futuros profesores que cursan la asignatura llegan a ella con metas, motivaciones, intereses e inquietudes diferentes. Por ejemplo, algunos de ellos decidieron estudiar matemáticas como una segunda alternativa, al no poder acceder a la carrera de su predilección. En otros casos, los futuros profesores se encuentran en la rama de Metodología, aunque llegar a ser profesor de matemáticas de secundaria no es su primera opción profesional. La mayoría de ellos se sienten cómodos con sus conocimientos matemáticos, aunque algunos no confían en su capacidad para gestionar una clase de secundaria. Por otra parte, una proporción importante de estos futuros profesores tienen experiencia docente, ya sea en clases particulares o en academias, y esta experiencia contribuye a las "intuiciones didácticas" con las que llegan a la asignatura (Gómez, 2001b).

Con la descripción que acabamos de hacer del contexto en el que tiene lugar la asignatura objeto de este artículo terminamos el análisis de las cuestiones que deben fundamentar el diseño de un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. A continuación describimos la asignatura y mostramos cómo nuestra posición con respecto a estas cuestiones sustenta su diseño.

ASIGNATURA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA EN EL BACHILLERATO

La finalidad de la asignatura es la de contribuir a la iniciación de la formación del futuro profesor de matemáticas mediante la didáctica de la matemática. Los estudiantes de la asignatura (que hemos llamado y seguiremos llamando futuros profesores) cursan quinto curso de la Licenciatura de Matemáticas y han optado por la rama de Metodología. Describiremos a continuación el diseño de la asignatura presentando los rasgos más importantes de sus objetivos, contenidos, metodología y evaluación.

Objetivos

Buscamos contribuir a la formación del futuro profesor en dos dimensiones: el inicio de su participación en las prácticas de la comunidad de educadores matemáticos y el desarrollo de los conocimientos y capacidades necesarias para la planificación de unidades didácticas. Desde la perspectiva de su contacto con la comunidad de educación matemática, buscamos que los futuros profesores conozcan los antecedentes, los fundamentos y el desarrollo del currículo actual de matemáticas para la Educación Secundaria en España, teniendo en cuenta la historia del progreso de las matemáticas y de la educación matemática en el país y el contexto legal que regula ese currículo. Por otra parte, pretendemos que el futuro profesor se inicie en las prácticas de las comunidades de innovación e investigación en didáctica de la matemática.

Al considerar que la asignatura, como esquema de formación en los procesos de planificación de unidades didácticas, es también una comunidad de práctica, buscamos que los futuros profesores desarrollen su capacidad de participación en ella, a través de la construcción de los conocimientos y capacidades necesarios para realizar el análisis didáctico. Centramos estos conocimientos y capacidades en el conocimiento didáctico: la construcción social de significados sobre la noción currículo, sobre los fundamentos de las matemáticas escolares y sobre los organizadores del currículo. Pretendemos que se negocien y consoliden tanto significados generales de estas nociones, como sus significados específicos a estructuras matemáticas particulares.

Contenidos

La asignatura se inicia con un análisis y reflexión sobre la historia de las matemáticas y de la educación matemática en España, que sirve de contexto para la discusión sobre los antecedentes del currículo de matemáticas en el país. Los demás contenidos de la asignatura se organizan de acuerdo con los esquemas presentados en la Tabla 2. La noción de currículo es la idea de base sobre la que se apoyan la mayor parte de los contenidos. Se discute sobre los fines de la educación matemática y se reflexiona sobre los niveles y dimensiones del currículo. Con esta referencia conceptual, se analizan algunos estudios y proyectos curriculares españoles e internacionales, se reflexiona sobre los antecedentes del currículo de matemáticas en España, y se estudia la organización general, los niveles de concreción y los contenidos del currículo de matemáticas para secundaria que se encuentra en vigor en la actualidad.

El tratamiento de los fundamentos de las matemáticas escolares surge de la consideración de la noción de currículo. Se analizan y discuten diversas posiciones acerca de las matemáticas como disciplina, de las matemáticas escolares, del aprendizaje y de la evaluación. La reflexión sobre la enseñanza se vuelve permanente una vez que se comienza a trabajar sobre las diferentes fases del análisis didáctico.

Además de incluir los fundamentos de las matemáticas escolares, el análisis didáctico se basa conceptualmente en los organizadores del currículo, tal y como lo describimos esquemáticamente en la Tabla 2. Se considera un análisis conceptual general de cada uno de los organizadores del currículo, pero también se estudian las maneras como estas nociones adquieren significados específicos cuando se utilizan para analizar estructuras matemáticas particulares. La asignatura tiene por lo tanto un contenido matemático específico que se manifiesta en las estructuras matemáticas para las que se realiza el análisis didáctico. La función lineal, el teorema de Tales, la esfera, los números decimales y la simetría son ejemplos de tópicos específicos de las matemáticas de secundaria en los que se puede trabajar dentro de la asignatura.

