PERCEPÇÕES DOS ALUNOS DO 1º ANO DA LICENCIATURA EM ENSINO DE MATEMÁTICA NA BEIRA – MOÇAMBIQUE – DA PROVA E DEMONSTRAÇÃO EM GEOMETRIA PLANA

Jacinto Ordem, Saddo Ag Almouloud
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo Brasil
jc.ordem@gmail.com, saddoag@gmail.com

Resumo. Apresentamos neste trabalho resultados de uma pesquisa de natureza diagnóstica quanto ao desempenho dos estudantes do 1º ano da Licenciatura em Ensino de Matemática na Beira – Moçambique. A coleta de dados aconteceu no âmbito das aulas da disciplina "Geometria Plana". A pesquisa decorreu em duas fases. As reflexões tecidas fundamentam-se nos Paradigmas Geométricos de Houdement e Kuzniak (2003) e abordagem semiótica de Duval (2004). Os resultados mostram que esses alunos têm dificuldades em organizar uma estrutura dedutiva e usar argumentos matemáticos para validar propriedades geométricas, enquadrando-se, desse modo, na Geomtria Natural.

Palavras chave: provas e demonstrações, futuros profesores, geometria plana

Abstract. This paper presents results of a survey regarding the nature diagnostic performance of students of 1st year of Bachelor in Mathematics Teaching in Beira - Mozambique. Data collection took place within the school discipline "Plane Geometry". The study was conducted in two phases. The reflections made are based on the paradigms' Geometric of Houdement and Kuzniak (2003) and semiotic approach of Duval (2004). The results show that these students have difficulties in organizing a deductive structure and use mathematical arguments to validate geometric properties, therefore, find that they fit in Natural Geometry.

Key words: proofs and proving, prospective teachers, plane geometry

Introdução

A finalidade do presente artigo é apresentar os resultados preliminares de um levantamento diagnóstico do desempenho dos alunos do primeiro ano do curso de Licenciatura em Ensino de Matemática na Universidade Pedagógica – na Delegação da Beira – em Moçambique na produção de demonstrações em geometria do ensino Básico, no âmbito de um projeto de estudo para o doutorado em Educação Matemática.

Nos últimos 30 anos, há um grande esforço de investigação em educação matemática na área de justificação e prova, desde a construção da prova, a natureza epistemológica da prova, até sua implementação em sala de aula, etc., (Weber & Ramos, 2011, p. 329). Contudo, alguns pesquisadores afirmam que dentro da comunidade não há um consenso sobre o que constitui prova, ou o que deveria ser objeto de pesquisa acerca de provas (Balacheff, 2008), apontando como testemunho os diversos enfoques nas pesquisas: uns enfatizam os tipos de raciocínios utilizados em argumentos matemáticos, outros a percepção dos alunos sobre a prova, outros examinam as funções da prova na matemática e, ainda, o uso indiferenciado dos termos prova e demonstração. Neste artigo diferenciamos os termos prova e demonstrção segundo Balacheff (1987), isto é,

> Chama-se *prova* uma explicação aceita por uma certa comunidade em um dado momento. Essa decissão pode ser objeto de um debate em que a significação é exigência para determinar um sistema de validação comum aos interlocutores.
>
> (…) No seio da comunidade matemática, elas devem ser sequência de enunciados organizados segundo regras determinadas: um enunciado é considerado verdadeiro ou é deduzido dos que lhe precedem segundo uma regra de dedução tomada num conjunto de regras bem definidas. Nós chamamos *demonstração* a essas provas (Balacheff 1987, p. 147-148, tradução nossa).

Apesar dessa diversidade de enfoques todos consideram que a reavaliação do papel da prova no ensino deve constituir um dos desafios da Educação Matemática na atualidade. É no contexto dessa problemática que o presente artigo se insere.

Quadro teórico e revisão da literatura

Segundo Retamal (2009) as figuras desempenham um papel essencial no desenvolvimento de geometria. Porém, a autora afirma que é necessário considerar diferentes níveis de exigência em relação à validação de conjecturas ou propriedades de uma figura que levam a dois tipos de provas: as provas não formais fundamentadas em propriedades das figuras (por visualização ou instrumentos de construção) e as provas formais fundamentadas em uma axiomática formal. Os dois tipos de prova exigem duas maneiras distintas de raciocínio e, para deixá-las em evidência, Houdement e Kuzniak (2003) propuseram um quadro teórico que classifica a geometria elementar em três paradigmas diferentes: Geometria Natural (Geometria I); Geometria natural axiomática (Geometria II) e Geometria axiomática formal (Geometria III), que se diferenciam na forma como as propriedades são validadas.

