TENSIONES Y NEGOCIACIONES DEL PROFESOR CUANDO INSTALA UN TEOREMA: UN EJEMPLO EN GRADO NOVENO

Camilo Sua y **Óscar Molina**
Universidad Pedagógica Nacional
jcsuaf@pedagogica.edu.co, ojmolina@pedagogica.edu.co

Se presenta un avance del trabajo de grado que desarrollo para optar por el título de maestría en docencia de las matemáticas. El trabajo se enfoca en la reflexión sobre mi práctica profesional vista desde la Teoría de la Racionalidad Práctica. Analizo un episodio de clase a la luz de tal teoría, apoyándome en uno de sus elementos: la situación instruccional que, para el caso, es la instalación de un teorema. Explicito las normas que de suyo surgen en una situación tal y amplío este conjunto de normas desde el análisis realizado.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En la última década, la investigación en educación matemática ha mostrado un interés por el estudio de la práctica reflexiva del profesor (Perry, Andrade, Fernández y Perry, 2000). Estos autores señalan que las reformas educativas y los resultados poco favorables, fruto de las mismas, han sugerido considerar elementos dentro del aula –el profesor y sus acciones– dado que es él quien influye de manera más directa en el desarrollo académico de los estudiantes. La práctica reflexiva del profesor de matemáticas se convierte, entonces, en un mecanismo con el cual analizar las acciones del profesor y un medio que le posibilita mejorar su práctica profesional. Con el fin de examinar al profesor inmerso en su práctica, adoptaré la Teoría de la Racionalidad Práctica propuesta por Herbst y Chazan (2011). Según esta teoría, las acciones del profesor se justifican en el marco de situaciones específicas y normas que estas situaciones sugieren (Miyakawa y Herbst, 2007). Debido a que mi asunto de interés se centra en las acciones del profesor que determinan un ambiente de clase que favorece la actividad demostrativa, conviene adoptar esta teoría por cuanto propone la caracterización de una situación similar a la que consideraré en este documento: la instalación de un teorema (Herbst y Nachlieli, 2006).

Aquí destaco una tensión que enfrenta un profesor de matemáticas como consecuencia de las acciones que realiza al momento de instalar un teorema con

Sua, C. y Molina, Ó. (2013). Tensiones y negociaciones del profesor cuando instala un teorema: un ejemplo en grado noveno. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 267-274). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

un grupo de estudiantes que trabajan bajo una aproximación metodológica específica. Expongo las normas que caracterizaron la interacción de los miembros de una clase bajo una secuencia didáctica específica, y la manera en que el profesor resuelve dicha tensión para cumplir con los objetivos que tenía en mente al momento de proponer la actividad.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

La *práctica reflexiva* es un mecanismo con el cual puedo mejorar mi práctica profesional de manera significativa (Perry, Andrade, Fernández y Perry, 2000). Un primer paso en el proceso de mejoramiento, fundamental además, es identificar un problema en el aula que surge como producto de mis actos; en tal sentido, cobra significado estudiar las acciones que como profesor realizo en el aula en el marco de una situación y con un objetivo educativo específico. Desarrollar este estudio implica comprender los asuntos que permean mi práctica docente y pueden llegar a ser objetos de reflexión. Es pertinente trabajar sobre una base teórica con la que pueda analizar los componentes que regulan mi ejercicio profesional. Describo a continuación la teoría que usaré.

La Teoría de la Racionalidad Práctica (TRP en adelante) se enmarca en un enfoque teórico que concibe la enseñanza de las matemáticas como una práctica determinada por las relaciones que se crean entre profesor, estudiantes y el conocimiento matemático. Esta teoría considera la enseñanza a la luz de tensiones, problemas y dilemas que permean la labor del profesor. La TRP se apoya en constructos que explican las relaciones que se dan en el aula, entre sus miembros, en relación al contenido matemático y las tensiones que surgen en el profesional en ejercicio de su labor. Propone diversos elementos para describir estos asuntos. Aquí me interesa considerar: las *situaciones instruccionales* y las *normas* asociadas a ellas. Por *normas* entenderé una tendencia o costumbre central, con respecto a la cual todas las acciones desarrolladas en el aula tienen cierta cercanía (Miyakawa y Herbst, 2007). Aunque algunos momentos de la clase tienen un conjunto amplio de normas, orientadas al profesor y a la labor del estudiante, es posible que ellos las incumplan (Moore-Russo y Weiss, 2011) y así, el profesor deba tomar decisiones encaminadas a cumplir sus objetivos institucionales (i.e., agenda y contenido matemático).

