PRIMEROS PASOS EN LA BÚSQUEDA DE EXPERIENCIAS DE AULA CON GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS EN LA EDUCACIÓN BÁSICA: EL CASO DE LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

Neila Méndez y Lina Bohórquez
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
neilarociomendez@yahoo.com, dilimaco_15@hotmail.com

En la búsqueda bibliográfica hecha para la construcción de la idea del trabajo de grado para la licenciatura, encontramos una relación de la geometría hiperbólica y el modelo del plano hiperbólico con el tejido en crochet. Así se despierta en nosotras el interés por esa geometría y por cómo podría llevarse al aula de matemáticas en la educación básica (media vocacional). Como primera aproximación, desde las dudas que surgieron para ese propósito, se hizo una breve búsqueda de experiencias de trabajo con geometría hiperbólica en la educación básica, con el fin de determinar cuáles modelos, temáticas y otros aspectos se tienen en cuenta al trabajar en el aula.

PRIMEROS PASOS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LA IDEA PROBLEMA

Al emprender la realización del trabajo de grado de la licenciatura, lo primero fue identificar una problemática de interés: la geometría es uno de nuestros temas predilectos; luego, en la indagación para consolidar la idea del trabajo nos enfocamos en la diversidad de geometrías y encontramos el trabajo sobre geometría hiperbólica desarrollado, en 1997, por los profesores David Henderson y Daina Taimina de la Universidad de Cornell (EUA). En su artículo *Crocheting the hyperbolic plane* (Henderson y Taimina, 2001), los autores exponen cómo construyeron un modelo físico del plano hiperbólico tejido en crochet, sus propiedades matemáticas y cómo se evidencia la geometría hiperbólica en el modelo; inclusive, muestran una representación de un triángulo hiperbólico en el modelo (ver Figura 1).

Fue importante encontrar un trabajo de crochet con una geometría que hasta el momento era, y aún es, muy poco conocida por nosotras, ya que dio origen a varios cuestionamientos que más adelante se presentan. Consultando un poco

Méndez, N. y Bohórquez, L. (2013). Primeros pasos en la búsqueda de experiencias de aula con geometrías no euclidianas en la educación básica: el caso de la geometría hiperbólica. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 229-234). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

más sobre el trabajo de los mencionados profesores, dimos con una entrevista[1] a ellos, realizada en 2004. Allí afirman la existencia de la geometría hiperbólica en elementos de la naturaleza como los arrecifes de coral, algunas criaturas de mar e incluso en algunas hojas de lechuga, ¡una hoja de lechuga tiene relación con la geometría!

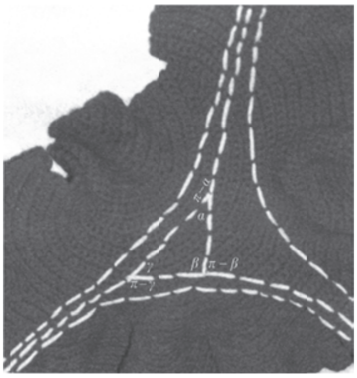

Figura 1: Representación de un triángulo en el modelo hiperbólico en crochet (Henderson y Taimina, 2001, p. 26)

En una primera búsqueda sobre la geometría hiperbólica se encontró que guarda relación con el enunciado del quinto postulado de los *Elementos* de Euclides. Tal postulado fue abordado por muchos personajes que intentaron demostrarlo, debido a su complejidad, notable diferencia respecto a los otros cuatro postulados, y a que fue el que más tardíamente se utiliza en el Libro I. A lo largo de la historia, se encontraron enunciados equivalentes al quinto postulado, uno de ellos: *Por un punto exterior a una recta se puede trazar una paralela y solo una.*

En el siglo XIX, de manera independiente Gauss, János Bolyai y Lobatchevski llegan a descubrimientos sobre una nueva geometría, que en su momento llamaron geometría no euclidiana, y que ahora se conoce como geometría hiperbólica. Se caracteriza, entre otros aspectos, por el hecho de que por un punto exterior a una recta hay infinitas rectas paralelas y los ángulos internos de los triángulos suman menos que dos rectos.

