EL CONCEPTO DE FRACCIÓN EN SITUACIONES DE MEDICIÓN, DIVISIÓN Y LA RELACIÓN PARTE-TODO CON ESTUDIANTES DE NIVEL MEDIO SUPERIOR

Ivón García, Guadalupe Cabañas-Sánchez
Universidad Autónoma de Guerrero México
bony_999@hotmail.com, gcabanas.sanchez@gmail.com

Resumen. El artículo analiza el concepto de fracción desde la perspectiva de estudiantes de bachillerato en México, en situaciones de medición, división y la relación parte-todo. El estudio evidencia que recurren a las transformaciones ya sea de formas geométricas o bien de fracciones a su expresión decimal, para determinar partes de un todo. En el caso de las formas geométricas, a fin de determinar una medida de área de polígonos no convexos. Estas transformaciones dan cuenta además, que los estudiantes asocian a la fracción con la división.

Palabras clave: fracción, medición, división, relación parte-todo

Abstract. The paper analyzes the concept of fraction from high school mexican student's point of view, in situations related to measurement, division and part-whole relation. The study reports that students use transformations either geometric shapes or fractions in decimal terms, to determine the parties of the whole. In the case of geometric shapes, in order to determine a measure of area of not convex polygons. These transformations also show that students associated to the fraction with the division.

Key words: fraction, measurement, division, part-whole relation

Introducción

El estudio de las fracciones constituye una parte importante del currículo de matemáticas en la enseñanza básica, y sustenta el desarrollo del razonamiento proporcional y de temas como álgebra y probabilidad (Clarke & Roche, 2009). Sin embargo, es claro que para muchos profesores este tema resulta difícil de entender y enseñar (Post, Cramer, Behr, Lesh & Harel, 1993; Nunes, Bryant & Watson, 2007) y de parte de los estudiantes, como es bien sabido, enfrentan serias dificultades en su aprendizaje. Nunes, Bryant y Watson (2007) por ejemplo, documentaron que en la enseñanza básica, los niños tienen más éxito para comprender la relación de equivalencia y de orden entre fracciones, por medio de magnitudes en situaciones que involucran a la división, que en aquellas asociadas a la medición. En Post, Behr, and Lesh (1986, citado en Post, Cramer, Behr, Lesh & Harel, 1993) se reporta cómo el uso coordinado de las relaciones de orden y de equivalencia, combinado con la habilidad de estimar el tamaño de los números racionales, permite que algunos niños de primaria tengan éxito al comparar fracciones con igual numerador, con el mismo denominador, así como con aquellas de diferente numerador y denominador. León y Fuenlabrada(1996) por su parte, sostienen que el discurso matemático escolar (*dme*) en este nivel de enseñanza, prioriza el significado del fraccionamiento de la unidad y el dominio en las reglas de cálculo, en detrimento de situaciones que articulen a la medición con la comparación y el reparto, así como con la transformación de medidas. En esta misma dirección, Fandiño (2009) reconoce que el *dme* privilegia el estudio de la fracción sobre figuras estándar, lo que se constituye en un obstáculo didáctico.

Comprender el conocimiento construido por los estudiantes acerca de un concepto durante determinada etapa de su formación académica, cobra relevancia cuando el interés va más allá de identificar dificultades, sino más bien, de conocer su nivel de comprensión y de cómo lo usan ante situaciones concretas. En este artículo se reporta un estudio que analiza el conocimiento que estudiantes de bachillerato han construido en torno al concepto de fracción, así como de las relaciones que establecen entre su comprensión conceptual y los procedimientos desarrollados en ese proceso. En ese contexto, nos planteamos dar respuesta a las preguntas siguientes:

a) ¿Cuál es el conocimiento que los estudiantes han construido acerca de las fracciones y cómo lo ponen en juego ante situaciones que involucran a la medición, la división y la relación parte todo?

b) ¿Qué relaciones establecen entre su comprensión conceptual de las fracciones y los procedimientos que les fueron enseñados para compararlas y representarlas en los contextos continuo y discreto.

El estudio se sustenta de las investigaciones de Fandiño (2009) y de algunos constructos teóricos definidos por Sierpinska (1994) respecto de la comprensión de conceptos. De Fandiño (2009), retomamos la categoría de significados matemáticos asociados al concepto de fracción, asimismo, de las dificultades que se sabe, enfrentan los estudiantes.

