COMPRENSIÓN DEL LENGUAJE ALGEBRAICO DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Ponciano Hernández Hernández; Eugenio Filloy Yagüe
DME, Cinvestav-IPN México
phernandezh@cinvestav.mx

Resumen. Este artículo presenta los primeros resultados de la investigación que se está llevando a cabo con un grupo de 30 estudiantes mexicanos de 11 a 13 años de edad que cursan la educación secundaria. El interés es identificar las nociones de pre-álgebra y las dificultades que presentan los estudiantes en el proceso de transición de la aritmética al álgebra, como condicionantes de la enseñanza de las ecuaciones de primer grado. Se aplicaron dos cuestionarios cuyos resultados indicaron el escaso dominio del Sistemas Matemáticos de Signos aritméticos y el predominio del tanteo en la solución de ejercicios y de problemas; uno de cada tres estudiantes poseía los conocimientos básicos para iniciarse en el contenido de ecuaciones de primer grado, con cierto dominio de las operaciones básicas, pero aún con dificultades en las restas y divisiones; además, en su uso no le dieron sentido a la variable en la solución de problemas.

Palabras clave: ecuaciones lineales, solución de problemas, dificultades

Abstract. This paper refers to the first results of the research being carried out with a group of 30 Mexican students from 11-13 years old enrolled in secondary education. The aim is to identify pupils' understanding of the concepts of pre-algebra and the difficulties they face in the transition from arithmetic to algebra, to set the initial conditions for the teaching of linear equations. The application of two questionnaires resulted in an insufficient handling of the Mathematical Systems of arithmetical Signs and the prevalence of trials to solve exercises and problems; one out of three students had the basic knowledge to be initiated at the study of linear equations, with some mastery of basic operations, although with difficulties in subtraction and division. Besides, they did not make sense of the variable when solving problems.

Key words: linear equations, problem solving, difficulties

Introducción

La educación actual de nuestro país afronta grandes desafíos, principalmente en la educación básica-secundaria. En la disciplina de las matemáticas es donde se muestran mayores escollos, en particular las dificultades de comprensión del álgebra, "ecuaciones de primer grado" (SEP, 2006, p.43)

El interés que lleva a realizar esta investigación es el tratamiento de las matemáticas en la enseñanza, en particular en lo concerniente al pensamiento algebraico. En este campo llama la atención lo complejo del paso de la aritmética al álgebra. "Muchas de las dificultades en el proceso de apropiación del álgebra manipulativa tienen su origen en un arraigo a las fuentes de significado provenientes de la aritmética o del lenguaje coloquial, al interpretar símbolos literales y los signos de operación" (Solares, 2001, p. 9). Esto motiva a indagar dónde surgen estos conflictos. Generalmente los estudiantes consideran al álgebra como una de las áreas de las matemáticas más complejas por el nivel de abstracción que se requiere para su comprensión y el uso de su simbología. Es difícil para ellos comprender el significado de los signos de operación cuando cambian de un campo de conocimiento a otro. Esto se manifiesta en que la aritmética y el álgebra comparten muchos de los signos y símbolos; por señalar un ejemplo, en aritmética los signos "+, –" representan los signos de operación de la adición y de la sustracción, respectivamente; sin embargo, en álgebra estos signos, además de representar signos de operación, representan los signos de los números para el conjunto de números enteros positivos y negativos, correspondientemente. Por consiguiente, se formula la siguiente pregunta: ¿De qué manera la estrategia de la resolución de problemas al inicio del aprendizaje del lenguaje algebraico favorece la comprensión de los alumnos de las ecuaciones de primer grado? Se pretende identificar las principales dificultades que se presentan en la transición de la aritmética al álgebra.

Marco teórico

Para investigar los fenómenos de la enseñanza y del aprendizaje de un contenido matemático específico, Filloy propone la construcción de un Modelo Teórico Local (Filloy, 1999). Considera cuatro elementos esenciales: el sujeto que enseña, el sujeto que aprende, el conocimiento matemático en juego y la comunicación que establecen los sujetos implicados en el proceso.

En particular, se hará referencia a la componente de enseñanza sobre los modelajes concreto y sintáctico. En sus recursos didácticos a utilizar en el desarrollo de esta componente, se propone modelar contextos concretos familiares al alumno, para que ante las nuevas operaciones y los nuevos objetos los dote de sentido, construya los primeros rudimentos de sintaxis algebraica y aprenda a tratar la incógnita en los procesos de abstracción y generalización de operaciones (Filloy, 1999), que requieren del uso de los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS).