Metodología

La metodología que se utiliza en la asignatura se puede organizar en tres esquemas. El primero se refiere a la negociación de significados sociales sobre nociones *generales* de la didáctica de la matemática. Éste es el caso, por ejemplo, de la noción de currículo. Los futuros profesores, individualmente o en pequeños grupos establecidos desde el comienzo de la asignatura, leen documentos de referencia y preparan trabajos escritos y presentaciones de resumen y análisis de estos documentos. Con base en estas presentaciones se realizan discusiones en clase en las que, con la guía de los formadores, se busca que los futuros profesores progresen en su construcción de los significados técnicos de esas nociones. En algunos casos, los formadores organizan y presentan la información relevante al tema, como medio para establecer esos significados técnicos y marcar pautas sobre las normas que rigen ese discurso. En algunas ocasiones, estas normas (significados) surgen de los futuros profesores a partir de sus "intuiciones didácticas". En esos casos, se pide a los futuros profesores que reflexionen sobre una noción o un problema y que individualmente propongan una descripción de la noción o una solución al problema. En seguida se les induce a que, en pequeños grupos, comparen las propuestas, identifiquen diferencias y similitudes, negocien esos significados y busquen un consenso. Finalmente, cada grupo presenta su descripción o solución y estas propuestas se discuten entre todos con el propósito consolidar significados sociales que describan la noción o aporten soluciones al problema original.

El segundo esquema metodológico general se utiliza de manera sistemática en la "simulación" del proceso de planificación de una unidad didáctica.

Cada grupo de futuros profesores escoge un tópico matemático sobre el que realiza el análisis didáctico y diseña una unidad didáctica. El esquema es cíclico. Cada ciclo corresponde a un organizador del currículo. El orden secuencial en el que se tratan los organizadores del currículo sigue los esquemas presentados en la Tabla 2, comenzando por el vértice superior de cada triángulo, continuando con el vértice izquierdo y terminando en el vértice derecho. Por ejemplo, el análisis de contenido comienza con el tratamiento de la estructura conceptual, sigue con la puesta en juego de los sistemas de representación y finaliza con la consideración de los modelos y el análisis fenomenológico (ver Figura 15).

La Figura 20 presenta el esquema básico de un ciclo del esquema metodológico que utilizamos. El ciclo parte de la discusión con la que finaliza el ciclo

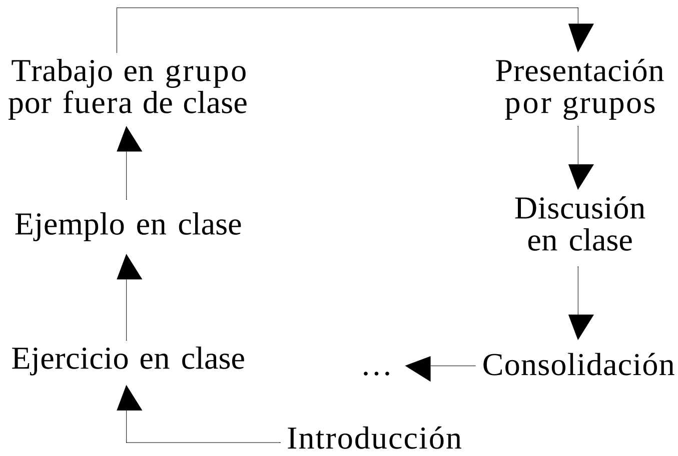

Figura 20. Ciclo metodológico de tratamiento del análisis didáctico

anterior. En general, esta discusión (por ejemplo, sobre los sistemas de representación) da lugar a la introducción de una nueva noción (por ejemplo, la noción de modelo). A partir de esta introducción, proponemos un ejercicio en clase, que consiste en la utilización de dicha noción a una estructura matemática predeterminada o a la estructura matemática en la que cada grupo está trabajando. Los grupos presentan sus propuestas y se discuten posibles significados de la noción en su aplicación práctica. A continuación, los formadores presentamos un ejemplo de la utilización de la noción a una estructura matemática específica (diferente de las que tienen asignadas los grupos) y les pedimos que, para la siguiente sesión de clase, pongan en juego esta noción (y las que se han considerado hasta ese momento) a su estructura matemática. En la siguiente sesión, cada grupo presenta los resultados de su trabajo al resto de la clase. Compañeros y profesores comentan y critican cada presentación. Al final, los formadores promueven una discusión en la que buscan formular preguntas y actividades que aborden los errores y dificultades detectados en las presentaciones. En algunas ocasiones, los formadores sugieren aspectos del significado técnico de la noción con la que se está trabajando. El final del ciclo tiene dos partes. Por un lado, los formadores parten de la discusión anterior para motivar la introducción de una nueva noción. Por el otro, uno de los formadores revisa cada una de las producciones y produce un documento con sus comentarios y sugerencias. Los futuros profesores reciben ese documento durante la siguiente sesión.

Cuando queremos abordar errores o dificultades específicos para los que percibimos que hay una diversidad de posibles posturas por parte de los futuros profesores, utilizamos una variación del esquema que acabamos de presentar. Denominamos a este esquema “subjetivo - intersubjetivo - objetivo”, para referirnos a los tipos de conocimientos que se movilizan y a la manera como estos conocimientos se relacionan entre sí. Se trata de un ejercicio en el que formulamos una pregunta o un problema y pedimos a los futuros profesores que reflexionen individualmente sobre esa pregunta o ese problema. Con base en el resultado de esas reflexiones, les sugerimos que trabajen en grupo, comparen sus posturas individuales y busquen llegar a una posición consensuada que después presentan al resto de la clase. Una vez presentadas estas propuestas, los formadores buscamos promover una discusión en clase con el propósito de comparar los diferentes significados propuestos, abordar los errores y dificultades que se pueden percibir a partir de ellos, y promover la consolidación de un significado social que se aproxime al significado técnico que sugiere el conocimiento disciplinar de referencia.

