¿ARGUMENTAR PARA DEFINIR O DEFINIR PARA ARGUMENTAR?

Luz Silva y Carmen Samper
Universidad Pedagógica Nacional
luzhsilva@hotmail.com, csamper@pedagogica.edu.co

Se presenta y se ilustra un marco de referencia de un estudio en curso para obtener el título de Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia); estudio sobre la conexión entre las acciones de definir y argumentar, que puede contribuir a la práctica de profesores en ejercicio y en formación. La habilidad para construir una definición es un posible indicio de comprensión, mientras que saberla de memoria no garantiza la comprensión del concepto (Vinner, 1991). Por ello, se ha criticado la enseñanza de definiciones de geometría que no haga énfasis en el proceso subyacente de definir, lo cual favorece la argumentación. Según Kublikowski (2009), la definición y la argumentación están conectadas.

PROBLEMA

Las evidencias empíricas y los aportes teóricos de investigadores en educación matemática ponen de manifiesto la necesidad de un nuevo enfoque en el tratamiento de las definiciones en geometría. No se deben presentar a partir de enunciados previamente construidos por matemáticos o autores, como aparecen en los libros de texto, y solo utilizarlas posteriormente para argumentar, sino que se debe dar al estudiante la oportunidad de participar en la formulación y elección de las propiedades que definen el objeto o la relación, acción que también favorece la argumentación. Esta necesidad genera la pregunta: ¿qué características tienen las tareas para el aula, que propician la argumentación en torno a la definición de un concepto?

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Definición

En Calvo (2001), una definición matemática es un enunciado verbal que predetermina al concepto de una manera no circular –sus elementos son nociones primitivas o definidas previamente– y consistente –sin contradicciones lógi-

Silva, L. y Samper, C. (2013). ¿Argumentar para definir o definir para argumentar? En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 259-266). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

cas. Calvo menciona dos características de las definiciones matemáticas: convencionalidad y minimalidad.

La *convencionalidad* se refiere a que las definiciones no están predeterminadas sino que las selecciona el matemático, el autor de un libro de texto o el profesor, atendiendo a dos factores principales: el tipo de caracterización del concepto matemático que se requiera en un momento dado y las convenciones en el grado de restricción utilizado para definir un concepto matemático. Con respecto a este segundo punto, de Villiers (1994) clasifica las definiciones en jerárquicas y particionales. Una *definición jerárquica* permite que los conceptos más particulares sean subconjuntos de los más generales, mientras que en una *definición particional*, los subconjuntos de conceptos se consideran disyuntos.

La *minimalidad* se refiere al hecho de que una definición no incluya información redundante. Cuando este es el caso se habla de una *definición económica*; sin embargo, a una definición se le puede agregar más información de la necesaria sin que pierda el formato de definición matemática. Por ello, Govender y de Villiers (2002) consideran que una definición es incorrecta si contiene una propiedad incorrecta o si las propiedades mencionadas son insuficientes.

Cada definición determina un conjunto de objetos, llamado *conjunto de ejemplos*, que cumplen las condiciones dadas en la definición. Se habla de *definiciones equivalentes* cuando dos o más definiciones determinan el mismo conjunto de ejemplos (Calvo, 2001, p. 30).

Formación de conceptos

Una de las teorías sobre la formación de conceptos matemáticos en el ámbito educativo, la desarrolló Vinner (1991), quien propone la distinción entre concepto e imagen del concepto. El *concepto* es el objeto matemático determinado por una definición formal, mientras que la *imagen del concepto* es algo no verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto. Vinner considera que al desarrollar las matemáticas deductivamente en el aula, como ocurre por lo regular, es posible que el profesor presente en sus clases una secuencia de definiciones, teoremas y demostraciones que desde el punto de vista pedagógico podría ser incorrecta al no tener en cuenta el proceso de adquisición de conceptos y de razonamiento lógico. Por esta razón, Vinner pone de manifiesto que cuando se decide cómo enseñar matemáticas, es necesario tener en cuenta no solo cómo se *espera* que los estudiantes adquieran conceptos matemáticos sino también, y principalmente, cómo los estudiantes *realmente* adquieren esos conceptos.