Comprensión de conceptos matemáticos

El aprendizaje de procedimientos, aunque indispensable en matemáticas, es insuficiente en la comprensión de conceptos matemáticos (Pantziara & Philippou, 2012), pues generalmente contribuye a la realización de tareas rutinarias, que no siempre son exitosas. Sierpinska (1994) afirma que una persona comprende algo cuando logra relacionarlo con un contenido en sus estructuras mentales, a través de una serie de operaciones mentales, dentro de un proceso de comprensión compuesto por actos de comprensión que se relacionan entre sí. Sostiene además, que la asimilación de un concepto difícilmente podría hacerse mediante la lectura de su definición, y que solamente cuando se han comprendido ejemplos y contraejemplos del objeto definido, es cuando puede decirse lo que este objeto es y lo que no es, cuando hemos dado cuenta de sus relaciones con otros conceptos, cuando hemos notado que estas relaciones son análogas a relaciones que son familiares con aplicaciones, es que podemos decir que comprendimos algo acerca de él. La investigadora define a la *comprensión* en términos de *actos de comprensión* y los caracteriza por medio de cuatro operaciones mentales que los sujetos realizan en el proceso de comprensión, y consisten de lo siguiente:

a) La *identificación* de un objeto entre otros objetos, tiene que ver con el reconocimiento de un objeto. Es la operación principal involucrada en los actos de comprensión y consiste en una reorganización del campo de conocimientos, de modo que algunos objetos que hasta ahora eran un mero antecedente, de pronto aparecen como el objeto principal de la descripción; a menudo se le quiere dar un nombre, o, si ya lo tiene, este nombre inesperadamente obtiene una categoría de término científico en nuestra mente, porque ha sido interiorizado.

b) *Discriminación* entre dos o más objetos, está presente al momento en que se reconocen diferencias entre dichos objetos, con relación a características invariantes, así como entre sus propiedades.

c) *Generalización.* Es una operación mental en la cual una situación dada se entiende como un caso particular de otra situación. El término situación es concebido en un sentido amplio, desde una clase de objetos material o mental, a una clase de eventos (fenómeno) a problemas, teoremas o enunciados y teorías. Conduce a un conocimiento que puede extenderse al rango de las aplicaciones; algunas afirmaciones resultan irrelevantes y nuevas posibilidades de interpretación se descubren.

d) *Síntesis.* Se entiende como la búsqueda de una relación común, un principio de unificación una similitud entre varias generalizaciones y su comprensión como un todo. Es la percepción de relaciones entre hechos hasta ahora aislados; como un resultado, propiedades, relaciones, objetos, etc. están organizados en un conjunto consistente.

Los procesos de comprensión se articulan a los de razonamiento, y se manifiestan a través de explicaciones verbales y no verbales, sustento del análisis de esta investigación.

Método

Las actividades de exploración y su aplicación

La exploración se llevó a cabo mediante cinco problemas, que situaron a los participantes a trabajar con las fracciones en dos contextos, en el continuo y en el discreto. Los significados considerados en su diseño fueron el de medida, relación parte-todo, como operador, cociente y razón. Se trabajó en equipo de tres integrantes, constituyéndose diez a los que denominamos como E1, E2,…E10. Las actividades se aplicaron en dos sesiones de dos horas cada una, las que fueron videograbadas para su posterior transcripción y análisis.

Los participantes

Las actividades fueron suministradas a 30 estudiantes (15 – 18 años de edad) matriculados en el segundo semestre de un bachillerato general, cuyos antecedentes académicos consistieron de conceptos, relaciones y propiedades matemáticas asociadas a los números enteros, fraccionarios y decimales que fueron objeto de estudio durante su formación académica en secundaria, así como del uso que hacen del concepto de número racional y conceptos algebraicos como ecuación, objeto de estudio en el bachillerato.

Aspectos considerados en el análisis de las actividades

El análisis se sustenta de las explicaciones verbales y no verbales de los estudiantes en dos momentos, durante la resolución de los problemas y durante una entrevista de tipo abierta. Los aspectos considerados en este proceso, fueron los significados asociados al concepto de fracción, así como las acciones mentales que Sierpinska (1994) categoriza para el estudio de los actos de comprensión de conceptos matemáticos.