Estos esquemas buscan simular nuestra visión de lo que debería ser la participación del futuro profesor en el trabajo de la institución educativa. Para ello, buscamos convertir el aula en el espacio en el que se conforma y evoluciona una comunidad de práctica que tiene identificados unos problemas que quiere resolver y unas herramientas conceptuales y metodológicas (las nociones que conforman el conocimiento didáctico) para abordarlos. El discurso del aula gira alrededor de los significados de estas nociones, tanto desde un punto de vista conceptual, como desde la perspectiva de su utilización en la resolución de un problema práctico (el diseño de una unidad didáctica). Buscamos, como formadores, motivar y guiar el progreso de los futuros profesores en su participación en las prácticas de esta comunidad, a través de la negociación de las normas que rigen el discurso y que determinan los significados que se construyen socialmente en el aula.

Podemos identificar dos comunidades de práctica. Estas comunidades se han hecho explícitas en los esquemas presentados más arriba. El trabajo en grupos de 3 a 5 futuros profesores es una comunidad de práctica en la que cada futuro profesor aporta sus metas, significados y motivaciones a la resolución de un problema común. Los miembros del grupo deben negociar sus diferentes posturas con el propósito de llegar a una solución común que es presentada al resto de la clase y es comparada con las soluciones de los otros grupos. Como formadores, nosotros esperamos que el interés por pertenecer y representar activamente al grupo motive a cada futuro profesor a progresar en su participación en esta negociación que, partiendo de unos significados individuales, busca construir unos significados sociales. Por el otro lado, promovemos también la comunidad de práctica del aula en la que los futuros profesores, ya sea como individuos o como miembros de un grupo, presentan y defienden sus posturas y critican las propuestas de los demás. En esta negociación de significados sociales, que va determinando las normas que regulan el discurso del aula, nosotros proponemos situaciones y problemas que buscan explicitar las dificultades de grupos e individuos y que buscan aproximar esos significados sociales a los significados técnicos que surgen de los conocimientos disciplinares de referencia.

Evaluación

Cuando miramos el aula como una comunidad de práctica y consideramos el aprendizaje como el progreso en la participación en esa comunidad, la evaluación se expresa como un componente curricular que está presente permanentemente en todos los aspectos del proceso de formación. Al aceptar que hay un problema común que se busca resolver y que hay herramientas conceptuales y metodológicas que permiten abordarlo, y al compartir sus producciones con el resto de la clase y negociar los significados sociales que rigen el discurso del aula, individuos y grupos pueden reconocer las cualidades y deficiencias de sus contribuciones. El discurso del aula gira alrededor de los significados que individuos y grupos movilizan para resolver los problemas. Por lo tanto, estos significados se encuentran permanentemente evaluados, comentados y criticados. Esta evaluación tiene lugar en las dos comunidades de práctica. Como formadores, guiamos el discurso del aula para resaltar los logros y las deficiencias de las contribuciones propuestas, teniendo en cuenta los conocimientos disciplinares que sirven de referencia al conocimiento didáctico. Por otra parte, para cada producción escrita de los futuros profesores (documento o transparencia de una presentación) producimos un documento en el que formulamos nuestros comentarios, críticas y sugerencias.

La valoración del trabajo de los futuros profesores es el resultado de la valoración de todas sus producciones y de la apreciación de los formadores de la manera como cada futuro profesor progresa en su participación en la comunidad de práctica del aula. Damos especial atención al trabajo y la presentación final en la que cada grupo presenta y justifica el diseño de la unidad didáctica en su tópico.

RELACIÓN ENTRE LA FUNDAMENTACIÓN Y EL DISEÑO

En este apartado establecemos la relación entre el diseño de nuestra asignatura y los fundamentos sobre los que ella se sustenta. El análisis didáctico, como procedimiento que describe los modos en que el profesor debe manejar la complejidad de las matemáticas escolares, se encuentra en el centro de la reflexión. Por un lado, nuestra propuesta para el análisis didáctico surge de una visión, basada en el constructivismo social, tanto de las matemáticas escolares, como del aprendizaje en el aula. De acuerdo con esta visión, el conocimiento matemático escolar es una construcción social que tiene lugar dentro de un comunidad de práctica en la que los escolares participan progresivamente en un discurso que se rige por una multiplicidad de significados. Se parte de los significados que cada estudiante aporta al discurso y que dan origen a la construcción de los significados sociales que, a su vez, condicionan la construcción de los significados individuales. Este proceso de construcción surge de los desequilibrios que individuos y grupos perciben cuando comparan el resultado de su experiencia con sus expectativas.

El papel del profesor es entonces el de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje en las que los escolares pongan en juego sus significados individuales, para participar en un discurso en el que se negocian unas normas que atienden a la complejidad y variedad de los significados de las matemáticas escolares. El análisis didáctico, como lo hemos descrito en detalle en este artículo, es el procedimiento que le permite al profesor analizar el contenido matemático, organizar los aspectos cognitivos relacionados con ese contenido y determinar el universo de tareas posibles, para efectos de seleccionar sistemática y justificadamente aquellas tareas que conformarán las actividades de enseñanza y aprendizaje.