El gran reto para los profesores es favorecer la articulación entre la definición del concepto y la imagen del concepto para avanzar en la construcción de objetos geométricos. ¿Y cómo se puede favorecer esta construcción?

- Considerar propiedades relevantes e irrelevantes en las representaciones juega un papel importante en la comprensión del concepto, como se evidenció en el estudio de Hershkowitz y Vinner (1982). Por ello, es conveniente considerarlas dentro del proceso de construcción de un concepto.

- Construir figuras representativas con diferentes instrumentos puede apoyar la construcción de un concepto matemático formal teniendo en cuenta que cada instrumento puede aportar diferentes aproximaciones al concepto, contribuyendo así con diferentes características de este (Chassapis, 1998). Por ello, es conveniente diseñar actividades en torno a un mismo concepto que requieran el uso de instrumentos distintos.

- Convertir la construcción y el análisis de definiciones en una tarea consuetudinaria del aula, tal como lo proponen Samper, Molina y Echeverry (2011), hace posible modificar la imagen conceptual y el espacio de ejemplos de los estudiantes. También hace posible mostrar que las definiciones son arbitrarias y que dependen del contexto teórica en el que se construyen. Tal tarea se puede apoyar con el uso de un software de geometría dinámica. Hacer propia la propuesta mencionada contribuye a responder la pregunta en cuestión.

- Construir un espacio de ejemplos que les permita a los estudiantes familiarizarse con un concepto y adoptar nuevos conceptos (Watson y Mason, 2005). Ello ayudará a enriquecer la imagen conceptual.

De Villiers (2004, 1998) distingue dos maneras diferentes de definir los conceptos: descriptiva (a posteriori) y constructiva (a priori). Definir de manera descriptiva un concepto significa que se define después de haber conocido, por algún tiempo, propiedades de este. En otras palabras, la imagen del concepto está desarrollada antes de formular una definición del concepto. Una definición a posteriori generalmente se hace seleccionando unas propiedades del concepto a partir de las cuales se pueden deducir las demás. Ese subconjunto de propiedades se convierte en la definición, y las propiedades restantes se derivan como teoremas.

Definir de manera constructiva (a priori) significa que cierta definición de un concepto se cambia a través de la exclusión, generalización, especialización, sustitución o adición de propiedades, construyendo un nuevo concepto en el proceso. En este caso, la definición del nuevo concepto precede a la posterior exploración de las propiedades adicionales y al desarrollo de la imagen del concepto. Mientras que el objetivo principal de una definición a posteriori es sistematizar el conocimiento existente, la función principal de una definición a priori es producir nuevo conocimiento.

Argumentación

Un argumento se considera como una razón que se ofrece a favor o en contra de una proposición u opinión (Boero, Douek y Ferrari, 2008). Leitao (2007) considera la argumentación como una actividad discursiva que se caracteriza por la defensa de puntos de vista y la consideración de perspectivas contrarias. Para Boero, Douek y Ferrari, la argumentación no solo es el proceso que produce un discurso conectado de manera lógica –no necesariamente deductivo– sino también el texto producido en ese proceso. Como lo plantea Leitao, cuando se presenta la necesidad de defender un punto de vista se genera un proceso de negociación en el cual se formulan las ideas propias y, posiblemente, se transforman. Este proceso le confiere a la argumentación el potencial de promover conocimiento al involucrar al sujeto que argumenta en un proceso de revisión de sus propios puntos de vista y de su conocimiento.

Según Kublikowski (2009), la argumentación y la definición están conectadas de diferentes formas. Algunas de ellas son: argumentación acerca de la definición, argumentación desde la definición y argumentación por definición.

