FRACTAL: FORMAS DE RECONOCER EL MUNDO A TRAVÉS DE CÁLCULOS MATEMÁTICOS TOTALMENTE NUEVOS Y ATRACTIVOS LA AVENTURA DEL SABER

Grupo de Matemáticas "Henry Hopf"[1]
C.E.D. Colegio Villas del Progreso, Sede B, Jornada Tarde
angaritacervantes@gmail.com, mastervidepr@gmail.com

El Grupo de Matemáticas "Henry Hopf", iniciado en 2011, pretende responder el cuestionamiento: ¿Es posible conocer y aplicar los conceptos de la teoría de los fractales a nivel elemental, de forma que puedan generarse nuevos conocimientos en el contexto de los estudiantes? En este artículo, compartimos diversas actividades que nos han permitido comprender algunas nociones y elementos que hacen parte de la mencionada teoría.

JUSTIFICACIÓN

Las discusiones ulteriores a la decisión de implementar la reorganización curricular por ciclos escolares, nos ha llevado a preguntarnos qué es necesario, indispensable y pertinente para nuestros estudiantes tratándose del conocimiento que pretendemos impartir en nuestras cátedras.

En los últimos siglos, se le ha exigido a la matemática contribuir con la solución de problemas reales; en el sentido de que aporte nuevas formas de explicar la realidad en la que estamos inmersos.

Nuestros estudiantes deben ser parte de esta inquietud social, de forma que reconozcan las necesidades del mundo, y vean que pueden aportar significativamente a las soluciones que se requieren. No solo vean, sino que identifiquen una de las tantas formas en las que pueden contribuir de manera provechosa a la sociedad. Como fundador del Grupo de Matemáticas "Henry Hopf", considero que esto se logrará de manera efectiva si compartimos con ellos las formas actuales de ver el mundo que, si bien están basadas en los viejos pilares

[1] El grupo de docentes y estudiantes está conformado por: Rafael Angarita, Leidy Argüello, Yuliana Higuera, Angie Campero y otros.

Grupo de Matemáticas "Henry Hopf". (2013). FRACTAL: formas de reconocer el mundo a través de cálculos matemáticos totalmente nuevos y atractivos. La aventura del saber. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 195-202). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

de las estructuras algebraicas (no consideradas a cabalidad en nuestros planes de estudio), implican paradigmas que nos alejan de la concepción de un mundo rústico, lineal y determinista a la que los tenemos atados.

Uno de los paradigmas más notorios en este sentido, es el resultante de la teoría de los sistemas dinámicos, específicamente en el subcampo de las formas fractales. La intención del Grupo Hopf, es explorar las nociones de esta nueva matemática, mostrando que sus conceptos se pueden tratar a nivel elemental, proveyendo una nueva manera de ver, analizar y describir el mundo.

Compartiremos con el lector algunas de las actividades que nos han permitido reconocer ciertas propiedades de las formas fractales; en particular, de los fractales clásicos.

PRECONCEPTOS

En este artículo recurrimos a la definición de fractal dada por Mandelbrot:

> Fractal (del latín Fractus, que significa irregular, quebradizo) es el conjunto de formas que, generadas normalmente por un proceso de repetición, se caracterizan por poseer detalle a toda escala, por tener longitud infinita, por no ser diferenciables y por exhibir dimensión fraccional (no entera). Los fractales son el resultado de la repetición sin fin de patrones geométricos que se suponen de forma indefinida. (Mandelbrot, 1982)

La dimensión puede determinarse desde diversas aproximaciones; entre ellas, las particularmente útiles con los fractales clásicos, son:

1. La relación que determina la dimensión D de un objeto geométrico, usando un recubrimiento de N piezas de tamaño característico R:

$$N = R^D$$

2. Una definición más general es la llamada *dimensión por cajas o de capacidad,* donde también se pretende determinar el número $N(r)$ mínimo de cajas o bolas de radio r, necesarias para recubrir completamente el conjunto de puntos que forma nuestra forma fractal. Matemáticamente se determina por medio de la expresión:

$$D = \lim_{r \to 0} \frac{\ln N(r)}{\ln \frac{1}{r}}$$

De hecho, las dos formas de determinar la dimensión coinciden para objetos totalmente autosimilares.