El conocimiento didáctico es el conocimiento que el profesor pone en juego cuando realiza el análisis didáctico. Este conocimiento tiene unos conocimientos disciplinares de referencia que hemos estructurados en tres ejes: la noción de currículo, los fundamentos de las matemáticas escolares y los organizadores del currículo. La descripción técnica de estos conocimientos de referencia y la manera como se espera que se pongan en juego al realizar el análisis didáctico, nos permite identificar y fundamentar los contenidos y los objetivos de nuestra asignatura. Por otra parte, la reflexión sobre la manera como el profesor construye el conocimiento didáctico en la práctica y nuestra postura sociocultural con respecto al aprendizaje de los futuros profesores establecen las bases sobre las que diseñamos los esquemas metodológicos y de evaluación. En este sentido, al postular el aprendizaje como un proceso de participación en unas comunidades de práctica, proponemos actividades que buscan incentivar la construcción de las normas que rigen el discurso de esa comunidad y que pretenden simular, al menos parcialmente, la participación del futuro profesor en su comunidad de práctica en el centro educativo. Representamos estas relaciones en el esquema de la Figura 21. Estas relaciones establecen la manera como nuestra posición con respecto a los fundamentos de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria sustenta el diseño de nuestra asignatura.

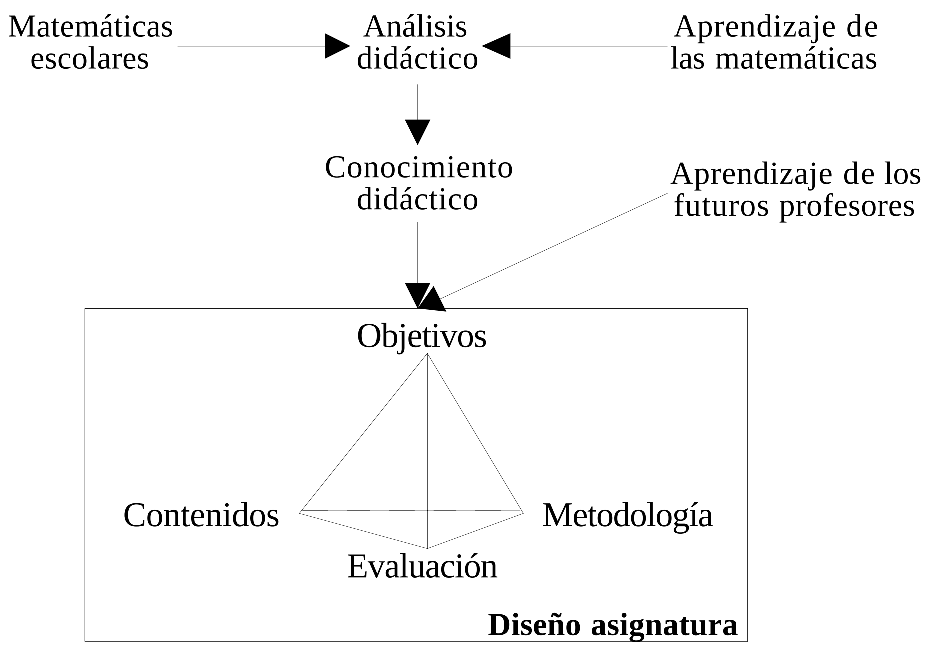

Figura 21. Relación entre fundamentos y diseño

DISCUSIÓN

En este último apartado discutimos algunos aspectos adicionales de la fundamentación y el diseño de la asignatura que hemos descrito en este artículo. Nuestro propósito es profundizar en algunos puntos que no consideramos en el cuerpo del documento. Comenzamos reflexionando sobre la complejidad de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria y sobre la necesidad de incluir la práctica en este tipo de planes de formación. Consideramos en seguida algunos aspectos prácticos del análisis didáctico y discutimos sobre la dualidad entre el conocimiento teórico y el conocimiento práctico para el caso del conocimiento didáctico. Después exploramos la relación entre el análisis didáctico y los diferentes tipos de tópicos que componen las matemáticas escolares. Finalmente, ubicamos las reflexiones de este artículo en el contexto general de los análisis de planes de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria y establecemos una relación entre el conocimiento pedagógico de contenido y el conocimiento didáctico.

Complejidad de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria

Este artículo pone en evidencia la complejidad de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En el caso del diseño de nuestra asignatura, esta complejidad se manifiesta en la estructura de los contenidos a tratar, en la metodología que se pone en juego, en los objetivos que se quieren lograr y en la forma en que se hace el seguimiento del logro de estos objetivos. Hemos sustentado este diseño en una posición sobre cómo los futuros profesores construyen el conocimiento didáctico dentro de un plan de formación inicial y en la estructura del conocimiento didáctico. Esta estructura viene determinada por la configuración y el funcionamiento del análisis didáctico. El análisis didáctico tiene como propósito central contribuir a la construcción del conocimiento matemático de los escolares y se fundamenta en una posición sobre las matemáticas escolares y su aprendizaje (Figura 21). Por lo tanto, la complejidad de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria es una consecuencia natural de la complejidad de las matemáticas escolares, de su enseñanza y de su aprendizaje. Esta complejidad contradice la simplificación que se encuentra implícita en aquellos argumentos que sugieren que para ser buen profesor de matemáticas basta con tener suficientes conocimientos de la disciplina y algunos conocimientos de pedagogía general.

