SIGNOS Y MATEMÁTICA: UN POCO DE HISTORIA

Patricia Sastre Vázquez, Carolina Boubée, Viviana Scempio
Facultad de Agronomía. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires Argentina
psastre@faa.unicen.edu.ar, cboubee@faa.unicen.edu.ar, vivianas@faa.unicen.edu.ar

Resumen. El presente trabajo forma parte de la primera etapa del Proyecto de Investigación *Análisis del Lenguaje Matemático y su influencia en los procesos de Validación en estudiantes universitarios de Ingeniería*, que se realiza de manera conjunta entre la Facultad de Agronomía de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (Azul, Argentina), y la Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica Argentina (Rosario, Argentina). Desde el punto de vista de la comunicación, la característica más importante de la Matemática es su lenguaje riguroso, el cual está ligado al hecho de que sus conceptos son entes abstractos, cuyas representaciones están determinadas tanto por la semiótica como por la noética (Duval, 2000). Se hace fundamental, entonces, explorar y clarificar los distintos significados que se le pueden asignar a los símbolos matemáticos, tanto desde la semiótica como desde la propia Historia de la Matemática, lo cual constituye el objetivo central de este artículo.

Palabras clave: lenguaje matemático, historia, semiótica

Abstract. This paper is part of the first phase of Research Project Analysis of mathematical language and its influence on the processes of Validation Engineering college students, conducted jointly by the Facultad de Agronomía de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (Azul, Argentina), and the Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica Argentina (Rosario, Argentina). From the point of view of communication, the most important feature of mathematics is its rigorous language, which is linked to the fact that their concepts are abstract entities whose representations are determined by both semiotics as the noetic (Duval, 2000). It is therefore essential to explore and clarify the different meanings that can be assigned to mathematical symbols, both semiotics and from the History of Mathematics, which is the focus of this paper.

Key words: mathematical language, history, semiotics

Introducción

La tradicional clasificación de las ciencias en fácticas y formales (Bunge, 1980) se basa en la diferencia entre los objetos de estudio de las distintas ciencias. La Matemática y la Lógica, constituyen las denominadas ciencias formales, ya que tratan con entes ideales, abstractos. Las ciencias fácticas –Física, Química, Biología, Economía, Psicología, entre otras– recurren a la Matemática, empleándola como herramienta para abordar sus objetos de estudio, naturales o sociales, y reconstruir las complejas relaciones que se dan entre distintos hechos y procesos. Así, estas ciencias son usuarias de la Matemática, pero también contextualizan y dan sentido a los objetos matemáticos. Este nexo entre ciencias fácticas y formales, entre entes reales e ideales, se establece a través del puente del lenguaje.

La Matemática utiliza distintos tipos de lenguajes para representar los objetos abstractos que le son propios. En el caso de esta ciencia, y también de la Lógica, el lenguaje requerido para su comunicación es formal o simbólico. Duval (1993, p. 1) reconoce que “existe una palabra a la vez importante y marginal en Matemáticas, [que] es la palabra `representar´. Una escritura, una notación, un símbolo, representan un objeto matemático: un número, una función, un vector…”.

El lenguaje riguroso de la Matemática es una de sus características más importantes para su comunicación y aprendizaje. Sus conceptos son entes abstractos cuyas representaciones están determinadas tanto por la semiótica como por la noética (Duval, 2000) y por lo tanto las relaciones de los símbolos y signos dependen del dominio conceptual en el que se encuentren. Las expresiones matemáticas son registros semióticos que determinan significados (semántica), más allá de su representación (sintáxis). Estos significados están mediados por conceptos fundamentales que son la base de la construcción del saber matemático.

Estas singularidades de la Matemática y su lenguaje impactan fuertemente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta ciencia. En general, al comenzar sus estudios universitarios los alumnos presentan numerosas dificultades. Uno de los problemas más notables que muestran los estudiantes al abordar asignaturas con contenidos matemáticos es la falta de apropiación de su lenguaje simbólico.