Discusión y análisis de los resultados

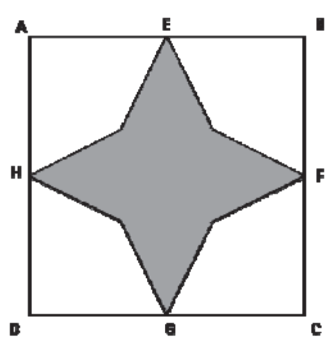
La discusión y análisis de los resultados provienen de los argumentos escritos y verbales presentados por los estudiantes en el proceso de resolución de dos de las cinco actividades usadas en la exploración. La primera, se articula a un octágono no convexo inscrito en un cuadrado de área unitaria, y la segunda, con la construcción de una piscina rectangular, en un terreno de la misma forma.

Ambas situaciones involucran a la medición, división y a la relación parte-todo.

a) *Las actividades y su análisis*

a.1) *Actividad 3: La región sombreada*

Determina el área de la región sombreada que se haya inscrita en el cuadrado ABCD de área unitaria. Tomando en cuenta que los puntos E, F, G, H son puntos medios. Justifica tus respuestas.



a.1.1) *Discusión y análisis de A3*

El análisis evidencia que los estudiantes *identificaron* el todo y sus partes y que orientaron sus procedimientos a la división del todo otro tipo de partes (relación parte-todo), recurriendo al trazo de segmentos de recta que pasaron por los vértices del octágono; consecuentemente, formaron triángulos y cuadrados congruentes (Véase figura No. 1).

Sin embargo, sólo E4 identificó esta relación entre las figuras y a partir de ello, completó con los triángulos, cuadrados, a fin de trabajar en torno a estos polígonos, esto es, recurrió a determinadas transformaciones. Es así que reconocieron que el cuadrado original quedaba dividido en nueve cuadrados iguales y que de ellos, un tercio correspondía a la parte sombreada (*identifican* y *discriminan*), pero ante todo, que esa parte (un tercio) correspondía al área que ocupa el octágono inscrito (*generalización*).

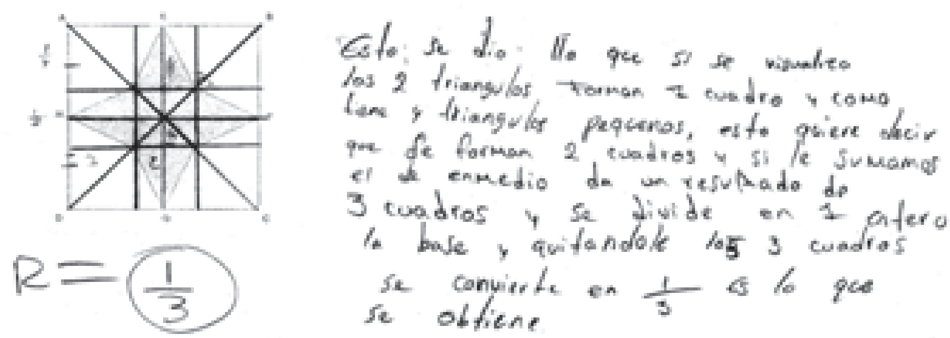


Figura 1: E4 identifica formas congruentes a partir de trazos auxiliares.

La visualización fue fundamental en la forma de proceder de E4, así como la descomposición y recomposición del todo, pues contribuyó a reconocer con qué formas geométricas les convenía trabajar, así como a determinar la medida de área que cumple con las exigencias del problema (Figura 1).

E4 reconoce que la determinación de la medida del área de la región sombreada debe hacerse de forma indirecta, por ello recurre a las transformaciones (*generalización* y *síntesis*). Una vez hecho esto, *mide* el área del octágono a través del conteo de partes congruentes. Quienes no comprendieron el concepto de área unitaria, *midieron* los lados del cuadrado con una regla así como los correspondientes a los triángulos que formaron y con ello, determinaron el área de los triángulos y cuadrados que forman el octágono, apoyándose de las fórmulas correspondientes. Sin embargo, la medida de área que determinaron no atendió a las exigencias, en razón de que la medida de la altura que consideraron para calcular el área de los triángulos fue la de un lado adyacente a la considerada como base. E3 por su parte, asignó medidas arbitrarias a los lados del cuadrado a fin de determinar la medida del área de las partes que conforman al octágono, del que *identifican*, está formada por un cuadrado y cuatro triángulos congruentes (parte-todo).

