LAS NOCIONES DE LINEALIDAD Y PROMEDIACIÓN COMO ELEMENTOS ARTICULADORES EN LA DIDÁCTICA

Juan Alberto Acosta Hernández, Carlos Rondero Guerrero, Anna Tarasenko
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo México
acostah@uaeh.edu.mx, crondero6@hotmail.com, anataras@uaeh.edu.mx

Resumen. Se considera que las nociones matemáticas tienen su origen en las ideas germinales que han surgido en diferentes momentos histórico-epistemológicos de la matemática. En la didáctica de la matemática las nociones tienen un papel preponderante como elementos articuladores de los saberes matemáticos que están en juego. En este trabajo se dan algunas evidencias del comportamiento epistemológico acerca de dos nociones: la promediación y la linealidad, las cuales no se perciben en la escuela en su estatus metamatemático. Aparecen en prácticamente todas las etapas escolares y su conceptualización en los diferentes niveles educativos es abordada de forma desarticulada, lo que propicia aprendizajes poco significativos.

Palabras clave: epistemología, cognición, nociones, linealidad, promediación

Abstract. It is considered that the mathematical notions have their origin in the germinal ideas that have emerged in different historical-epistemology moments of mathematics. In the didactic of mathematics the notions have a role as articulating elements of mathematical knowledge at stake. In this paper we give some evidences about epistemological behavior of two notions: the averaging and linearity, which are not seen in the school metamathematical status. They appear in practically every school and conceptualization stages at different educational levels and they are addressed in a disarticulated way, which fosters poorly significative learnings.

Key words: epistemology, cognition, notions, linearity, averaging

Introducción

Las nociones matemáticas han surgido de las *ideas germinales* desde distintos momentos históricos de la propia matemática. Algunas de las nociones que se han identificado son: *Linealidad* (Acosta, 2011) *Promediación* (Rondero, 2001), *Variación* (Cantoral, 1990), *Acumulación* (Cordero, 1994), entre otras. Se consideran a tales nociones como elementos fundamentales en la construcción de saber matemático. En particular el propósito de este trabajo es mostrar y caracterizar algunos significados de las nociones de *linealidad* y *promediación*.

En Acosta, (2011) se considera que la noción de *linealidad,* es un elemento básico en la construcción de saber matemático, partiendo de su antecedente conceptual la noción de *proporcionalidad*.

Por otra parte, se han proporcionado evidencias de que el antecedente de la noción de *linealidad* es la idea germinal, *ratio mutabilitas constant*, la cual denota una tasa de variación constante, lo que otorga significado intrínseco a objetos y conceptos matemáticos como: proporción directa, recta, dependencia e independencia lineal, transformación lineal.

En Rondero (2001), se identifican y resaltan las ideas germinales que se denominan *Ponderatio* y *Æquilibrium*, cuya interacción ha resultado importante en la constitución del conocimiento fisicomatemático. Y precisamente son ideas germinales porque en su propia génesis el conocimiento propiamente físico ha recurrido para su constitución al estudio del equilibrio como fenómeno y en la equilibración como ejecución de la acción de equilibrar, mientras que la génesis del conocimiento matemático se basa para su constitución en el estudio del promedio, entendido como la matematización del equilibrio y a la promediación como ejecución de la acción de promediar.

Las nociones en cuestión cumplen la función de articulación entre la matemática elemental y la matemática avanzada, al aportar elementos en general para su aprendizaje, lo cual es dado precisamente por sus características de ser nociones metamatemáticas.

Marco conceptual

El fundamento teórico está constituido por las interpretaciones acerca del término *noción* (un saber susceptible de ser enseñado en ámbito escolar), y de las *nociones didácticas* (Chevallard, 1997). Y desde una perspectiva teórica amplia, los ejes sobre los que ha girado la investigación son la Epistemología, la Cognición y la Didáctica. Se ha buscado, transitar dialécticamente entre estos tres ejes, es decir, uno a otro se han sustentado, complementado y apoyado, todo lo cual ha propiciado un enriquecimiento de la propia investigación y algunos de los resultados se muestran en este reporte.