- Una *argumentación acerca de la definición* tiene como fin llegar a una definición, que es el punto final, la conclusión de una discusión. El proceso argumentativo termina cuando se obtiene la definición.
- En la *argumentación desde la definición*, una definición es el punto inicial de una discusión. Ocurre cuando quien argumenta construye argumentos usando definiciones bien establecidas e indiscutibles.

- Finalmente, en la *argumentación por definición*, una definición juega el papel de una premisa en una estructura argumentativa. Para Kublikowski, este es el uso más fuerte de una definición.

EJEMPLO DE CONSTRUCCIÓN A POSTERIORI DE UNA DEFINICIÓN

En una clase de Elementos de Geometría en la Universidad Pedagógica Nacional, se construyó la definición de altura de un triángulo a partir de propuestas de los estudiantes. Inicialmente, los estudiantes, a partir de su imagen conceptual (Vinner, 1991), representaron un triángulo y una de sus alturas con dos instrumentos diferentes (Chassapis, 1998): papel y lápiz, y un software de geometría dinámica. Luego, escribieron su definición.

A continuación, se evidencian los argumentos acerca de la definición (Kublikowski, 2009), que tiene un grupo de estudiantes (argumentar para definir).

22.	Estudiante 2:	¿Qué es altura?
23.	Estudiante 3:	Entonces, la altura es (comienza a escribir) es un segmento. ¿Estamos de acuerdo en que es un segmento?
24.	Estudiante 1:	Perpendicular a… a un segmento

Después de una discusión sobre la posición de la altura (horizontal o vertical) siguen escribiendo:

40.	Estudiante 2:	La altura es el segmento…
41.	Estudiante 1:	Perpendicular…
42.	Estudiante 3:	¿Cómo se escribe perpendicular?
43.	Estudiante 1:	[…] Perpendicular a cualquier segmento paralelo (silencio). No. ¿Sí me entiende?
44.	Estudiante 2:	…a cualquier punto paralelo (silencio). Es que suena rarísimo.
45.	Estudiante 1:	Sí. ¿Sí me entiende?
46.	Estudiante 2:	A cualquier punto de referencia. Ya.

Finalmente escriben la siguiente definición: "La altura es el segmento perpendicular a cualquier punto de referencia".

En la segunda parte de la clase, durante el proceso de socialización de las definiciones propuestas en los grupos, se evidencian argumentos desde la definición (Kublikowski, 2009) (definir para argumentar). Comienza así la determinación de las propiedades relevantes para la definición (Hershkowitz & Vinner, 1982).

68. Profesora: […] tengo dos grupos que dicen lo siguiente (escribe las definiciones en el tablero): La altura de un triángulo es la medida de su base hasta el punto común de los dos lados adyacentes a la base.

[…]

102. Profesora: […] Bueno. Los demás grupos me dicen que la altura es un segmento […] El grupo E me dice que la altura es un segmento (escribe en el tablero y subraya la palabra segmento). Como digo todos los demás me hablan de un segmento. Primera cosa importante: es un segmento. (Sigue leyendo en voz alta y escribiendo en el tablero)… que se forma a partir de una base.

[…]

104. Profesora: […] En el grupo B también hablan de un segmento perpendicular.

Pasa un estudiante del grupo B y muestra su construcción en Cabri. Después de arrastrar algunos puntos, ven que este grupo definió altura para un tipo particular de triángulos: los isósceles.

114. Profesora: ¿Es punto medio? Ajá. O sea que tu definición es: la altura es un segmento que se forma a partir del punto medio de la base (escribe la definición en el tablero). Pero además le pusiste que fuera…

115. Estudiante 9: Puse que fuera perpendicular.

[…]

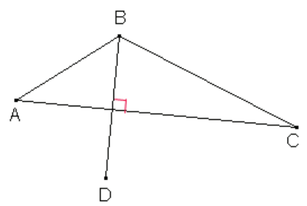
127. Profesora: […] Varios grupos mencionan que la altura es un segmento perpendicular (escribe en el tablero) ¿Tú hiciste segmento perpendicular? (Pregunta a un estudiante). ¿Sí? Déjame ver (mira el trabajo que hizo su grupo en la calculadora) Perfecto, pasa un minuto.