Lo antes mencionado fundamenta, en parte, el Proyecto de Investigación en que se enmarca este trabajo, cuyo título es *Análisis del Lenguaje Matemático y su influencia en los procesos de Validación en estudiantes universitarios de Ingeniería*, que se realiza de manera conjunta entre la Facultad de Agronomía de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (Azul, Argentina), y la Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica Argentina (Rosario, Argentina). Con el desarrollo del proyecto se pretende, entre otros objetivos, explorar qué idea tienen los docentes de Matemática de carreras universitarias de Ingeniería sobre el lenguaje matemático y la epistemología de esta ciencia; estudiar la utilización que hacen los docentes del lenguaje matemático en el ámbito áulico; y analizar el nivel de conocimiento del lenguaje matemático con el que acceden los estudiantes a la Universidad. Para cumplimentar estas metas se plantea en el proyecto una etapa inicial abocada principalmente a la revisión bibliográfica y a la construcción de un corpus teórico sobre los conceptos de *concepciones, creencias, nociones implícitas, y explícitas, lenguaje, historia y epistemología de la Matemática* y cuyos resultados parciales, vinculados fundamentalmente a los últimos conceptos mencionados, se presentan en este artículo.

Qué se entiende por símbolo matemático y cómo ha evolucionado su interpretación, requiere un análisis semiótico y también histórico. Debemos entender que el progreso de las ideas no se da en el tiempo de manera lineal, a través de una trayectoria perfectamente delineada y preconcebida; existen muchos elementos que en el camino son descartados, reformulados o añadidos, incluyendo por supuesto la adopción o rechazo de un sistema simbólico.

Signos y matemática

Podemos decir que lo que se denomina "lenguaje matemático" está compuesto tanto por lenguaje natural como por un sistema simbólico, que puede descomponerse en escrituras simbólicas y representaciones compuestas (que incluyen escrituras simbólicas, dibujos, lenguaje natural, relacionados entre sí). Para discutir al respecto, debemos clarificar ciertos términos e intentar precisar los significados que se les atribuyen.

La semiótica estudia los procesos de significación y de comunicación de los sistemas de signos, más que los signos propiamente dichos. Esto queda claro en la semiótica tal como la desarrolló Charles Sanders Peirce, quien dio un sinnúmero de definiciones de 'signo' a lo largo de su extensa obra. Su definición más breve y compacta de signo data de 1873: "Un signo es un objeto que está en el lugar de otro para alguna mente" (Puig, 2003, p.175). En otra definición, posterior a la citada, expresa que signo "es cualquier cosa que determina alguna otra (su interpretante) para que se refiera a un objeto al cual él mismo se refiere (su objeto); de la misma manera el interpretante se convierte en un signo, y así *ad infinitum*" (Peirce, 1987, p. 274). Así, podemos decir que el signo fuerza al interpretante a referirse al mismo objeto al que él se refiere, y además de la misma manera que él se refiere. Todo signo forma parte de una relación triádica, junto con su objeto y una mente en la que se produce la cognición o *interpretante.*

Peirce clasifica los signos en tres tipos: íconos, índices y símbolos:

> Existe una triple conexión del *signo*, la *cosa significada* y la *cognición producida por la mente*. Puede haber una simple relación racional entre el signo y la cosa; en este caso, el signo es un *ícono*. O bien puede haber una conexión física directa; en ese caso, el signo es un *índice*. O bien puede haber una relación que consiste en que la mente asocia el signo con su objeto; en ese caso el signo es un *nombre* (o *símbolo*). (Peirce, 1987, p. 175)

Dentro del estudio de la semiótica, que aborda el análisis de los signos en general, no sólo los lingüísticos, se encuadran los procesos de significación y comunicación, esenciales en el campo de la Matemática.

Es muy común que se haga referencia a las expresiones algebraicas como "lenguaje simbólico"; por ejemplo, cuando se pide plantear un problema en término de ecuaciones, se describe usualmente como "paso del lenguaje natural al lenguaje simbólico". Sin embargo, si usamos la terminología de Peirce, las expresiones algebraicas no son símbolos, sino que son íconos.