Por otra parte, las nociones forman distintos estratos del funcionamiento del conocimiento matemático escolar las cuales se dividen en dos grupos (Chevallard, 1997): las nociones explícitas que están conformadas por las nociones matemáticas (Son objeto de estudio y evaluación en si mismas, además sirven como instrumento para el estudio de otros objetos.); y las nociones implícitas conformadas por las nociones paramatemáticas (son las que se utilizan conscientemente, esto es que son reconocidas y designadas como instrumentos para describir otros objetos matemáticos, pero no se les considera como objetos de estudio en si mismas, y por lo tanto no son objetos de evaluación directa.) y las nociones protomatemáticas (Son las nociones que se emplean en la práctica para resolver ciertos problemas, pero de forma que la noción misma no es reconocida ni como objeto de estudio ni como instrumento útil para el estudio de otros objetos.) (Martínez, 2002).

En este reporte de investigación se sostiene que las nociones de *Linealidad* y *Promediación* en la didáctica del nivel superior no son explícitas desde los distintos estadios según Chevallard (1997) acordes al papel que juegan en ambiente escolar, a través de sus diferentes representaciones. Como cuando se aborda el tema de la recta en el plano en bachillerato, generalmente no se toman en cuenta la noción de proporción directa, ni posteriormente para el concepto de *linealidad*. Por otra parte cuando se estudia el Teorema Fundamental del Cálculo Integral en los primeros semestres de algunas licenciaturas, a menudo no se hace explícita la *promediación*.

La forma científica de conducir este trabajo, está sustentada en el enfoque sistémico, además de tomar en cuenta, como elemento metodológico, el *rescate epistemológico de los significados* (recuperación de significados que subyacen al conocimiento, lo cual se realiza en diferentes momentos de la evolución del mismo (Acosta, 2011)) de la noción de linealidad.

Resignificación de la noción de Linealidad

La proporción directa se empleaba con frecuencia (Filloy, 1998) en las antiguas civilizaciones, alcanzando un gran desarrollo de la habilidad operatoria. Ya en las culturas: griega, babilónica y egipcia, afrontaban cierto tipo de problemas de la vida cotidiana, desde la distribución de una herencia, hasta el cálculo de interés compuesto. La aritmética babilónica funcionaba para hacer cálculos astronómicos, mercantiles, y mediciones de áreas y volúmenes; en tales estimaciones.

En la cultura egipcia, no sólo se resuelven problemas aritméticos, sino se dieron elementos de solución a ecuaciones lineales, que escritas en simbología moderna son de la forma $x + ax = b$ o $x + ax + bx = c$. En el *Papiro de Rhind,* se muestra la solución de este tipo de ecuaciones, empleando un método que en nuestros días se conoce como el *método de la falsa posición* (Boyer, 1991).

En *Los Elementos* de Euclides, escrito hacia el año 300 a. C., los postulados, *Desde cualquier punto se puede trazar una recta a cualquier otro punto y toda recta se puede prolongar indefinidamente.* Dichas proposiciones se refieren a la recta, no sólo en el sentido de que por dos puntos pasa una recta, sino además de que ésta es única.

En el primer postulado del primer libro, *Sobre la esfera y el cilindro*, Arquímedes, da la definición más empleada de la recta hasta nuestros días: *La recta es la línea más corta que une sus puntos extremos.*

Hacia el año 370 a. C. Eudoxio de Cnido (408? – 355?) profundizando en las ideas de Anaxágoras, define indirectamente la igualdad de dos razones *a: b* y *c: d,* lo que en la actualidad es una proporción (Hofmann, 2002). Este hecho importante es un antecedente epistemológico, y elemento articulador para con la ecuación de la recta *y= mx*, donde por supuesto está implícita la noción de linealidad, cuya perspectiva geométrica en el plano se inicia desde los trabajos de Descartes (1596 – 1650), y la cual en la actualidad se estudia en el nivel medio superior. Descartes determina la situación de un punto en un plano por su posición respecto al eje de las *x*. Propone la forma ***b x = a y*** para la recta que pasa por el origen, y considera *a x + b y = c* como la ecuación de una recta en su forma general (Hofmann, 2002). *La linealidad* adopta representaciones analítico-geométricas, que permiten expresar lo geométrico por medios algebraicos, lo que posibilita ganar en lo conceptual, al transitar entre lo analítico y lo geométrico.

El nacimiento incipiente del Álgebra lineal se propicia desde la intención del análisis de la solución de sistemas de ecuaciones lineales por parte de Euler y Cramer durante el siglo XVIII. Posteriormente se fueron desarrollando los conceptos como matrices, determinantes, dependencia e independencia lineal, transformaciones lineales y espacios vectoriales. Sin embargo en este desarrollo histórico epistemológico del Álgebra Lineal, no es manifiesta la importancia conceptual y articuladora de la proporcionalidad cuando se estudia la ecuación de la recta en R^2. Una circunstancia similar se presenta cuando se analiza la noción de linealidad en licenciatura lo cual ha repercutido en los ambientes didácticos modernos.