Las *situaciones instruccionales* (simplemente situaciones) definen fragmentos de clase como unidades de trabajo con un conjunto de acciones para sus miembros, y con las que se pone en juego cierto conocimiento matemático

(Herbst, 2006). Las situaciones comprenden ciertas normas, por lo tanto, pueden verse como una forma normativa de realizar ciertas acciones (Miyakawa y Herbst, 2007). Así, normas específicas pertenecerán a situaciones específicas, y las normas regularán lo que se espera que hagan profesor y estudiante en el marco de alguna actividad. Esto no significa que las situaciones, vistas como un conjunto de normas, determinen una única forma de actuar en clase. Algunos experimentos (Herbst, 2003) muestran cómo ciertas normas pueden variar, y examinan las razones por las que esto ocurre, justificando así este hecho. Sin embargo, ¿siempre se desarrollan estas situaciones de manera apropiada? o en particular, ¿de qué manera se promueven estas normas entre los miembros? En el desarrollo de las situaciones es posible que surjan eventualidades que el profesor no había considerado al momento de planificar alguna actividad (Herbst, 2003). Estas eventualidades crean *tensiones*[1] en el profesor frente a su práctica profesional, tensiones por la necesidad de cumplir una agenda institucional. Adicionalmente, al plantear una actividad que promueva un significado matemático, el profesor debe establecer normas y condiciones con las se comprometerán los miembros para el desarrollo de la actividad. Las *negociaciones* refieren a la toma de decisiones del profesor en cada uno de los momentos presentados anteriormente (Herbst y Chazan, 2011). Para Herbst (2006), establecer condiciones de trabajo en clase incluye que el profesor negocie con sus estudiantes tanto los significados matemáticos en juego como el contexto instruccional en que estos significados surgirán.

CONTEXTO DEL ESTUDIO

El episodio que discutiré tuvo lugar en un curso de noveno grado (estudiantes de 14 a 16 años) durante el desarrollo de una secuencia didáctica cuyo objetivo era la construcción de un sistema teórico local asociado al objeto par lineal. Aquí informo sobre la instalación de un teorema.

METODOLOGÍA DE ESTUDIO

El desarrollo del estudio se estructuró en tres fases: diseño de una secuencia didáctica –incluidos los problemas para proponer a los estudiantes; gestión de

---

[1] Herbst (2003) menciona tres tensiones del profesor frente a las diversas formas de solucionar una tarea por parte de los estudiantes. Estas tensiones se relacionan con la forma en que se orienta la actividad de los niños, la representación de los objetos matemáticos en juego y la forma en que la tarea debe provocar unas acciones conceptuales específicas.

la clase con base en la secuencia; análisis de la gestión del profesor frente a la producción de los estudiantes. Se filmó el desarrollo de la clase y se transcribieron los fragmentos de la grabación que interesaba estudiar. Para las dos primeras fases tuve en cuenta la aproximación metodológica[2] para la enseñanza propuesta por el grupo *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, Æ.G,* de la Universidad Pedagógica (Colombia): particularmente me apoyé en Samper, Perry, Camargo y Molina (evaluación) para el diseño de tareas, y en Perry, Samper, Molina, Camargo y Echeverry (2012) para la forma de intervención del profesor al establecer normas de interacción entre los miembros de la clase. Haciendo eco a tal aproximación metodológica, en este estudio investigativo, particularmente, en el trascurso de la interacción, el profesor avanzaba por cada grupo observando las estrategias utilizadas por cada uno sin ofrecer puntos de vista frente a la pertinencia o no del trabajo realizado. Al finalizar la tarea, el profesor escogía un grupo para que socializara su proceso de solución y los demás grupos apoyaban o refutaban las ideas expuestas. Sobre el análisis generado frente a los resultados obtenidos, tuve en cuenta los constructos de la TRP que querían destacarse en los episodios grabados.

ANÁLISIS DE DATOS

La situación propuesta consiste en formular una definición para ángulos par lineal y dos hechos geométricos que se derivan de ella[3]. Para su desarrollo, los estudiantes contaron con ángulos de distinta medida formados en cartón. Este episodio corresponde a la situación: *instalar un teorema* (Miyakawa y Herbst, 2007). El desarrollo de la clase permitió observar cinco momentos de interacción, que describo a continuación.

En torno a…	**Finalidad y logros obtenidos**
Definir ángulos par lineal	Proponer de forma colectiva una definición aceptada por los miembros. Un grupo expone su definición, los otros apoyan o no sus ideas y

[2] El grupo plantea tal aproximación metodológica para la enseñanza de la actividad demostrativa, actividad conformada por dos procesos: el de conjeturación, cuyo producto es una conjetura; y el de justificación, cuyo producto es la explicación, prueba o demostración del enunciado conjeturado (Molina, Samper, Perry y Camargo, 2011).