En términos de Peirce (1987):

> (…) Una fórmula algebraica es un ícono, que ha sido convertido en tal mediante las reglas de conmutación, asociación y distribución de los símbolos. (…) Porque una gran propiedad distintiva de los íconos es que mediante su observación directa se pueden descubrir otras verdades concernientes a su objeto que no son las que bastan para determinar su construcción. (…) Esta capacidad de revelar una verdad inesperada es precisamente aquello en que consiste la utilidad de las fórmulas algebraicas, por lo cual el carácter icónico es el predominante. (Peirce, 1987, p.263)

Las expresiones algebraicas son, entonces, íconos y esto es lo que precisamente las hace poderosas, ya que como signos tienen las propiedades que tienen sus objetos. De todos modos, los signos que se usan en Matemática no son todos ellos de naturaleza lingüística, por lo tanto no es recomendable utilizar solamente la terminología ni la concepción del *signo* propia de la lingüística, o al menos, no de manera excluyente. Es por esto que se suele utilizar el término "expresión" del par expresión/contenido, empleado también por la semiótica, que además resulta conveniente ya que en Matemática es común hablar de "expresiones algebraicas" o de "expresiones aritméticas" al referirse a las escrituras correspondientes.

Ciertamente, en Matemática, los signos poseen un carácter relativo, ya que un signo no es siempre un ícono, un símbolo o un índice. Más bien, un signo es *utilizado* como ícono, símbolo o índice (Panizza y Drouhard, 2001). Poner el acento en los signos individuales nos puede ocultar el hecho crucial de que en ningún texto (matemático o de otro tipo) hay signos aislados. Por esto, lo que es esencial es el sistema de signos tomado en su conjunto y lo que hay que calificar de matemático es el sistema y no los signos, porque es el sistema el responsable del significado de los textos. "Hay que hablar pues de sistemas matemáticos de signos y no de sistemas de signos matemáticos, subrayando con la colocación del adjetivo 'matemáticos' que lo que tiene el carácter matemático es el sistema y no meramente los signos individuales" (Puig, 2003, p.181).

No debemos olvidar que el "lenguaje" matemático se compone de lenguaje natural, lenguaje formal y representaciones no lingüísticas. Los signos abstractos residen dentro de un sistema complejo de reglas y relaciones internas que hacen posible la comunicación, y también la creación, de ideas matemáticas poderosas. Para Duval la habilidad para cambiar de registro de cualquier representación semiótica ocupa un lugar central en el aprendizaje de la Matemática. Entiende por representaciones semióticas a las "producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significado y de funcionamiento" (Duval, 1993, p.1). Estas representaciones no son sólo útiles para fines de comunicación, sino que también son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento. Para este autor, el aprendizaje de la Matemática consiste en la producción de representaciones mentales como internalización de representaciones semióticas, evidenciando así el papel fundamental de las representaciones en la Matemática. La aprehensión conceptual de un objeto depende del acceso a la diversidad de sistemas semióticos para describirlo, y a la articulación entre los mismos. Pero, los signos o símbolos utilizados por la Matemática, no siempre han sido como hoy los conocemos. Como toda producción humana, evoluciona, se transforma, se adapta. A medida que las diferentes civilizaciones avanzaron en la utilización de la Matemática, los simbolismos utilizados se hicieron cada vez más avanzados. Esto justifica y requiere una breve reseña histórica del surgimiento de algunos signos matemáticos utilizados en la actualidad.

Haciendo un poco de Historia

La adopción de los símbolos matemáticos, se basa en una adquisición paulatina de un mayor pragmatismo, según las distintas culturas. El desarrollo de la notación matemática, asociado a la evolución del Álgebra –rama de la Matemática cuyo lenguaje privilegiado es el simbólico–, puede dividirse en tres etapas. Florian Cajori, uno de los historiadores de la Matemática más reconocido, distingue en su obra *A History of Mathematical Notations* (1928), los siguientes períodos.