El estudiante muestra su construcción y verifica que el segmento construido como altura sí es perpendicular al otro segmento (lado del triángulo). Pero cuando usa el arrastre para verificar si siempre se cumple esta propiedad, todos los estudiantes descubren que su espacio de ejemplos era reducido (Watson y Mason, 2005).

128. Profesora: ¿Y qué pasa?

129.	Estudiante 11:	Cuando el ángulo C es obtuso ya no es perpendicular a ese segmento.
130.	Profesora:	Se desaparece ese segmento, ¿no? Se desaparece el segmento. Entonces, viene mi primera pregunta. ¿Es que la altura no… en este caso, en esta zona donde se desaparece… no es con vértice en B sino que la tengo que hacer desde otro vértice?

Luego discuten sobre las razones por las cuales desaparece la altura cuando el ángulo es obtuso y se ve la necesidad de referirse, en la definición, a la recta que contiene el lado opuesto. Así surge la siguiente definición: "Dado un vértice de un triángulo y el lado opuesto, la altura es el segmento perpendicular a la recta que contiene el lado opuesto con extremo en ese vértice". Al representar lo que describe la definición, ven que es una definición incorrecta (Govender y de Villiers, 2002) porque puede ocurrir el siguiente caso, donde el $\overline{BD}$ cumple las condiciones pero no es altura.



Viendo que es necesario agregarle una condición que se refiera al otro extremo del segmento, la definición queda de la siguiente manera: "Dado un vértice de un triángulo y el lado opuesto, la altura es el segmento perpendicular a la recta que contiene el lado opuesto con un extremo en ese vértice y el otro extremo en un punto de dicha recta".

El proceso anterior dio lugar a la construcción a priori de una definición económica (Calvo, 2001; de Villiers, 1998) porque se fueron añadiendo propiedades relevantes, producto de la argumentación acerca de la definición y sobre los contraejemplos. Lo anterior es un ejemplo de una aproximación a una definición que favorece la articulación entre la imagen conceptual y la definición del concepto a través de la argumentación.

REFERENCIAS

Boero, P., Douek, N. y Ferrari, P.L. (2008). Developing mastery of natural language. En L.D. English (Ed.), *International handbook of research in mathematics education* (pp. 262-295). New York, EUA: Routledge.

Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y demostraciones en cursos preuniversitarios de cálculo diferencial e integral* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra, Barcelona, España.

Chassapis, D. (1998). The mediation of tools in the development of formal mathematical concepts: The compass and the circle as an example. *Educational Studies in Mathematics*, *37*(3), 275-293.

Govender, R. y de Villiers, M. (2002). *Constructive evaluation of definitions in a sketchpad context*. Presentado en Associated Mathematics Educators of South Africa AMESA 2002, University of Natal, Durban, South Africa.

Hershkowitz, R. y Vinner, S. (1982). Basic geometric concepts - definitions and images. En A. Vermandel (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 18-23). Anthwerp, Bélgica: Universitaire Instelling Antwerpen.

Kublikowski, R. (2009). Definition within the structure of argumentation. *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric*, *16*(29), 229-244.

Leitão, S. (2007). Processos de construção do conhecimento: A argumentação em foco. *Pro-Posições*, *18*(3), 75-92.

Samper, C., Molina, Ó. y Echeverry, A. (2011). *Elementos de geometría*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Villiers, M. de (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 11-18.

Villiers, M. de (1998). To teach definitions in geometry or teach to define. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 248-255). Stellenbosch, Sudáfrica: University of Stellenbosch.

Villiers, M. de (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *35*(5), 703-724.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Netherlands, Holanda: Springer.

Watson, A. y Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Mahwah, EUA: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.