Los futuros profesores que cursan nuestra asignatura no tienen experiencia docente, diferente de aquella que construyen en clases particulares, en trabajos en academias o en la puesta en práctica de un diseño curricular en un instituto, bajo la tutela de un profesor, como parte de sus actividades en la asignatura paralela a la nuestra. Al tener tan poca experiencia docente, ellos tienen una visión parcial de la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la escuela, que no les permite, en un comienzo, valorar y dar significado a muchos aspectos de la asignatura. Por ejemplo, mientras que la asignatura centra su atención en el desarrollo del conocimiento didáctico, como conocimiento técnico específico a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, la principal preocupación de la mayoría de los futuros profesores se enfoca inicialmente en la gestión de la clase, el manejo de la disciplina y la motivación de sus alumnos. Estas diferencias entre las preocupaciones del futuro profesor y las prioridades de la asignatura son propias de los planes de formación inicial y contribuyen a su complejidad. Cuando se trabaja con profesores experimentados en planes de formación permanente se encuentra un mayor consenso sobre la importancia y el significado de los problemas que se quieren abordar y resolver.

Las nociones que componen el conocimiento didáctico tienen carácter práctico. Deben servirle al profesor para analizar y estructurar la multiplicidad de significados del contenido matemático. Por lo tanto, su enseñanza no puede basarse en la presentación magistral de sus significados técnicos, junto con la discusión de algunos ejemplos. La construcción del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria requiere de otros tipos de esquemas metodológicos.

> *Las nociones de la didáctica de la matemática son nociones complejas. Su comprensión y puesta en práctica por parte de futuros profesores que tienen una experiencia didáctica reducida es un proceso lento que pasa por diversas fases en las que se pueden encontrar obstáculos difíciles de superar. Los alumnos no superan estos obstáculos si lo único que se les ofrece es la definición de estas nociones y algunos ejemplos de las mismas. Ellos tienen que vivir experiencias en las que pongan en práctica sus significados parciales y puedan comparar sus producciones con las de sus compañeros y recibir críticas a sus trabajos* (Gómez, 2001a, p. 176).

Puesto que la asignatura no puede contemplar una actividad de práctica en el aula, la puesta en juego de las nociones tiene lugar en el ámbito de la simulación de una actividad de planificación. En esta simulación, los futuros profesores progresan en la construcción de los significados de estas nociones al movilizar sus “intuiciones didácticas”, investigar en la literatura, discutir sistemática y razonadamente sobre las opiniones y las producciones de los demás, y reflexionar sobre los errores y las dificultades propios. Estas discusiones y reflexiones se organizan alrededor de un problema común: la búsqueda de un consenso que permita abordar los problemas didácticos propuestos.

No obstante, todo plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria debería idealmente contener en su diseño una práctica en el aula. Un plan de este tipo incluiría todos los elementos que hemos descrito para nuestra asignatura. Adicionalmente, este plan ideal incluiría dos fases complementarias. Una vez que los futuros profesores han terminado el diseño de la unidad didáctica, lo han presentado y discutido con los formadores y compañeros y lo han corregido con motivo de esa discusión, cada grupo de futuros profesores llevaría a la práctica ese diseño en un instituto. Algunos miembros del grupo actuarían como profesores y los otros como observadores. Se podría entonces realizar el análisis de actuación como última fase del ciclo del análisis didáctico. Adicionalmente, el análisis de lo sucedido en el aula le permitiría a cada grupo reflexionar sobre su diseño original y encontrar los caminos para mejorarlo de manera justificada empíricamente. Un proceso de este tipo complementaría el desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores. Desafortunadamente, el contexto en el que tiene lugar nuestra asignatura no permite este tipo de diseño.

Teoría y práctica del conocimiento didáctico

Hemos reiterado a lo largo de este artículo el carácter ideal del análisis didáctico como descripción del procedimiento que el profesor debería seguir para diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Desde la perspectiva del diseño curricular de nuestra asignatura, el análisis didáctico ha servido como referencia para identificar los elementos y relaciones que componen el conocimiento didáctico y, por consiguiente, para determinar los objetivos y los contenidos de este plan de formación. Pero no suponemos que, para cada unidad didáctica que tenga que planificar y para cada hora de clase que tenga que dictar, el profesor deba realizar y documentar en profundidad cada paso y cada fase del análisis didáctico. El análisis didáctico y las nociones que componen el conocimiento didáctico son herramientas útiles en muchas circunstancias de la actividad docente del profesor de matemáticas, puesto que pueden utilizarse como instrumentos de análisis y reflexión. Cuando discutimos sobre lo que denominamos el análisis didáctico "sobre la marcha", mostramos que el profesor puede utilizar estas herramientas, dentro y fuera del aula, con la profundidad y el detalle que le permiten el tiempo y los recursos disponibles. Por otro lado, el análisis didáctico y el conocimiento didáctico son también herramientas de análisis y evaluación de diseños curriculares existentes. Con estos instrumentos, el profesor puede examinar esos diseños, decidir su utilidad y determinar estrategias para mejorarlos y adaptarlos de acuerdo con sus propósitos y necesidades. Por lo tanto, la utilización sistemática del análisis didáctico, a cualquier nivel de detalle, puede contribuir permanentemente a la comprensión de los problemas didácticos que enfrenta el profesor y a su conciencia de la complejidad del conocimiento matemático escolar, de su aprendizaje en el aula y de la planificación de la actividad docente.