[3] Los hechos geométricos considerados son: *La suma de las medidas de dos ángulos par lineal es igual a 180* y "*Si un ángulo es recto, el ángulo que forma par lineal con él también es recto.*

	el profesor orienta las ideas que emergen en el diálogo.
Explorar una situación	Se proveen a los grupos varios ángulos, con sus medidas, para que solucionen la tarea: Utilizando los ángulos hechos en cartón, encontrar parejas que formen ángulos par lineal.
Conjeturar una relación	Usando las parejas de ángulos que formaban par lineal, se observa que la suma de sus medidas es 180. Esta conjetura es mediada por el profesor frente al lenguaje y la estructura de la proposición condicional.
Conjeturar una segunda propiedad	El profesor propone la tarea: Si un ángulo es recto, ¿qué podemos decir sobre el ángulo que forma par lineal con él? Justifique su respuesta. Se pretende que los estudiantes tengan un primer acercamiento a la justificación de una conjetura.
Argumentar para apoyar conjetura	Dos grupos exponen sus resultados frente a la tarea. Los grupos plantean distintos argumentos en su producción.

Tabla 1: Momentos identificados en el desarrollo de la clase

Del primer momento se obtienen las condiciones de la definición: *dos ángulos que comparten un lado y los otros dos determinan rayos opuestos*. Con este resultado se pasa a la exploración de una situación y luego a la formulación de una conjetura. Presentamos un fragmento del diálogo entre profesor y estudiantes que ilustra un evento que tuvo lugar en los grupos de trabajo.

1. P: ¿Cómo hacen para saber que sí cumplen la condición? [Refiriéndose a que los dos ángulos forman par lineal]
2. E1: Porque comparten un mismo rayo y dan 180. [Realizan un gesto con los dedos indicando que los otros dos rayos son opuestos].
3. P: Yo no he dicho 180. ¿No?
4. E2: Pero ahí está en las condiciones.
5. P: Pero miren que las condiciones establecidas no incluyen eso.
6. E2: Ah, forman rayos opuestos.
7. E1: Forman dos ángulos.
8. P: son dos ángulos
9. E1: Sí. Son dos ángulos.

En otro grupo surge el siguiente diálogo:

1. P: ¿Cómo hacen para saber que sí cumplen…?
2. E4: Sumando los dos ángulos.
3. P: ¿Sumándolos? Pero…
4. E3: No. Y que formen los rayos opuestos.
5. E4: Como es una recta [hablando de los rayos opuestos], entonces la recta tiene 180 grados. Entonces es un ángulo de 180 grados

Durante la exploración surge una *tensión* en el profesor frente a la forma en que los estudiantes solucionan la tarea. Ellos justifican su desarrollo usando lo que debe concluirse y dejan de lado la definición previamente construida. Se genera una inconsistencia entre lo que el desarrollo de la tarea "debería" promover y lo que los estudiantes realizaron para solucionarla. Las acciones del profesor son *negociaciones* hacia una consideración exclusiva de la definición. Esto se justifica en cuanto la definición de par lineal es el único elemento teórico, útil para este caso, que se ha establecido en la comunidad. Esta forma de actuar, la avalan las *normas* que la *actividad demostrativa* promueve (Molina, Samper, Perry y Camargo, 2011). La conjetura que resulta de este trabajo se enuncia así: *Si dos ángulos son par lineal, la suma de sus medidas es 180.*

La tarea propuesta tiene como finalidad instalar, para la clase, un teorema, esto es, conocer un teorema antes desconocido. Esta situación involucra dos normas (Herbst, 2007): (i) asumir una afirmación como verdadera y (ii) justificarla dentro de una teoría; esta última norma se puede precisar atendiendo la propuesta del grupo Æ . G en cuanto que la justificación realizada debe darse en un sistema teórico local aceptado por la comunidad (Molina, Samper, Perry y Camargo, 2011). En el episodio que se consideró, el profesor no recurre a la justificación formal de esta conjetura. En su lugar, se valida que los rayos opuestos de los ángulos par lineal determinan una recta. Este hecho, junto a la idea primitiva de los estudiantes sobre "ángulos llanos" y su medida igual a 180º, permite justificar informalmente la conjetura obtenida. Justificamos esta acción del profesor dado que la definición de ángulos par lineal es el único elemento teórico hasta ahora construido en el curso y por lo tanto no hay elementos conceptuales con los que pueda estructurarse esta conjetura a la luz de otros hechos geométricos aceptados.