Na Geometria I (*Geometria natural*) a fonte de validação é de natureza sensível (ações e manipulação de instrumentos – régua graduada, compasso, transferidor ou outros materiais). Esta geometria está intimamente relacionada com a realidade; o ato de agir e dedução é com objetos materiais. A medição é uma estratégia padrão, assim como a utilização de modelos, dobras entre outros. Enquadram-se neste paradigma as provas pragmáticas, segundo Balacheff (1987).

Na Geometria II (*Geometria axiomática natural*), as leis hipotéticas de dedução são a fonte de validação; o conjunto de axiomas está próximo a intuição e pode ser incompleto; contudo, a certeza é garantida por demonstrações. Seus objetos são teóricos, mas são representações de objetos reais e concretos. A validação das relações é feita usando definições e teoremas, ou seja, se recorre a instrumentos que pertencem a um quadro teórico. Faz parte dessa geometria, a Geometria Euclidiana.

E na Geometria III (*Geometria axiomática formal*): o cordão umbilical entre a realidade e o axiomático é cortado, isto é, trabalha-se com objetos teóricos sem qualquer referência à realidade e seu sistema de validação é bastante formal. O tipo de raciocínio é similar ao da geometria II, mas o sistema de axiomas está completo e independente de suas aplicações possíveis para o mundo. Segundo Houdement e Kuzniak, "o único critério de validade é a coerência (ou seja, ausência de contradições)."

Segundo os autores uma experiência de Geometria I (em que a dedução está ligada muitas vezes a manipulação de instrumentos), pode contribuir para dar sentido a axiomas em Geometria II, e dai levar a interpretações oferecidas em Geometria III na qual o critério de validade aceite é a coerência (ou seja, ausência de contradições).

Utilizamos este quadro teórico para nosso trabalho porque concordamos com Kuzniak, Elia, Hattermann, e Roubicek, (2009) quando defendem que a classificação propostas em relação a Paradigmas geométricas e espaço de trabalho geométrico é útil para a classificação dos tipos de argumentos utilizados e compreender as dificuldades dos alunos e os erros (abordagem epistemológica).

Duval (2004) ao discutir sobre as funções de uma figura em geometria, distingue quatro tipos de apreensões, e salienta que a figura deve ser vista de acordo com uma descrição verbal que determina explicitamente algumas de suas propriedades. Para o autor em geometria não há desenho "sem legenda"; toda a introdução a uma figura geométrica deve ser discursiva. Dorier, Gutiérrez e Strässer (2003, p. 3) afirmam que

> Na verdade, nenhuma propriedade geométrica é, em sentido estrito, visível em um desenho (pode-se medir se duas linhas são paralelos, mas a incerteza sobre a precisão da medição é inevitável), tem que ser dada na hipótese ou codificada ou provada por deduções.

Método, sujeitos e problema da pesquisa

Foram sujeitos da pesquisa estudantes do 1º Ano em formação para o magistério do ensino secundário e decorreu no âmbito das aulas da disciplina "Geometria Euclidiana" uma das das disciplinas que se oferece no primeiro ano do curso. É uma pesquisa de natureza qualitativa e o objetivo da pesquisa foi investigar as capacidades dos estudantes em formação para o magistério de produzir uma demonstração envolvendo conceitos da geometria plana. Especificamente, incluiu dois aspectos: (i) compreensão de uma organização dedutiva correta;

e, (ii) levantamento de uma conjectura e sua validação por meio de uma demonstração. Os dois aspectos – foco de nosso problema – visavam responder à seguinte questão: *Que aspectos os estudantes do primeiro ano do curso de licenciatura em ensino de matemática na Beira, consideram relevantes no processo da organização e/ou produção de uma cadeia dedutiva de uma propriedade geométrica.* Ao levantarmos essa questão para o nosso problema, entendemos que ela é pertinente para o proposito que se quer desenhar para o projeto de doutorado, pois segundo Dorier, Gutiérrez e Strässer (2003, p. 8) uma das questões críticas quanto à formação de professores de matemática dos níveis primário e secundário é decidir sobre a extensão do conhecimento matemático que os professores devem dominar e a qualidade do raciocínio matemático que eles devem ser capazes de mostrar.

A coleta dos dados baseou-se nos trabalhos de casa; notas em sala da aula e teste diagnóstico. A pesquisa decorreu na Universidade Pedagógica, Delegação da Beira, em Moçambique e a amostra incluiu alunos que concluiram a 12ª classe e sem experiência de ensino; professores em exercício e sujeito vindos de outros segmentos sociais em formação para o magistério. Os dados apresentados neste trabalho resultam da análise do material recolhido. A coleta aconteceu em duas fases distintas: em 2010, com a participação de 23 alunos e, em 2011 com 36 alunos. Nos dois anos, a coleta de dados decorreu no segundo semestre, entre os messes de setembro e outubro, pelo fato de ser esse o período em que se leciona essa disciplina.