Usualmente la enseñanza de la recta se aborda en bachillerato estudiándola a través de la ecuación *y=mx+b*, donde *m* es la pendiente y *b* la ordenada al origen, llamándola función lineal. Tales saberes representan un obstáculo posterior, en licenciatura, ya que cuando $b\neq 0$ no es una transformación lineal de acuerdo a la definición: $L(a\mathbf{u}+b\mathbf{v})=aL(\mathbf{u})+bL(\mathbf{v})$, siendo que según Golubitsky y Dellnitz (2001) sostienen que: *la idea central en álgebra lineal es la linealidad*. La forma *ay=bx*, la cual es herencia epistemológica de la igualdad de dos razones *a:b* como *x:y* planteada por los griegos de la antigüedad, representa una transformación lineal, sin embargo *la ecuación pendiente ordenada al origen* no lo es (Acosta, Rondero y Tarasenko, 2008). Ello no se aclara en el nivel medio superior, en el sentido del estatus didáctico que tiene en la escena escolar, ni por ser un antecedente histórico epistemológico y articulador, y como consecuencia, esta vaguedad sobrevive hasta los cursos iniciales de licenciatura.

En el tema de dependencia lineal no es común que sea abordado, partiendo de la proporcionalidad, siendo que juega un papel protomatemático, pero podría ser paramatemático. En la escuela se menciona: *Dos vectores* v_1 *y* v_2 *definidos en* R^n*, con* $n>1$*, se dice que son linealmente dependientes sí y sólo si la combinación lineal* $c_1\overline{v_1}+c_2\overline{v_2}=0$*, se cumple cuando* $c_1\neq 0$ *ó* $c_2\neq 0$*. Un aspecto didáctico rescatable es el que refiere a cómo se relacionan conceptualmente la dependencia lineal y la proporcionalidad directa. Se puede ver de la definición anterior, que se cumplen las proporcionalidades directas,* $\overrightarrow{v_1}=-(\frac{c_2}{c_1})\overrightarrow{v_2}$*, siempre y cuando* $c_1\neq 0$*, o* *bien* $\overrightarrow{v_2} = -(\frac{c_1}{c_2})\overrightarrow{v_1}$, *si* $c_2 \neq 0$ (Rondero, Tarasenko, Acosta, 2009). El que dos vectores sean linealmente dependientes implica que geométricamente sean paralelos, y ello está relacionado conceptualmente con la idea de paralelismo entre rectas en el plano cartesiano. Tales significados tendrían que ser resaltados en la didáctica para una articulación apropiada de saberes en el curso inicial Álgebra Lineal. Sin embargo en la didáctica escolar no se agregan dichos elementos, privilegiando lo algorítmico y memorístico.

La noción de Promediación

Ahora por lo que respecta a la noción de *promediación*, uno de los saberes matemáticos que tiene un papel relevante en la construcción del conocimiento matemático es precisamente el de la media aritmética, que como se sabe es una de las formas de promedio más conocida. Existen otros promedios como la media geométrica y la media armónica, entre otros muchos, cada uno de los cuales requiere de estudio aparte. En este trabajo se muestra cómo es que la media aritmética resulta tener un estatus protomatemático al abordar otros temas, y por tanto fungir como un eje de articulación conceptual entre las diferentes asignaturas de matemáticas que se enseñan en secundaria y bachillerato, aunque también se puede hacer evidente su articulación con otros cursos de matemáticas superiores como el Análisis Matemático y la Estadística.

Es por tanto un propósito de este trabajo el mostrar algunos contextos metamatemáticos en los que aparece la media aritmética en la secundaria. En tal caso se muestra su evidente participación tanto en el cálculo de áreas de triángulos y trapecios, como en cálculo de integrales definidas de *f(x)=x*. Respecto al contexto de lo numérico, la media aritmética aparece en el cálculo de sumas de progresiones aritméticas y en el cálculo de raíces, como: $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, entre otras, usando el método de Herón de Alejandría. Asimismo en el cálculo numérico de integrales definidas de funciones de la forma $f(x) = x^k$, con *k=1, 2, 3, …, n*.. Lo cual está referido a un *estatus protomatemático y paramatemático*.

En lo que corresponde a la estadística descriptiva, la media aritmética (paramatemático) tiene participación como una medida de tendencia central y en la medición de errores. Mientras que en la estadística inferencial su participación relevante es el cálculo de valores esperados y en la varianza de variables aleatorias con funciones de distribución de tipo discreto o continuo. Es de remarcarse que la media aritmética vista como un promedio en lo discreto o en lo continuo, es un elemento de articulación entre las partes descriptiva e inferencial de la estadística.