La gestión del profesor en relación con este problema permitió ver otras normas, diferentes a las que propone la teoría sobre *instalar un teorema*. A continuación las exponemos:

Según Miyakawa y Herbst (2007)	Los miembros de la clase deben ver la validez de una proposición. La proposición debe ser justificable dentro de una teoría compartida.	
Según el episodio analizado	*Para los estudiantes*	*Para el profesor*
	Interactuar con sus compañeros para promover la discusión de hechos geométricos	Interactuar con grupos desde la observación de las estrategias utilizadas en la solución de una tarea. No brindar soluciones o correcciones a lo desarrollado por los estudiantes.
	Proponer conjeturas y justificación a las mismas apoyados únicamente en lo que se ha asumido como aceptado.	Mediar entre las propuestas de los estudiantes y el uso de un lenguaje adecuado y correcto.
	Discuten frente a lo que los grupos proponen como solución de la tarea.	Favorecer la discusión invitando a distintos grupos a exponer sus ideas.

Tabla 2: Normas relativas a la actividad de instalar teoremas en clase

CONCLUSIONES

Este estudio parcial permite observar dos asuntos interesantes al considerar la TRP. En primer lugar, permitió analizar un episodio de clases bajo el constructo de *situaciones*. Con ello fue posible observar y analizar algunas acciones realizadas por los miembros frente al desarrollo de un problema y explicar tensiones que enfrenta el profesor en el desarrollo de su práctica. En segundo lugar, detectar otras normas no explicitas por la TRP. La Tabla 2 ilustra, para profesor y estudiantes, tres normas adicionales dadas bajo la aproximación del grupo $\mathcal{Æ}$. $\mathcal{G}$. Sugiero que estas normas emergentes son producto de tal aproximación. Las acciones desarrolladas para instalar un teorema desde esta aproximación involucran más compromisos para los miembros; estas normas son establecidas por el profesor principalmente. Este resultado sugiere puntos de discusión, a saber: ¿las normas son preestablecidas por la aproximación metodológica o surgen en el desarrollo de ésta?, ¿pueden establecerse previamente las tensiones que emergen en el profesor de manera tal que en las planeaciones de clase éstas sean consideradas? y finalmente, ¿puede el objetivo de la tarea ser desvirtuado en cierto punto de la negociación producto de las tensiones surgidas?

REFERENCIAS

Herbst, P. (2003). Using novel tasks in teaching mathematics: Three tensions affecting the work of the teacher. *American Educational Research Journal, 40*(1), 197-238.

Herbst, P. (2006). Teaching geometry with problems: Negotiating instructional situations and mathematical tasks. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(4), 313-347.

Herbst, P. y Chazan, D. (2011). Research on practical rationality: Studying the justification of actions in mathematics teaching. *The Mathematics Enthusiast, 8*(3), 405-462. Recuperado de http://www.math.umt.edu/tmme/vol8no3/HerbstChazan_TME2011_article1_pp.405_462.pdf

Herbst, P. y Nachlieli, T. (2006). "*Installing*" *a theorem in high school geometry: How and when can a teacher expect students to use a theorem?* En S. Alatorre, J.L. Cortina, M. Sáiz y A. Méndez (Eds.) *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 241-242). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Miyakawa, T., y Herbst, P. (2007). Geometry teachers' perspectives on convincing and proving when installing a theorem in class. En T. Lamberg y L.R. Wiest (Eds.), *Proceedings of the 29th annual meetings of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 366-373). Statelin, EUA: University of Nevada.

Molina, O., Samper, C., Perry, P. y Camargo, L. (2011). *Actividad demostrativa: participar en la producción de un teorema. Revista Integración*, *29*(1), pp. 73-96

Moore-Russo, D. y Weiss, M. (2011). Practical rationality, the disciplinary obligation, and authentic mathematical work: A look at geometry. *The Mathematics Enthusiast, 8*(3), 463-483.

Perry, P., Andrade, L., Fernández, F. y Perry, R. (2000). *Elementos para una conceptualización de la reflexión del profesor de matemáticas acerca de su práctica*. Manuscrito no publicado, "una empresa docente", Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

Perry, P., Samper, C., Molina, Ó., Camargo, L. y Echeverry, A. (2012). La geometría del ángulo desde otro ángulo: una aproximación metodológica alternativa. *Épsilon, 29*(3), pp. 41-56.

Samper, C., Perry, P., Camargo, L. y Molina, Ó. (evaluación). *Innovación en un aula de geometría de nivel universitario*, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.