- La primera etapa se denomina "Álgebra Retórica". No se utilizan abreviaturas, ni símbolos especiales; se usa el mismo lenguaje escrito. Los cálculos se realizan por medio de palabras y símbolos de uso común. Corresponde a la época paleobabilónica, entre 2000 y 1600 a. C., y la mayoría de los matemáticos islámicos medievales pertenecían a esta etapa.
- El segundo período corresponde al "Álgebra Sincopada". Este término lo ideó Nesselman en 1842. Para representar cantidades y operaciones se emplean abreviaturas simbólicas. Se utilizan ya algunos términos técnicos y abreviaturas. Un ejemplo de esta etapa está dado por la *Aritmética* de Diofanto, que data del siglo III, pero se extiende también a los trabajos árabes tardíos y de algunos europeos hasta el XVII.
- Finalmente, la tercera etapa es el "Álgebra Simbólica". Involucra un sistema completo de notación, todo se expresa a través de símbolos, y es un Álgebra mucho más parecida a la actual. Su mayor representante es Viète o Vieta (1540-1603), quien la denominó "Nueva Álgebra".

En las siguientes tablas presentamos sucintamente la historia del surgimiento y adopción de algunos símbolos matemáticos. Cabe aclarar que numerosos autores (Alfonso García, 2009; Dávila Rascón, 2002; Méndez Pérez, 2003; Ríbnikov, 1987) abordan esta temática, motivo por el cual aquí presentamos una breve selección, de manera ilustrativa, no exhaustiva del tema. El recorte lo hemos realizado en función de los signos más utilizados en las asignaturas en que se contextualiza la investigación que da marco al presente trabajo.

Igual =
Este signo se debe a Robert Recorde (1510-1558), que empezó a utilizarlo en 1557. Es probable que ningún otro signo matemático haya tenido, a lo largo de la historia, tantos competidores como éste. Antes de la implantación del signo "igual" tal y como lo conocemos actualmente se utilizaron palabras como *aequales*, *esgale* o *faciunt*, para indicar la igualdad entre dos cosas. Para escribir A = B, Viète escribía *A aequale B*, y algunos autores lo escribían de forma abreviada *A aeq. B*. El autor afirma que eligió ese símbolo porque dos cosas no pueden ser más iguales que dos rectas paralelas. Su uso se generalizó hacia finales del siglo XVII.
Menor, Mayor, Incluido, Pertenece < > $\subset \in$
Se deben a Thomas Harriot (1560-1621). Los utilizó en su libro póstumo *Artis Analyticae Praxis ad aequationes Algebraicas Resolvendas* (1631). Una variante del signo < ("menor que"), es el signo $\subset$ ("incluido en") que, a diferencia del primero que indica relación entre números, se utiliza para indicar la inclusión entre conjuntos. Fue introducido por Ernst Schröder, en 1890. En una fecha cercana, 1895, Peano utiliza la letra griega épsilon estilizada, $\in$, para indicar la pertenencia de un elemento a un conjunto. Los símbolos actuales para representar, no igual, no mayor que, no menor que, se deben a Euler (1707-1783).

Tabla 1: Símbolos de relaciones

Conjunción disyuntiva $\vee$
Este símbolo es utilizado en Lógica para indicar la conjunción disyuntiva 'o'. Se usa por ser 'v' la inicial de la conjunción disyuntiva latina *vel.* El primer uso se remonta a los *Principia Mathematica* (1910) de Whitehead y Russell, aunque ya Peano, en su *Formulaire de Mathématiques* (1895), usaba el signo $\cup$, de manera semejante.
Conjunción copulativa $\wedge$
Este símbolo es utilizado en lógica para indicar la conjunción copulativa 'y'. No es claro su origen, pero se considera que se eligió por ser la inversión del signo empleado para la disyunción. También es de señalar que Peano, en su *Formulaire de Mathématiques* (1895), usaba el signo $\cap$.

Tabla 2: Símbolos de Lógica

Suma y resta + –
El texto más antiguo que se conoce en el que aparecen estos signos con el sentido de suma y resta es un tratado de Aritmética Mercantil del alemán Johannes Widmann (1489-1526). De todos modos, el signo "más" ya fue utilizado por Nicole Oresme (1325-1382) en *Proportionum Algorismus*, aproximadamente en el año 1360, posiblemente como una abreviatura de "et", que equivale a nuestro "y" (conjunción copulativa).