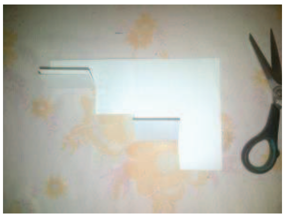
ACTIVIDADES

Explicaremos tres de las actividades trabajadas en el grupo, y también la manera en la que ayudan a comprender las características según las cuales una forma se considera fractal.

Tarjetas fractales

Esta actividad se toma del laboratorio de fractales, desarrollado en el sitio http://classes.yale.edu/fractals/Labs/PaperFoldingLab/PFLProcSierp.html. El proceso para construir el equivalente al triángulo de Sierpinsky es:






(1) doblamos una hoja por la mitad, hacemos un corte, desde la mitad del doblez, y hasta la cuarta parte de la longitud de la hoja; (2) doblamos una de las mitades, y luego llevamos ese doblez hacia “dentro”, de forma que quede como en la imagen. En la imagen doblamos la mitad izquierda, de ahora en adelante, debe doblarse siempre esta mitad; (3) cortamos nuevamente cada mitad: la parte izquierda hasta la mitad del tamaño del corte. En la mitad derecha, hasta la octava parte. De cada corte, doblamos y llevamos hacia dentro la mitad izquierda; (4) el proceso puede continuarse cuantas veces se quiera. A continuación se presenta las imágenes de la secuencia de indicaciones para obtener una tarjeta como la que se muestra al final.

A partir de esta tarjeta, que representa el triángulo de Sierpinsky, podemos determinar las siguientes características:

> Calcular la suma de las longitudes de los cortes realizados, suponiendo que el proceso se realiza muchas veces.

Por simplicidad, supongamos que el primer corte tiene longitud 2 unidades; así, el primer doblez tiene longitud 1. Teniendo en cuenta que cada corte que se realice es de la mitad de la longitud del corte anterior, en la siguiente tabla se muestra la lista de las longitudes de los cortes en cada paso:

Paso	Número de cortes	Longitud del corte
1	1	$2 = 2^1$
2	3	$1 = 2^0$
3	9	$\frac{1}{2} = 2^{-1}$
4	27	$\frac{1}{4} = 2^{-2}$
	…	
N	3^{n-1}	$2 = 2^{2-n}$

Por tanto, la suma de las longitudes de los cortes es:

$$2 + 3(1) + 9(\frac{1}{2}) + 27(\frac{1}{4}) + \ldots + 3^{n-1}(\frac{1}{2^{n-2}}) + \ldots$$

Factorizando:

$$2(1 + \frac{3}{2} + (\frac{3}{2})^2 + \ldots)$$

La suma dentro del paréntesis es una progresión geométrica con radio 3/2, por lo tanto, diverge. Esto implica que la longitud de los cortes es infinita.

Dejamos a los lectores el cálculo de los siguientes:

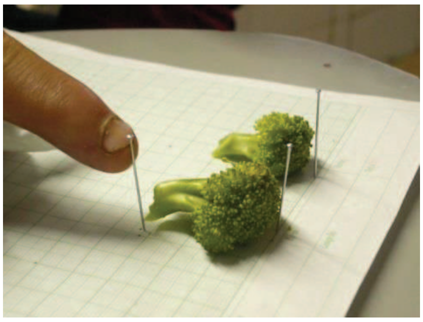
a) Calcular la longitud de la suma de los bordes resultantes de cada corte (En cada corte se generan tres bordes), suponiendo que el proceso se realiza muchas veces.

b) Al hacerse los dobleces se crean espacios huecos. Suponiendo que se cubren con cuadros de papel, podemos determinar el área de la figura obtenida.

c) Teniendo en cuenta la suposición del inciso anterior, podemos determinar el volumen de la figura resultante.