El conocimiento didáctico es un conocimiento teórico que tiene como referente directo la práctica docente (el análisis didáctico). Hemos mostrado cómo el conocimiento didáctico se puede construir en la práctica y cómo la reflexión puede jugar un papel en esa construcción. Teniendo en cuenta que los conocimientos disciplinares de referencia se encuentran siempre en el contexto y sirven para organizar y potenciar su desarrollo, el conocimiento didáctico es un conocimiento teórico que se construye con base en y con referencia a la práctica. Esta relación simbiótica entre el conocimiento disciplinar, el conocimiento didáctico y la práctica docente hace desvanecer la dualidad entre el conocimiento teórico y el conocimiento práctico del profesor de matemáticas. En muchos casos, esta aparente dualidad tiene que ver, más bien, con la distinción entre un conocimiento didáctico específico a las matemáticas y un conocimiento pedagógico general.

El término conocimiento didáctico identifica, en este artículo, aquellos conocimientos técnicos que el profesor pone en juego cuando realiza el análisis didáctico. Hemos visto que estos conocimientos técnicos se refieren a una multiplicidad de nociones de la didáctica de la matemática que hemos estructurado en tres ejes: la noción de currículo, los fundamentos de las matemáticas escolares y los organizadores del currículo. Sin embargo, también hemos mostrado que, en la práctica, cuando el profesor realiza el análisis didáctico, estos conocimientos se ponen en juego de manera conjunta y simultánea. Por lo tanto, no apreciamos particularmente los beneficios de clasificar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas en taxonomías que establecen diferentes tipos de conocimientos. Estas clasificaciones pueden ser útiles a la hora de diseñar la secuencia de contenidos de un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. No obstante, esta separación en compartimentos estancos de los diferentes conocimientos disciplinares de referencia es delicada, si no se tiene en cuenta el papel que estos conocimientos juegan en la práctica y la manera como se relacionan e integran cuando el profesor los moviliza en su actividad docente.

Especificidad del análisis didáctico

Al análisis didáctico se ubica en el nivel local del currículo: se utiliza como procedimiento para analizar una estructura matemática específica. Hemos presentado la función cuadrática como ejemplo de una estructura matemática para la que se puede desarrollar una estructura conceptual compleja y en la que se pueden hacer análisis cognitivos y de instrucción detallados. Sin embargo, los tópicos matemáticos que componen las matemáticas escolares son de diversos tipos. Encontramos tópicos que se concretan en un concepto específico, como la función cuadrática, la esfera o los poliedros regulares. Otros tópicos se refieren a operaciones sobre objetos o propiedades de esos objetos, como es el caso de los movimientos en el plano o las áreas y perímetros, respectivamente. Por otra parte, hay tópicos que son resultados, como el teorema de Pitágoras, o que son sistemas de representación, como los números decimales. En todo caso, cada tópico se ubica dentro de una estructura matemática e involucra objetos matemáticos (los conceptos), sus propiedades y sus relaciones con otros objetos. En este sentido, el análisis didáctico es aplicable a cualquier tópico de las matemáticas escolares. No obstante, cada tópico tiene su especificidad, que se revela cuando el profesor profundiza en sus diversos significados al realizar el análisis didáctico. Esta especificidad debe ser tenida en cuenta al diseñar un plan de formación y al identificar los tópicos sobre los que los futuros profesores van a trabajar. Para algunos tópicos (por ejemplo, aquellos que se concretan en un concepto específico) los futuros profesores podrán avanzar rápidamente al comienzo, puesto que estos tópicos se prestan más fácilmente al análisis estructural y representacional. No obstante, en la medida en que cada grupo de futuros profesores profundice en el análisis, cada tópico manifestará su propia complejidad e interés.

Esta complejidad se hace evidente cuando se consideran estructuras matemáticas específicas. Si el tópico es demasiado general, entonces las herramientas del análisis didáctico no pueden demostrar todo su potencial. En estos casos, el análisis se hace sobre estructuras conceptuales amplias en las que no se pueden identificar conceptos o procedimientos específicos, ni determinar con claridad los errores y las dificultades correspondientes. La información que se recoge es general y no permite diseñar actividades de enseñanza y aprendizaje que sean específicas al tópico en cuestión. Por lo tanto, el análisis didáctico debe utilizarse al nivel local, sobre estructuras matemáticas específicas. El nivel del currículo de planificación global, con su esquema de objetivos, contenido, metodología y evaluación permite organizar y resumir globalmente, para estructuras matemáticas más generales, la información que se produce a nivel local con el análisis didáctico. De esta manera, el profesor puede describir en términos del currículo tradicional la planificación de una unidad didáctica (Segovia y Rico, 2001, pp. 101-104).

Análisis de planes de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria

El análisis de un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria debe tener en cuenta múltiples dimensiones. En la Figura 22 hemos identificado aquellas que corresponden a sus fundamentos, diseño, desarrollo, objetivos y relación con el entorno. En este artículo nosotros hemos descrito en detalle los fundamentos sobre los que se sustenta el diseño de nuestra asignatura. Esta es la relación 1 de la figura.