Sobre la articulación de saberes matemáticos

La articulación de saberes permite religar lo que se presenta en forma disjunta, lo que parece no tener relación por omisión, obviedad o ignorancia. Posibilita presentar los saberes para su aprendizaje en forma coherente y consistente, además de explicitar las relaciones conceptuales entre ellos. Uno de los sustentos de la articulación es precisamente el que corresponde a un rescate epistemológico para la didáctica, de ciertos saberes matemáticos, como la media aritmética y la proporción directa, lo que puede permitir el diseño de tareas de aprendizaje. Además posibilita el dar elementos para el diseño curricular y por supuesto para la formación de profesores con una visión de pensamiento amplia y consistente.

La articulación de saberes conlleva diseñar propuestas didácticas innovadoras que permitan atender algunos de los problemas que se desprenden del fenómeno de enseñanza no atendido y es el que corresponde a la presentación desarticulada de los saberes, cuando por ejemplo se presenta la media como una simple fórmula, $x=\frac{a+b}{2}$, para el caso de dos números reales positivos, *a, b*, sin atender a su desarrollo histórico, sus significados y representaciones según sea su estatus protomatemático o paramatemático en la didáctica. Además de no atender a las diferentes formas en que este concepto se relaciona con muchos otros en la matemática y a su trascendencia epistemológica en la construcción de conocimiento no sólo matemático.

La participación epistemológica de los promedios

Los fenómenos naturales tienen un comportamiento que desde la perspectiva de lo variacional siempre los lleva a transitar al menos una vez por lo que suele llamarse *promedio*, etimológicamente interpretado como *pro*, hacia y el *medieu*, esto es un valor intermedio entre dos o más valores de aquello que varía.

Como suele ocurrir con diferentes conceptos, el hombre ha usado el promedio en sus construcciones, en sus agrimensuras y de muchas otras formas, mucho antes de aprender a calcularlo. Millones de años después Arquímedes aprende a calcular el centro de gravedad de diferentes cuerpos geométricos, y todavía más, aprende a estudiar el equilibrio de los cuerpos. Es decir, Arquímedes tomó como un elemento epistemológico fundamental en la construcción de su conocimiento al cálculo del centro de gravedad que es una forma de promedio.

Ahora bien, la noción fundamental que sustenta al promedio la denominamos *promediación*, en el sentido de ella se desprenden todas las diferentes formas de promedio, en particular la media aritmética. Una consideración interesante de carácter epistemológico, se da cuando nos preguntamos para dos valores dados, a >0 y b>0, qué miden cada una de las medias aritmética, $x = \frac{a+b}{2}$, geométrica $G = \sqrt{ab}$, y armónica $H = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$, pero además qué las distingue y cómo se relacionan estos tres diferentes tipos de promedio.

Sin embargo, "el mundo" de los promedios no queda restringido a los tres mencionados, se amplía considerablemente en diferentes contextos metamatemáticos, al grado tal que se tienen métodos de cálculo en donde se combinan dos o más diferentes tipos de promedios, dos de los más conocidos son el aritmético-armónico y el geométrico armónico. El llamado método babilónico es de tipo aritmético-armónico y se usa para calcular raíces de números enteros positivos como $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$.

Desde la participación de Arquímedes, se hace un rescate epistemológico *del exceso y el defecto,* entendido de la siguiente forma, dados dos números reales $a>0$ y $b>0$, si se quiere encontrar un valor intermedio que equipare o equilibre a estos dos valores dado, entonces podemos calcular el exceso dado como x-a, el cual es un valor positivo y el defecto, x-b, que es de igual valor pero negativo, de manera que: $x - a + x - b = 0$,

Conclusiones y reflexiones

La caracterización de las ideas germinales, siendo estas consideradas como categorías teóricas a las que se recurre como elemento explicativo de orden eminentemente epistemológico, tienen en sí mismas la cualidad de que a través de ellas se generan teorías completas, para lo cual se van estructurando definiciones, propiedades, teoremas, principios y todos aquellos resultados previos a los que haya lugar. Es posible resaltar algunas de las aportaciones hechas acerca de la cognición de las ideas germinales de: *Ponderatio* y *Ratio Mutabilitas Constant* dado que se ha observado que efectivamente son ideas muy cercanas a la intuición de los estudiantes. Precisamente son ideas germinales porque en su propia génesis histórica el conocimiento propiamente ha recurrido para su constitución el desarrollo de las ideas desde contextos surgidos de necesidades específicas.