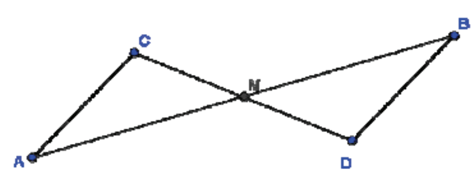
Atividades e resultados

Em 2010, aos estudantes foi pedido que, usando o software Geogebra, conjecturassem primeiro o objeto geométrico que se obtém unindo os pontos médios de lados consecutivos de um quadrilátero e, em seguida, validassem-na por meio de uma prova. Foi-lhes estimulado que explorassem a ferramenta "arrastar" que o ambiente dinâmico de Geogebra propicia. Os estudantes poderiam trabalhar individualmente ou em grupos de 3 ou 4 pessoas.

Em 2011 a atividade consistiu de um teste que pedia aos sujeitos que organizassem os passos de uma demonstração, que se supunha que tinha sido feita corretamente por um aluno mas que ao transcrever os passos da resolução baralhou tudo, conforme o *Quadro 1*.

Hipótese: M é ponto médio de AB e de CD.

Tese: angulo (CAM) $\cong$ angulo(DBM)



Quadro 1: Quadro dos dados.

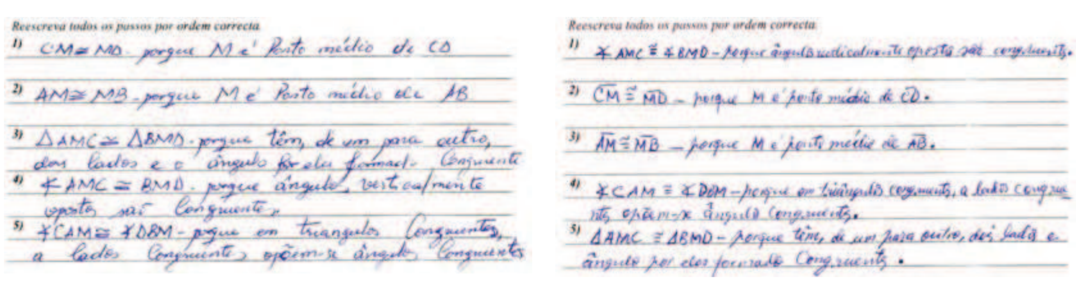
Demonstração:

- ❖ ∠AMC ≅ ∠BMD – porque ângulos verticalmente opostos são congruentes
- ❖ ∠CAM ≅ ∠DBM – porque em triângulos congruentes a lados congruentes opoem-se ângulos congruentes
- ❖ $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ – porque M é ponto médio de $\overline{AB}$
- ❖ ΔAMC ≅ ΔBMD – porque têm, de um para outro, dois lados e o ângulo por eles formado congruentes.
- ❖ $\overline{CM} \cong \overline{MD}$ – porque M é ponto médio de $\overline{CD}$.

Reescreva todos os passos por ordem correta. (Fonte: Próprio autor adaptado de: Lopes, et al, 1992).

Dos 23 envolvidos em 2010, 10 realizaram a tarefa individualmente e os restantes em grupo. A análise das resoluções mostra que os alunos chegaram à conjectura de que unindo os pontos médios de qualquer quadrilátero, obtem-se um paralelogramo. Contudo, a tentativa de validar a conjectura baseou-se apenas nas hipóteses dos pontos médios obtidos, com o paralelismo dos lados opostos do quadrilátero especial argumentado-se com base na evidência da figura por meio da expressão "como mostra a figura, logo [….] é um paralelogramo." Isso observou-se em todas as resoluções.

Dos 36 estudantes que participaram do teste de 2011, 11 colocaram bem os passos da demonstração, e 25 não. Das soluções não corretas, 14 não conseguiram reunir as três condições mínimas que satisfazem a congruência dos dois triângulos dados, condição sem a qual não se consegue deduzir a conclusão da demonstração e, 11 dipuseram primeiro as condições que garantem a congruência dos triângulos, mas antes de formalizarem isso, apresentaram a conclusão que deviam deduzir (tese) e depois, no último passo afirmaram que os dois triângulos eram congruentes. A Figura 1 apresenta os dois tipos de erros mais comuns.