E3: Inventamos la medida… decimos que el lado del cuadrado mide doce y la mitad será seis… luego sacamos el área del triángulo (al que está sin sombrear) que se formó… como su lado coincide con la mitad del cuadrado, también medirá seis y para sacar la altura se ve que dividen el cuadrado en tres, entonces dividimos doce entre tres para sacar la altura del triángulo, después multiplicamos el lado y la altura, o sea cuatro por seis y después dividimos entre dos.

Cuando E3 dice "… se ve que dividen en tres al cuadrado…", reconoce que los lados de este polígono se dividen en tres partes iguales, por ello dividen doce entre tres a fin de determinar cuánto mide la altura de los triángulos no sombreados y con ello (*identifican* y *discriminan*), la medida de su área, 12 (Figura 2).

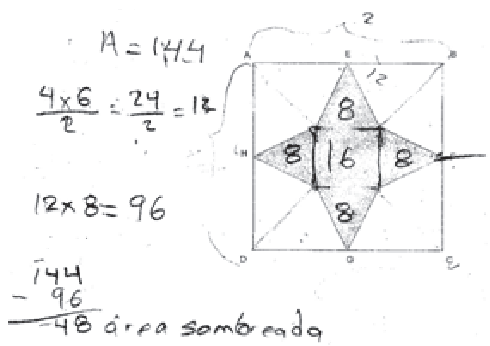


Figura 2: Uso de fórmulas por E3.

Entrevistador: ¿Pueden explicar por qué procedieron de esa forma?

E3: Porque así se calcula el área del triángulo y si sabemos cuánto mide… vamos a saber el área de la figura sombreada.

Entrevistador: Y después, ¿Qué hicieron?

E3: Multiplicamos cuatro por seis nos da veinticuatro y después lo dividimos entre dos y nos da doce, después multiplicamos doce por ocho.

Entrevistador: ¿Por qué por ocho?

E3: Son ocho triángulos que se formaron (los no sombreados)…luego multiplicamos el doce por ocho y nos da noventa y seis y como el área de todo es doce por doce, igual a ciento cuarenta y cuatro, a esto le restamos los noventa y seis y nos dio cuarenta y ocho, que es el área de la figura sombreada.

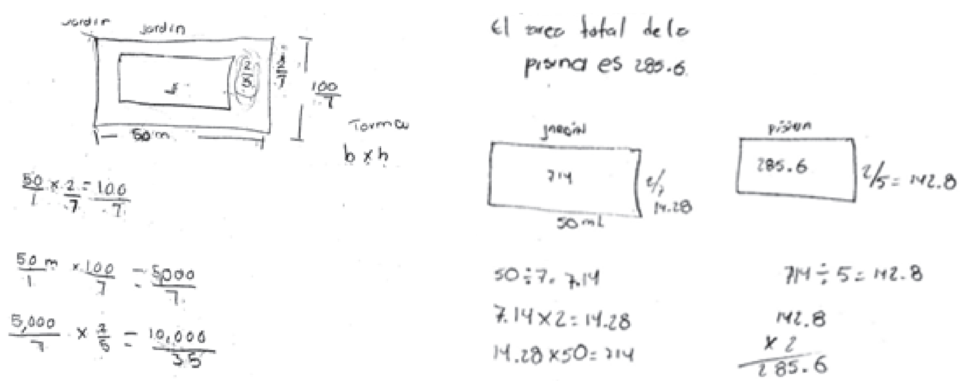
Los integrantes de E3 recurren a un caso particular a fin de usar fórmulas básicas para determinar la medida del área de las partes que forman el octágono y con ello, dar cumplimiento a las exigencias del problema (*generalización* y *síntesis*). Sin embargo, no determinan qué parte del área del cuadrado representa 48, medida del área del octágono, a la que llegaron con los datos que usaron.

a.2) *Actividad 4: La piscina*

Se desea construir una piscina en un jardín de forma rectangular que mide 50 m. de largo y el ancho equivale a dos séptimo de lo largo. El área que ocupará la piscina equivale a dos quintas partes del área total del jardín. ¿Cuál será el área que ocupe la piscina?