Desde ese panorama, comenzamos a pensar sobre las geometrías no euclidianas, específicamente sobre la geometría hiperbólica y cómo llevarla a un aula de la educación básica. Comenzaron a surgir cuestiones como: ¿cómo emplear

[1] La entrevista la realizó el *Magazine Cabinet* y el texto de la misma está disponible en http://cabinetmagazine.org/issues/16/crocheting.php.

el recurso de la profesora Taimina para la enseñanza de algunas nociones de esa geometría en la educación básica?, ¿qué temas?, ¿en qué cursos?, ¿qué deberían saber los estudiantes para trabajarlo?, ¿qué debería saber el profesor para enseñarlo?

Luego de reflexionar y atender consejos por parte de profesores, se determinó como primer paso: la indagación sobre experiencias de aula con la geometría de nuestro interés, realizadas en educación básica. Se hizo entonces la respectiva búsqueda en bases de datos: libros, artículos, trabajos de grado. En este artículo se hace una breve presentación de lo encontrado hasta el momento, pero antes de ello, un comentario sobre el quinto postulado.

LA NEGACIÓN DEL QUINTO POSTULADO

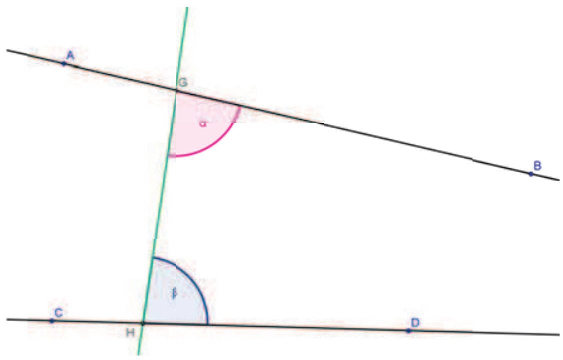

Figura 2: Representación del quinto postulado de Euclides que versa: Si una recta secante corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores, la suma de los cuales sea menor que dos ángulos rectos; las dos rectas, suficientemente alargadas se cortarán en el mismo lado.[2]

Hace cerca de dos siglos surgieron diversas geometrías que son *consistentes* con el modelo euclídeo, es decir que aunque difieren en el quinto postulado (Figura 2), "tienen un sistema lógico y coherente". Lo que se demuestre en ambas es cierto, sin olvidar que cada una tiene un campo de aplicación. A finales del siglo XIX, se logró demostrar que el quinto postulado de los enunciados por Euclides podía ser no válido, así se dio lugar a la división: geometrías euclidianas y geometrías no euclidianas. Son geometrías no euclidianas, entre otras, la geometría elíptica y la geometría hiperbólica; en ambas se niega el quinto postulado; en la geometría elíptica se acepta que "No existe paralela alguna a una recta dada que cruce por un punto dado"; mientras que en la hi-

[2] Tomado de: http://www.euclides.org/menu/elements_esp/01/postuladoslibro1.htm

perbólica se acepta que “Existen infinitas rectas que son paralelas a una recta dada por un punto dado”.

De lo encontrado hasta el momento

Desde la indagación sobre la enseñanza de las geometrías no euclidianas y, en particular, de la geometría hiperbólica, se ha encontrado que entre los años 2000 y 2009, en Estados Unidos, Portugal y Brasil se han llevado al aula conocimientos relacionados con la geometría hiperbólica. Evidencia de ello: en Estados Unidos, el trabajo de grado de Donald Christi (Christi, s.f.); en Portugal, la tesis de doctorado de la profesora María Teresa Neto (Neto, 2009). A continuación se presenta un recuento de lo encontrado:

Christi Donald en su trabajo de grado en la Universidad de Iowa, trabaja con un curso de 51 estudiantes de grado noveno en Estados Unidos, sobre la geometría hiperbólica. En la primera parte del curso, los estudiantes habían estudiado geometría euclidiana, posteriormente trabajaron con la geometría esférica haciendo uso de bandas de caucho y una pelota de tenis; cuando llegaron a los triángulos y la medida de los ángulos internos, los estudiantes descubrieron que la suma era mayor de 180º, en ese momento la profesora introdujo algunos aspectos históricos y su relación con la prueba del quinto postulado de Euclides. Trabajaron una prueba de 34 teoremas que debían clasificar: cuáles eran de la geometría euclidiana, cuáles de la geometría hiperbólica y cuáles de ambas geometrías. Para realizar esa clasificación, los estudiantes habían interactuado con un modelo de geometría hiperbólica, un software desarrollado por Joel Castellanos (Modelo del disco de Poincaré); también trabajaron con Geometer’s Sketchpad para experimentar con geometría euclidiana. Donald concluye que el uso de recursos tecnológicos le permitió a los estudiantes visualizar el espacio hiperbólico, y el desarrollo de la actividad proporcionó a los estudiantes la oportunidad de reconocer la existencia de otras geometrías.

En su tesis doctoral para optar por el título de Doctora en Didáctica de la Universidad de Aveiro, María Teresa Neto (2009) tenía como problema de investigación: ¿De qué manera y qué otros modelos de geometría plana, diferentes del euclidiano, pueden ayudar a los estudiantes de secundaria a desarrollar el razonamiento deductivo? El objetivo era analizar entornos de aprendizaje en los que los estudiantes resolvían problemas, en el contexto de la argumentación y demostración. Hace el análisis a la resolución de unos problemas en diferentes geometrías; específicamente, resolvieron un problema haciendo uso del modelo del semiplano superior (modelo de geometría hiperbólica), esto con un estudio de caso de dos estudiantes de grado décimo en Portugal. La profesora concluye que los estudiantes trabajaron varios sistemas axiomáticos, evolucionaron a un pensamiento más estructurado gracias a la introducción de las otras geometrías y la resolución de problemas en dicho contexto.

En la propuesta que hacen para introducir la geometría no euclidiana en el currículo de geometría de secundaria, Gray y Reza (2007, citando a Lenart, 1993) señalan que la introducción de la geometría no euclidiana a temprana edad (10-11 años) puede ser ventajosa ya que los estudiantes no han desarrollado sesgo alguno hacia la geometría euclidiana y sus pensamientos no se verá limitado por sus experiencias en el plano. Se refieren a que la mejor forma de enseñar la geometría hiperbólica es por medio del modelo de Poincaré. Concluyen que la mayoría de los estudiantes que han recibido algún curso de geometría en la escuela secundaria, terminan el curso sin tener noticia de otras geometrías.

A modo de conclusión, sobre los pasos que se han dado en la búsqueda de experiencias de aula con la geometría hiperbólica en la educación básica, se resalta la implementación de recursos tecnológicos de modelos para la geometría hiperbólica; el más mencionado es el disco de Poincaré ya sea desde la creación de herramientas en GeoGebra o el modelo diseñado por el profesor Joel Castellanos. Entre otros modelos que se mencionan, se encuentra el Semidisco superior, pero no se ha hallado, hasta el momento, alguna experiencia sobre la geometría hiperbólica con un modelo físico como el de Henderson y Taimina.

Se ha resaltado la importancia de implementar otras geometrías en el aula porque enriquece el pensamiento de los estudiantes; en primera medida, porque desarrollan niveles de pensamiento cada vez más estructurados, reconocen aspectos históricos de la evolución de las matemáticas, y en particular de las geometrías.

REFERENCIAS

Christi, D. (s.f.). *Hyperbolic geometry in the high school geometry classroom* (Tesis de grado). Iowa State University, Iowa, EUA. Recuperado de http://www.math.iastate.edu/thesisarchive/MSM/Donald_C_MSM_F05.pdf

Gray, A. y Sarhangi, R. (2007). *A proposal for the introduction of non-euclidean geometry into the secondary school geometry curriculum.*

Recuperado de http://pages.towson.edu/gsarhang/Modules%20for%20Non-Euclid%201.doc

Henderson, D. y Taimina, D. (2001). Crocheting the hyperbolic plane. *The Mathematical Intelligencer*, *23*(2), 17-28. Recuperado de http://www.math.cornell.edu/~dwh/papers/crochet/crochet.PDF

Neto, M (2009). *O desenvolvimento do raciocínio dedutivo ao nível do ensino secundário: recurso a geometrias planas* (Tesis de doctorado). Departamento de Didáctica y Tecnología Educativa, Universidad de Aveiro, Portugal.