Producto $\times \cdot$
El símbolo $\times$ para la multiplicación parece ser original de Oughtred (1574-1660), y data del 1631, aunque es uno de los signos que ha ido perdiendo su uso. El símbolo $\cdot$ para la multiplicación fue utilizado por Thomas Harriot (1560-1621), pero quien lo popularizó fue Leibniz (1646-1716). Este matemático era muy reacio a la utilización de este símbolo para denotar el producto, ya que decía que sería muy fácil confundirlo con la letra x (que ya se utilizaba para representar incógnitas).
División $\div$ /
Se utilizan varios signos para indicar la división. La barra horizontal, de origen árabe, ya era usada por Fibonacci en el Siglo XIII, aunque no se generalizó hasta el Siglo XVI. La barra oblicua, /, variante de la anterior para escribir en una sola línea, fue introducida por De Morgan (1806-1871), en 1845. En 1659 el suizo Johann Heinrich Rahn (1622-1676) creó para la división el signo $\div$, que resulta bastante gráfico, una vez que la barra de fracción ha sido adoptada. Los dos puntos se deben a Leibniz (1684), que los aconsejaba para aquellos casos en los que se quisiese escribir la división en una sola línea y la notación con raya de fracción no fuese por tanto adecuada. Este signo mantiene el parentesco de la división con la multiplicación, para la que Leibniz usaba un punto.
Exponente de una potencia x^n
El primero que colocó el exponente en una posición elevada con respecto a la línea base fue Chuquet en el siglo XV. Sin embargo, se lo colocaba directamente al coeficiente, de modo que $5x^2$, lo escribía como 5^2. En 1636 James Hume publicó una edición del álgebra de Viète en la que utilizó una notación prácticamente igual a la actual, excepto que para los exponentes utilizó números romanos. Así, $5x^2$ lo escribía como $5x^{ii}$. Sería Descartes (1596-1650) quien sustituyó en su obra *Geometrie* los incómodos numerales romanos por los indoarábigos, aunque para la potencia cuadrada no utilizó la notación elevada, sino que escribía, como muchos hasta entonces, x^2 como *xx*.
Raíz $\sqrt{\ }$
Este signo lo introdujo el matemático alemán Christoph Rudolff (1500-1545), en 1525. Euler conjeturó en 1775 que se trataba de una forma estilizada de la letra ***r***, inicial del término latino *radix,* "radical".

Tabla 3: Símbolos de operaciones

Incógnita o Variable x
Los símbolos *x, y, z* (las últimas letras del alfabeto) para representar incógnitas y las primeras para valores conocidos, fueron introducidos por Descartes, en su libro la *Geometrie.* Los árabes, para representar la incógnita, utilizaban el término *shay*, que quiere decir "cosa". En los textos españoles se escribió *xay*, que con el tiempo quedó sólo como *x*. Los egipcios le llamaban *aha*, literalmente "montón". Durante los siglos XV y XVI se le llamó *res* en latín, *chose* en francés, *cosa* en italiano o *coss* en alemán.
Notación funcional f(x)
Fue Johann Bernoulli (1667-1748) quien a finales del siglo XVII empezó a utilizar símbolos especiales para representar funciones. Más tarde, en 1718, simplificaría las cosas utilizando la letra griega φ ("fi"), precursora de nuestra "*f*", de modo que si φ era una función de *x* escribía φ*x*. Sería Euler, una vez más, quien en sus *Commentari* de San Petersburgo de 1734 utilizaría, como nombre genérico para las funciones, la letra "f" e indicar la variable entre paréntesis, logrando la expresión