Reescreva todos os passos por ordem correcta
1) CM ≅ MD porque M é ponto médio de CD
2) AM ≅ MB porque M é ponto médio de AB
3) ΔAMC ≅ ΔBMD porque têm, de um para outro, dois lados e o ângulo por eles formado congruente
4) ∢AMC ≅ BMD porque ângulos verticalmente opostos são congruentes.
5) ∢CAM ≅ ∢DBM porque em triângulos congruentes, a lados congruentes opõem-se ângulos congruentes

Reescreva todos os passos por ordem correcta
1) ∢AMC ≅ ∢BMD – porque ângulos verticalmente opostos são congruentes.
2) $\overline{CM} \cong \overline{MD}$ – porque M é ponto médio de $\overline{CD}$.
3) $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ – porque M é ponto médio de $\overline{AB}$.
4) ∢CAM ≅ ∢DBM – porque em triângulos congruentes, a lados congruentes opõem-se ângulos congruentes.
5) ΔAMC ≅ ΔBMD – porque têm, de um para outro, dois lados e ângulo por eles formado congruentes.

Figura 1: Uma ilustração dos erros mais comuns cometidos na organização dos passos da dedução

Fonte: Próprio autor

Discussão dos resultados

A interpretação dos resultados na base das teorias que fundamentaram o estudo, leva-nos a concluir que: (i) os alunos envolvidos no estudo enquadram-se na Geometria I (Geometria natural) na qual a fonte primária de validação das propriedades geométricas são açoes e manipulação de instrumentos: para validar a propriedade dos pontos médios de um quadrilátero basearam-se apenas nas "evidências no desenho". Fetissov (1994, p.29) salienta que uma demonstração bem estruturada deve basear-se apenas em proposições já estabelecidas, sendo inadmissível qualquer alegação de evidência; nenhuma propriedade geométrica é visível em um desenho, devendo ser dada na hipótese ou codificada ou provada por deduções (Duval, 2004; Dorier, Gutiérrez e Strässer, 2003). Os resultados de 2011mostram que os erros mais frequentes foram (i) ou apresentar nos passos iniciais conclusões que careciam inicialmente de outros passos; (ii) ou usar a tese (conclusão) como um dos dados a usar na argumentação. Estes resultados indicam que esses estudantes não entendem as regras de dedução para a produção de uma demonstração. Embora a atividade se possa enquadrar na Geometria II (Geometria natural axiomática), também foram incapazes de ir além da Geometrai I (Geometria natural). Os erros parecem revelar que eles não veem a demonstração como um discurso em que as definições e os teoremas são regras de substituição como defende Duval (2004), o que mais uma vez dá mais indício de muitos deles situam-se em Geometria I, Natural.

Retomando o nosso problema em que questionamos sobre "Que aspectos os estudantes do primeiro ano do curso de Licenciatura em Ensino da Matemática na Beira, consideram relevantes no processo da organização e/ou produção de uma cadeia dedutiva de uma propriedade geométrica", podemos responder que os resultados parecem indicar que eles não entendem o processo da construção de uma demonstração, isto é, não entendem que numa demonstração é preciso observar certos critérios - cada enunciado deve ser considerado verdadeiro ou deduzido dos que lhe precedem - como destaca Balacheff (1987) na definição de demonstração.

Referências bibliográficas

Balacheff, N. (1987). Processus de prevuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics,* 18*,* 147-176.

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. In *ZDM Mathematics Education*, *40,* 501–512.

Dorier, J. L., Gutiérrez, Á. e Strässer, R. (2003). Thematic working group 7. *European Research in Mthematics Education III*, Bellaria, Italy. Acesso em 23-06-2008. Disponível em http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/ groups.html.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuais.* Universidad Del Valle, Instituto de Educacion e pedagogia.

Fetissov, A. I. (1994). *A demonstração em geometria*; Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual. Coleção Matemática: Aprendendo e Ensinando.

Houdement, C. e Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different geometrical paradigms. *CERME 3: Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education.* Bellaria, Italy. Acesso em 23-06-2008. Disponível em <http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/groups.html..

Kuzniak, A., Elia, I., Hattermann, M. e Roubicek, F. (2009). Introduction Geometrical Thinking. *Proceedings of CERME 6* (pp. 671-675). Lyon, France.

Lopes, A. V., Bernardes, A., Loureiro, C. Varandas, J. M., Oliveira, M. J. C. e Delgado, M.G. (1992). *Actividades Matemáticas na sala de aula.* Portugal: Texto editores.

Retamal, I. G. (2009). Actividades geométricas en la ensiñanza. Análisis desde El punto de vista cognitivo. In: *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 19, 22-33.

Weber, K. e Meja-Ramos, J. P. (2011). Why and how mathematicians read proofs: an exploratory study. Educational *Studies in Mathematics, 76* (3), 329-344.