Dimensión fractal de un brócoli

Podemos usar artesanalmente la definición de dimensión por capacidad en un brócoli. El brócoli es un ejemplo muy cercano de lo que es un fractal, puesto que parte del brócoli es similar al brócoli completo. En este caso, nuestros estudiantes desarrollaron el siguiente algoritmo para determinar una aproximación de su dimensión fractal: (1) usando papel milimetrado, determinar la longitud más larga necesaria para "construir" una caja que contenga completamente al brócoli; (2) dividimos el brócoli en partes más o menos iguales, ¿cuántas? Las que nos permita la forma del brócoli; (3) Tomamos una de ellas, es nuestra decisión tomar la más grande o la más pequeña, y repetimos el primer paso; (4) continuamos este proceso hasta donde lo permita la forma y el tamaño del brócoli, y registramos en una tabla de tres columnas tituladas: "Número del paso", "Número de partes" y "Longitud del lado".



Aplicamos entonces la definición de dimensión fractal. En este punto podemos usar el método de aproximación que consideremos adecuado. El proceso tuvo una segunda parte en la que los estudiantes dibujaron la silueta del trozo de brócoli y contaron la cantidad de cuadritos que quedaban encerrados en ella.

L-Sistemas

En 1968 Aristid Lindenmayer propone una herramienta que permite estudiar el desarrollo de ciertas especies de plantas, por medio de axiomas o reglas de repetición. El ejemplo clásico es el juego de palabras, que comienza con las letras *a* y *b*. Para cada letra se especifica un axioma de repetición; por ejemplo, cuando aparezca la letra *a*, la podemos remplazar por *b*, y si tenemos la letra *b*, podemos remplazarla por las letras *ab*. Si queremos desarrollar las primeras etapas del juego, nos quedaría:

a *b* *ab* *bab* *abab* …

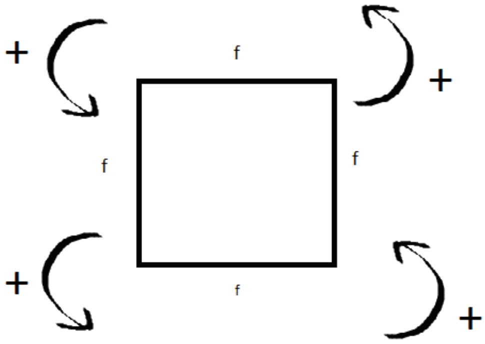
El programa Fractint trae consigo sintaxis de programación que permite la simulación de L-Sistemas, con los cuales es posible generar formas fractales y, muy importante, aproximaciones de formas naturales, como árboles, plantas, entre otros. Recomendamos al lector seguir el tutorial de Fractint en la dirección http://www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo2/frames.htm, en donde encontrará las nociones básicas del manejo de L-Sistemas en fractint. Solo mencionaremos aquí los comandos básicos de Fractint, para generar estos L-Sistemas:

{}:	Indican el inicio y terminación del comando de generación.
Angle *x*:	Esta palabra, seguida por el valor *x*, hace que el programa internamente calcule el ángulo de giro; es decir, ángulo de giro 360/*x*.
Axiom:	Aquí se indica el axioma de formación principal. Posteriormente se pueden indicar otros axiomas de repetición.
F:	El sistema dibuja una línea recta.
+:	El sistema gira el cursor tantos grados como indique la sentencia “Angle *x*” en el sentido contrario al de las manecillas del reloj mecánico.
–:	El sistema gira el cursor tantos grados como indique la sentencia “Angle *x*” en el sentido de las manecillas del reloj mecánico.
@*x*:	El valor de *x* suele ser un número entre 0 y 1. Indica un factor de reducción en la línea que se dibuja.
G:	Se mueve hacia delante sin dibujar nada.
[]:	Dentro de estos corchetes se suelen escribir códigos. Lo que el programa interpreta es: desarrollo el código que hay dentro de los corchetes, luego regreso el cursor al inicio del corchete, y continúo con el código que sigue después del corchete. Este comando es especialmente útil cuando se hacen códigos para simular plantas.