Las nociones de linealidad y promediación son elementos de articulación en la matemática escolar y se puede apreciar su característica de transversalidad conceptual de ambas, entre la matemática elemental y la matemática avanzada, en el entendido de que estas nociones adoptan distintos estadios didácticos, que se expresan en diferentes objetos matemáticos, como en el caso de la linealidad las propias ecuaciones de la recta, y de la promediación la media aritmética, entre otros promedios que a su vez aportan nuevos significados a las mismas.

Un obstáculo importante que tiene repercusión en la didáctica, es por la desarticulación manifiesta entre la igualdad de dos razones *a: b* y *c: d* con la recta que pasa por el origen, *bx* =

ay, y con la función lineal *f(x)= ax +b*. Se cree que esto sucede porque la noción de linealidad presentan distintos significados que se entrevén por las ecuaciones.

Es de resaltarse el hecho de que los significados de la noción de linealidad rescatados de las ecuaciones de la recta en el plano, representan un andamiaje fundamental de articulación conceptual en la matemática escolar y se distingue su importancia transversal entre la matemática elemental y la matemática avanzada, esto es debido a la condición metamatemática de la noción de *linealidad*. En tal caso, la adecuada instalación de los elementos conceptuales antes señalados, propiciaría un aprendizaje matemático bien articulado con diversos conceptos del Álgebra Lineal.

Por lo que se refiere a la noción de promediación es conveniente resaltar su papel epistemológico en la construcción del conocimiento matemático referido a los diferentes tipos de promedio, cuya aparición se da en todo el currículum escolar, y lo cual debe ser un elemento en los aprendizajes de los estudiantes y en la formación de profesores.

Se hace un rescate epistemológico de la trascendencia que tienen las ideas germinales: *Ponderatio* y *Ratio Mutabilitas Constant* para la didáctica, dado carácter metamatemático, manifiesto en transversalidad de los saberes en el currículum escolar, sin embargo, esto no hubiera sido posible sin antes haber ejercido una vigilancia epistemológica de los saberes, entendida en el sentido de seguirle la pista a la modificación de los mismos. Se cree conveniente incorporar las ideas germinales a la didáctica de las matemáticas en general y en particular a la didáctica de la matemática.

Referencias bibliográficas

Acosta, J. (2011). *Análisis epistemológico, cognitivo y sociocultural de la noción de linealidad.* Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada-Instituto Politécnico Nacional. Distrito Federal, México.

Acosta, J., Rondero, C. y Tarasenko, A. (2008). Un enfoque histórico y epistemológico de la noción de linealidad. *Memoria HPM*, 301-308. México: CINVESTAV-IPN.

Acosta, J., Rondero, C. y Tarasenko, A. (2010). La resignificación de la noción de linealidad. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 23, 65-73. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Boyer, C. (1991). *A History of Mathematics*. New York, USA: John Wiley.

Cantoral, R. (1990). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de la Funciones Analíticas. Simbiosis y*

Predación entre las nociones de "el Praediciere y lo Analítico". Tesis doctoral. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional. Distrito Federal, México.

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Editorial* Aique. Buenos Aires: Argentina.

Cordero, F. (1994). *Cognición de la integral y la construcción de sus significados. Un estudio del discurso matemático escolar,* Tesis doctoral. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional. Distrito Federal, México.

Filloy, E. (1998). *Didáctica e Historia de la Geometría Euclidiana* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Golubitsky, M. y Dellnitz M. B (2001). *Álgebra lineal y ecuaciones diferenciales, con uso de MATLAB.* México: Thomson Editores.

Hofmann, J. (2002). *Historia de la matemática.* México: Limusa.

Kolman, B. y Hill, D. (2006). *Álgebra Lineal.* (8ª ed.). México: PEARSON Educación.

Martínez, G. (2002). Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 5, (Núm. 1),* 45-78. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Rondero, C. (2001). *Epistemología y cognición de las ideas germinales Ponderatio y Aequilbrium en la constitución del saber físico matemático.* Tesis doctoral no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional. Distrito Federal, México.

Rondero, C., Tarasenko, A. y Acosta, J. (2009). Algunas incongruencias conceptuales sobre la noción de linealidad. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 535-543. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Torija, R. (1999). *Arquímedes. Alrededor del círculo.* (2ª ed.) [La matemática en sus personajes]. España: NIVOLA.