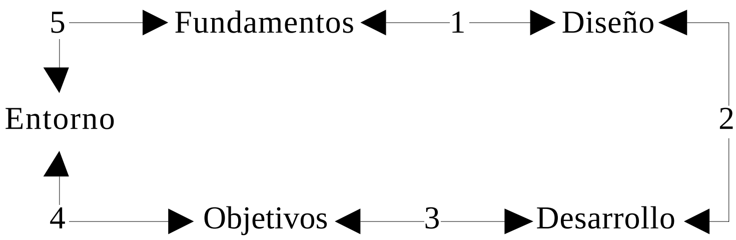

Figura 22. Análisis de planes de formación

La relación 2 se refiere a la manera como el currículo se desarrolla en la práctica y al grado en que ese desarrollo corresponde al diseño previsto. Todo plan se desarrolla dentro de un contexto y bajo unas circunstancias cuya complejidad no puede describirse completamente en el diseño. Por ejemplo, el desarrollo de un plan depende de las decisiones y actuaciones de los formadores que lo realizan. Cada formador interpretará y desarrollará el diseño a su manera, de acuerdo son sus visiones y su conocimiento, lo que resalta la problemática de la formación de formadores (Sánchez y García, 2002). No obstante, suponemos que la descripción detallada de los fundamentos en los que se sustenta el diseño de nuestra asignatura debe permitirle a un formador hipotético desarrollar criterios para interpretar ese diseño y para tomar decisiones y actuar en el aula de manera coherente con esos fundamentos.

La relación 3 de la Figura 22 identifica la medida en la que la realización del plan logra los objetivos propuestos en el diseño. De cierta manera, esta relación manifiesta el éxito del desarrollo del plan. El estudio de esta relación debería contribuir a la comprensión de los procesos en virtud de los cuales los futuros profesores construyen su conocimiento didáctico. En una exploración de este tipo sería deseable establecer si existen patrones de desarrollo en ese proceso de construcción; determinar los éxitos que alcanzan, y las dificultades y los obstáculos a los que los futuros profesores se enfrentan en el proceso; y conjeturar acerca de las posibles causas de estos éxitos, dificultades y obstáculos. La mejora de un plan de formación pasa necesariamente por el análisis de este tipo de resultados.

Por último, las relaciones 4 y 5 se refieren al entorno. La relación 4 establece la correspondencia entre lo que el diseño del plan impone como propósitos para la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria y aquello que el entorno considera que se necesita y demanda de un plan de este tipo. Por su parte, en la relación 5 se considera la coherencia entre las visiones del entorno social e institucional sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y sobre la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, por un lado, y las posiciones que el plan asume sobre estas cuestiones, por el otro.

Conocimiento pedagógico de contenido y conocimiento didáctico

Vemos las reflexiones que hemos hecho en este artículo como una contribución a la continua discusión sobre el conocimiento del profesor de matemáticas y su formación, iniciada por Shulman con la noción de conocimiento pedagógico de contenido. La noción de conocimiento didáctico que hemos propuesto no es una interpretación de la noción de conocimiento pedagógico de contenido. Pretende, más bien, proponer una conceptualización del conocimiento del profesor que, atendiendo a la especificidad de las matemáticas, resalta el carácter integrado de este conocimiento. Pretende ser una propuesta operativa en el contexto de la formación inicial, al estar vinculada a un procedimiento específico (el análisis didáctico) que concreta las actividades a realizar por los futuros profesores.

La problemática sobre el conocimiento del profesor y su formación inicial adquiere cada vez más actualidad puesto que se reconoce su importancia en la calidad de la formación matemática de los escolares. Quince años después, muchas de las inquietudes de Shulman y sus colaboradores siguen vigentes:

> *1. ¿Qué queremos decir con la transformación del contenido temático para la enseñanza? ¿Cuáles son los componentes de este proceso de transformación? ¿Cómo afecta el conocimiento del profesor a este proceso de transformación? ¿Qué aspectos de los conocimientos, capacidades y aptitudes se involucran? 2. ¿Cuáles son los componentes lógicos de la base de conocimiento profesional para la enseñanza? ¿Qué formas de conocimientos contribuyen a las elecciones que hacen los profesores? ¿Cuáles son las relaciones entre esos tipos de conocimiento? ¿Cómo se relacionan el conocimiento de los aprendices con el conocimiento del contexto y el conocimiento del currículo? ¿Cómo se relaciona el conocimiento pedagógico del contenido con el conocimiento temático del contenido?"* (Wilson, Shulman y Richert, 1987, p. 118).

Este artículo ha pretendido contribuir a la reflexión sobre estas y otras cuestiones y sugerir algunos esquemas conceptuales y prácticos para abordar los problemas que surgen de ellas.

REFERENCIAS

Cobb, P., Yackel, E., & McClain, K. (Eds.). (2000). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools, and instructional design*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Dörfler, W. (2000). Means for meaning. En P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 99-131). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education. Studies in Mathematics Education*. London: The Falmer Press.

Flores, P. (2000). Reflexión sobre problemas profesionales surgidos durante las prácticas de enseñanza. *Revista EMA, 5* (2), 113-138.

Freud, S. (1981). Análisis terminable e interminable. En Freud, S., *Obras Completas. Tomo III*. Madrid: Biblioteca Nueva.

Gess-Newsome, J. (2001). Pedagogical content knowledge: An introduction and orientation. En J. Gess-Newsome, N. G. Lederman (Eds.), *Examining Pedagogical Content Knowledge. The Construct and its Implications for Science Education* (pp. 3-17). Dordrecht: Kluwer.