f(x) que utilizamos en la actualidad.
Infinito matemático ∞
Este signo fue introducido por el matemático inglés John Wallis (1616-1703) en 1655, asociándolo a una sucesión de números que no tenía fin. Tiene forma de Lemniscata de Bernoulli (curva descripta por primera vez en 1694 por Jakob Bernoulli, como modificación de una elipse), y no se sabe qué guió a Wallis a adoptar esta forma, aunque puede considerarse una variante de uno de los símbolos que los romanos utilizaban para simbolizar el número mil.
Derivada *dy/dx* *f ´ (x)*
Los símbolos *dx*, *dy* y *dx/dy*, para derivadas, fueron introducidos por Leibniz. Reconocida es la creación del Cálculo Infinitesimal, de manera contemporánea, por Isaac Newton (1642-1727) y por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), pero primó la notación de este último, por sobre la del primero, que utilizaba los siguientes signos para las "fluxiones" $\dot{y}, \ddot{y},...$. Los símbolos *f ´(x)*, *f ´´(x)*, etc., para las derivadas, fueron introducidos por Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813), en 1797 en su *Théorie des fonctions analytiques*.
Sumatorio $\sum$
El uso de la sigma griega mayúscula se debe a Euler, que empezó a usarla en 1755 con estas palabras "summam indicabimus signo Σ". Parece claro que su elección se justifica en que sigma es la letra griega equivalente a la 's' de suma.
Integral $\int$
Este símbolo representa una S alargada, inicial de la palabra latina *summa*, que significa suma, lo cual hace referencia al hecho de que el concepto de integral, en principio, se desprende de la suma de las áreas de un conjunto de rectángulos cuyas alturas corresponden a valores de una función y cuyas bases tienen longitudes *infinitesimales*. Este símbolo fue usado por primera vez por Leibniz, en 1675.

Tabla 4: Símbolos de Cálculo

Conclusiones

Del análisis precedente podemos afirmar que la creación de los símbolos matemáticos se debe a necesidades concretas, y que éstos establecen con otros símbolos una fuerte competencia por la subsistencia. Incluso aquellos símbolos que acabaron por mostrar una indiscutible eficacia a lo largo del tiempo no fueron aceptados de manera espontánea ni inicialmente, sino que se incorporaron en el lenguaje matemático luego de años o siglos de conjeturas. El lenguaje matemático comprende una simbología y estructura que les son propias. La semiótica resulta útil para el estudio del lenguaje simbólico, propio de las ciencias formales, ya que aborda el análisis de los signos en general. De todos modos, este estudio no debe hacerse, únicamente, con las mismas estructuras de la semiótica, ya que los signos utilizados en Matemática no son todos de naturaleza lingüística. En Matemática, los signos poseen un carácter relativo, ya que un signo no es siempre un ícono, un símbolo o un índice, sino que es utilizado como tal. Es por esto que se debería hablar de sistema matemático de signos, y no de sistema de signos matemáticos.

El análisis semiótico e histórico de los signos matemáticos es necesario y útil para un conocimiento más profundo de las representaciones matemáticas. Consideramos deseable completar y continuar este estudio con análisis didácticos y cognitivos, en distintos contextos de enseñanza y aprendizaje para lograr un abordaje integral y complejo de esta temática.

Referencias bibliográficas

Alfonso García, M. J. (2009). *Álgebra: Notación, historia y aplicaciones. Innovación y Experiencias Educativas. Revista Digital*, 21.

Bunge, M. (1980). *La ciencia, su método y su filosofía*. Buenos Aires: Ed. Siglo Veinte.

Cajori, F. (1928). *A history of mathematical notations*. Chicago: Reimpresión de Dover, (1993).

Dávila Rascón, G. (2002). *Apuntes de Historia de las Matemáticas. Parte I: El álgebra en la antigüedad.* Recuperado el 05 de marzo de 2012 de http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/1-3-1-algebra.pdf

Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

Duval, R. (2000). *Representación, visión y visualización: Funciones cognitivas en el pensamiento matemático*. Lille: Université du Littoral Côte-d'Opale, Boulogne, et Centre IUFM Nord Pas-de Calais.

Méndez Pérez, J. M. (2003). *Las Matemáticas: su historia, evolución y aplicaciones*. Lección inaugural del Curso Académico 2003-04 en la Universidad de La Laguna. Recuperado el 05 de marzo de 2012 de: http://divulgamat2.ehu.es/.

Panizza, M. y Drouhard, J, PH. (2001). Producciones escritas y tratamientos de control en álgebra: algunas evidencias para pensar en interacciones posibles para guiar su evolución. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 15 (1), 207-212. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Peirce, C. S. (1987). *Obra lógico-semiótica*. Madrid: Taurus.

Puig, L. (2003). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. En E. Filloy, (Ed.). *Matemática educativa: aspectos de la investigación actual*, 174-186. México, DF.: Fondo de Cultura Económica / CINVESTAV.