a.2. 1) *Discusión y análisis de A4*

Cinco equipos transformaron las fracciones asociadas a la medida del largo del jardín y del área que ocuparía la piscina, a su equivalente en decimal, ejemplo de ello, fue E9 (Inciso b, figura No. 3). Cuatro equipos por su parte, trabajaron con las fracciones sin transformarlas, como es el caso de E6 (Inciso a, figura No. 3).



a) Argumentos escritos de E6 b) Argumentos escritos de E9

Figura 3

Los argumentos (escritos como verbales) de E6 y E9, evidencian que conciben a la fracción como operador, y que relacionan el todo y las partes (Figura No. 3). Veamos algunos argumentos de E9 durante la entrevista.

E9: Primero dividimos cincuenta en séptimos y nos da siete punto catorce, después multiplicamos por dos porque son dos partecitas y nos dio catorce punto veintiocho… luego multiplicamos catorce punto veintiocho por cincuenta y nos da setecientos catorce.

En el fragmento anterior, E9 exhibe la transformación de la fracción a decimal, seguidamente, determina el área del jardín y con ello, la que ocupará la piscina.

Entrevistador: Y esos setecientos catorce… ¿Qué son?

E9: Es toda el área… luego dividimos toda el área entre cinco.

Entrevistador: ¿Por qué dividen entre cinco?

E9: Porque nos piden dos partes de cinco… y encontrar el área de la piscina… multiplicamos por dos y nos da doscientos ochenta y cinco punto seis.

E6 reconoce además, que el número 50 puede ser expresado en forma de fracción y lo usa a fin de determinar la fracción que representa la medida del ancho del jardín.

E6: Tenemos que hacer una multiplicación… multiplicamos cincuenta por dos séptimos, o sea, multiplicamos cincuenta por dos y a uno por siete.

Entrevistador: ¿Por qué aparece ese uno?

E6: Para multiplicar y así multiplicamos cincuenta por dos y nos da cien y a uno por siete que es igual a siete… entonces tenemos cien séptimos que es el ancho del terreno…

En seguida, E6 procede a determinar el área que ocupa el jardín (*el todo*), apoyándose de la fórmula del rectángulo. Con este dato, determina el área que ocupará la piscina (*parte*).

E6: …y ahora vamos a sacar el área, base por altura, que es el área del jardín y ya que tenemos el área del jardín… entonces hacemos otra multiplicación cinco mil por dos que es igual a diez mil y siete por cinco que es treinta y cinco y así el área del jardín son diez mil sobre treinta y cinco…

Breve discusión de resultados

Los estudiantes identifican el todo y sus partes. Recurren a las transformaciones ya sea de formas geométricas o bien de fracciones (a su expresión decimal) para determinar las partes. En el caso de las formas geométricas, a fin de determinar una medida del área de un polígono no convexo, a través de sumas de áreas de polígonos convexos como cuadrados y triángulos. Es decir, transformaron el todo en otro tipo de partes (relación parte-todo), para medir el área del octágono, se apoyaron para ello, de fórmulas básicas. El privilegio del uso de decimales por su parte, contribuyó a que tuvieran éxito en la solución de las situaciones relativas a este tipo de casos. Estas transformaciones dan cuenta además, que los estudiantes asocian a la fracción con la división, uno de los significados reportados en Fandiño (2009) y se confirma además la tesis de Nunes, Bryant y Watson (2007) quienes afirman que en la enseñanza básica los niños tienen más éxito para comprender la relación de equivalencia y de orden entre fracciones por medio de magnitudes en situaciones que involucran a la división, que en aquellas referidas a la medición, aunque en nuestro estudio, se presentó en estudiantes de Nivel Medio Superior.

Referencias bibliográficas

Clarke, D. & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics 72* (1), 127-138.

Fandiño, M. (2009). *Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá:Magisterio.

León, H. y Fuenlabrada, I. (1996). Procedimiento de solución de niños de primaria en problemas de reparto. *Revista Mexicana de Investigación Educativa 1* (2), 268-283.

Nunes, T., Bryant, P. & Watson, A. (2007). *Key Understanding in Mathematics Learning*. England: University of Oxford.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the learning, teaching and assessing of rational number concepts. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 327–361). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London, U.K.: Falmer Press.