Gess-Newsome, J., & Lederman, N. G. (Eds.). (2001). *Examining Pedagogical Content Knowledge. The Construct and its Implications for Science Education*. Dordrecht: Kluwer.

Goldin, G. A., & Janvier, C. (1998). Representations and the psychology of mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior, 17* (1), 1-4.

Gómez, P. (2001a). Desarrollo didáctico de los futuros profesores de matemáticas: el caso de la estructura conceptual y los sistemas de representación. En Moreno, F., Gil, F., Socas, M. y Godino, J. D. (Eds.), *Documentos de trabajo del V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*. Almería: SEIEM.

Gómez, P. (2001b). Conocimiento didáctico del futuro profesor de matemáticas al inicio de su formación. En F. J. Perales, A. L. García, E. Rivera, J. Bernal, F. Maeso, J. Muros, L. Rico, J. Roldán (Eds.), *Congreso nacional de didácticas específicas. Las didácticas de las áreas curriculares en el siglo XXI* (pp. 1851-1864 Vol. 2). Granada: Grupo Editorial Universitario.

Gómez, P., Cañadas, C., y Peñas, M. (2002). Llegar a ser profesora de matemáticas. Reflexiones desde una perspectiva sociocultural. En M. C. Penalva, G. Torregosa, J. Valls (Coords.), *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 471-484). Alicante: Universidad de Alicante.

Gómez, P., y Carulla, C. (2001). Desarrollo didáctico de los profesores de matemáticas. El caso de los sistemas de representación y la función cuadrática. *Educación Matemática, 13* (2).

González, J.L. (1998). *Números naturales relativos*. Granada: Comares.

Kemmis, S., y McTaggart, R. (1988). *Cómo planificar la investigación - acción*. Barcelona: Laertes.

Lanzing, J. W. A. (1998). *Everything you always wanted to know about… Concept Mapping*. Documento no publicado. Disponible en http://utto212.to.utwente.nl/lanzing/EVERYT~1.HTM.

Lerman, S. (2001). A review of research perspectives on mathematics teacher education. En F-L Lin & T.J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 33-52). Dordrecht: Kluwer.

Llinares, S. (1998). La investigación sobre el profesor de matemáticas: aprendizaje del profesor y práctica profesional. *Aula. Revista de Enseñanza e Investigación Educativa, 10*, 153-179.

Morine-Dershimer, G., & Kent, T. (2001). The complex nature and sources of teachers' pedagogical knowledge. En J. Gess-Newsome, N. G. Lederman (Eds.), *Examining Pedagogical Content Knowledge. The Construct and its Implications for Science Education* (pp. 21-50). Dordrecht: Kluwer.

Ortiz, J. (2000). *Modelización y calculadora gráfica en la formación inicial de profesores de matemáticas. Memoria de tercer ciclo*. Granada: Universidad de Granada.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Dir. Rico, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: ice - Horsori.

Radatz, H. (1979). Error Analysis in the Mathematics Education. *Journal for the Research in Mathematics Education, 9*, 163-172.

Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. En Contreras, L. C., Carrillo, J., Climent, N. y Sierra, M. (Eds.), *Cuarto simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática* (pp. 219-231). Granada: Universidad de Granada.

Rico, L. (1997a). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Dir. Rico, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Barcelona: ice - Horsori.

Rico, L. (Ed.). (1997b). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: una empresa docente.

Rico, L. (Coord.), Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L., Sierra, M., y Socas, M. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ice - Horsori.

Sánchez, M. V., y García, M. (2002). Formadores de profesores de matemáticas. ¿Qué puede aportar la didáctica de la matemática a su formación?. En M. C. Penalva, G. Torregosa, J. Valls (Coords.), *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 203-212). Alicante: Universidad de Alicante.

Schoenfeld, A.H. (2000). Models of the Teaching Process. *Journal of Mathematical Behavior, 18* (3), 243-261.

Schön, D.A. (1987). *Educating the Reflective Practitioner*. Washington, DC: Presentation to the 1987 meeting of the American Educational Research Association.

Segovia, I., y Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro

(Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being –or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. En P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 37-98). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Shulman, L.S. (2001). Foreword. En J. Gess-Newsome, N. G. Lederman (Eds.), *Examining Pedagogical Content Knowledge. The Construct and its Implications for Science Education* (pp. ix-xii). Dordrecht: Kluwer.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57* (1), 1-22.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (2), 114-145.

Simon, M. A. (1995). Elaborating models of mathematics teaching: A response to Steffe and d'Ambrosio. *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (2), 160-162.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Dir. Rico, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: ice - Horsori.

Steffe, L. P., & D'Ambrosio, B.S. (1995). Toward a working model of constructivist teaching: A reaction to Simon. *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (2), 146-159.

Stein, M. K., & Brown, C.A. (1997). Teacher learning in a social context: Integrating collaborative and institutional processes with the study of teacher change. En E. Fennema, B. S. Nelson (Eds.), *Mathematics teachers in transition* (pp. 155-191). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Thompson, A.G. (1992). Teacher's Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127-146). New York: Macmillan.

Wilson, S., Shulman, L.S., & Richert, A. (1987). 150 different ways of knowing: Representations of knowledge in teaching. En J. Calderhead (Ed.), *Exploring Teachers' Thinking* (pp. 104-124). London: Cassell.