Por ejemplo, para construir un cuadrado, el código es:

Cuadrado{ Angle 4 Axiom f+f+f+f }

Veamos: Al indicar "Angle 4", el sistema internamente hace 360/4 = 90, por lo tanto, los giros serán de 90º. Ahora, el axioma es "f+f+f+f", es decir, el programa interpretará:

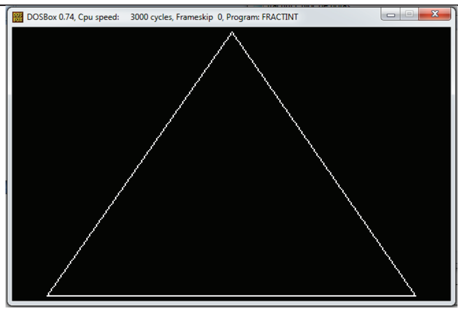


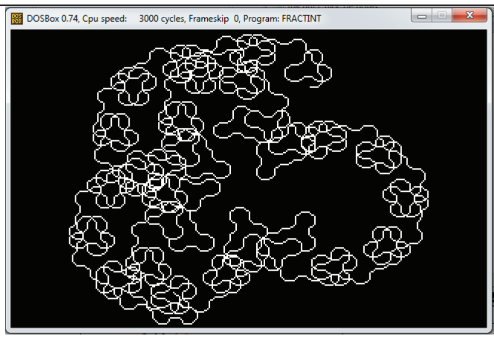
Para terminar, a continuación presentamos cuatro figuras y el código con el que simulamos cada una. Además, invitamos al lector a que descargue el programa, puede hacerse de forma gratuita en el enlace

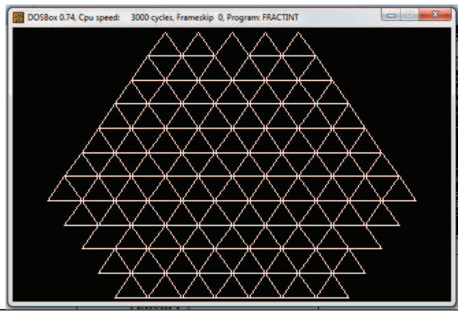
http://spanky.triumf.ca/www/fractint/getting.html

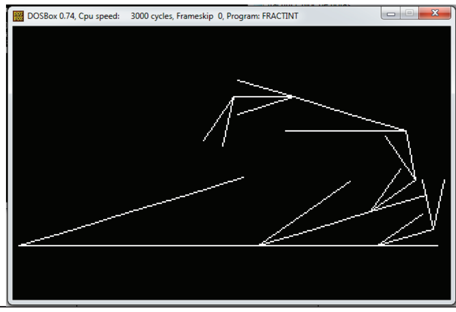
Una vez instalado el programa, pueden probar con los códigos que les proporcionamos y esperamos que esto sea incentivo para que traten de escribir los suyos.

Código	Imagen

Progreso{
Angle 3
Axiom f+f+f
F= f+f+f+f+f+f
}
	

XYC{
Angle 8
Axiom f+f+f+f
F= f+f+f+f-f-f+f
}
	

Angie{
Angle 3
Axiom F
F= f+f-f+f+f-f+f
}
	

Anxe {
Angle 18
Axiom X
X = [+f] f [x+] +x+x
F= f f
}
	

REFERENCIA

Mandelbrot, B. (1982). *Fractal geometry of nature*. New York, EUA: W. H. Freeman and Company.