En cuanto a la componente de procesos cognitivos, se considerará el tratamiento de la solución de problemas aritméticos/algebraicos, para el que se han identificado tres métodos clásicos: 1) Método de Inferencias Analíticas Sucesivas (MIAS), que concibe a los enunciados de los problemas como descripciones de "situaciones reales" o "estados posibles del mundo" y transforma tales textos a través de oraciones analíticas, esto es, utilizando "hechos" válidos en "todo mundo posible": inferencias lógicas que actúan como descripciones de las transformaciones de las "situaciones posibles" hasta llegar a una que se reconoce como la solución del problema; es el también denominado Método Analítico Clásico para resolver problemas, en donde se utiliza propiamente la aritmética. 2) Método Analítico de Exploraciones Sucesivas (MAES), en el que el primer paso que se sigue después de leer el enunciado es identificar lo que se quiere obtener, esto es, lo que el usuario va a considerar como "lo desconocido" en el problema. Una vez hecha la identificación, se asigna un valor numérico para "lo desconocido" considerándolo como una solución hipotética. Con esto se quiere propiciar que el sujeto haga una lectura o re-lectura, en la que en lugar de que razone sobre relaciones en las que hay elementos desconocidos, ahora pueda pensar todas las relaciones del problema en términos de cantidades conocidas. Así, la utilización de una solución hipotética puede facilitar el desencadenamiento del análisis y con ello el proceso de solución, creando condiciones que permitan al usuario producir un proceso de verificación, al final del cual puede establecer una comparación numérica entre dos cantidades que representan lo mismo en el problema, pero que provienen de relaciones numéricas diferentes; a esta representación numérica se va a asignar una letra que va a jugar el mismo papel que el valor numérico hipotético usado como solución, con lo cual se obtiene la ecuación algebraica del problema; finalmente se opera algebraicamente con la ecuación obtenida, hasta obtener el valor numérico de la incógnita mediante las reglas de la sintaxis algebraica. 3) Método Cartesiano (MC), según el cual el proceso de solución se establece a través de la representación de algunos de los elementos desconocidos del enunciado del problema por medio de expresiones algebraicas, traduciendo después el texto del problema a una serie de relaciones, expresadas en lenguaje algebraico, que conduce a una o varias ecuaciones cuya solución, vía un regreso a la traducción, arroja la solución del problema. La aplicación del Método cartesiano requiere expresiones de un Sistema Matemático de Signos más abstracto que el Método de Inferencias Analíticas Sucesivas y el Método Analítico de Exploraciones Sucesivas, por las que un usuario competente dé sentido a una representación (simbólica); el uso correcto de los SMS implica una evolución en la solución de problemas, que se desprende de los ejemplos concretos dados en el proceso de enseñanza (Filloy, 1999). Para alcanzar una competencia plena en el método algebraico por excelencia es necesario dominar el Método Cartesiano.

Sistemas Matemáticos de Signos. (SMS)

El Sistema Matemático de Signos (SMS) en el que se expresan y comunican los textos matemáticos correspondientes a tales redes conceptuales, también, tiene una estratificación que se corresponde con los diversos usos, que van dando cuenta de acciones, operaciones y transformaciones cada vez más generales y provenientes de estratos de lenguaje cada vez más abstractos. (Filloy, 1999)

Procesos de abstracción en el aprendizaje del álgebra

Uno de los fenómenos más simples que la observación en clase arroja sobre los fenómenos de permanencia en un nivel de lectura con niños que acaban de terminar la educación primaria (alrededor de los 12 años) es el que aparece cuando se les enfrenta con las preguntas del tipo:

1. $3 \times \square = 12$

2. $3 \times \square = 672$

3. $\bigcirc \times = 672$

4. $3 \times x = 672$

5. $3x = 672$

Entre los 10 y los 12 años es fácil centrar a algunos estudiantes para que todas las preguntas "se lean" como (2): ¿Cuál es el número que multiplicado por 3 da 672?

A lo largo del primer año de educación secundaria (en el Sistema Educativo Mexicano), la mayoría de los estudiantes pasan a preferir el método de dividir B entre A para resolver la ecuación $Ax = B$, que es lo que quieren lograr los objetivos de los programas de matemáticas de este ciclo. Sin embargo, el mismo fenómeno vuelve a aparecer con estudiantes que ya habían logrado una gran operatividad para resolver todas las ecuaciones de primer grado, cuando el contexto en que aparece la ecuación $Ax = B$ proviene de una situación de análisis en la resolución de un problema. (Filloy, 1999).

Cómo plantear y resolver problemas.

En 1945 el matemático y educador George Polya, en su obra "How to solve it" (Polya, 1965, p. 19) propuso una metodología en cuatro etapas para resolver problemas. A cada etapa le asocia una serie de preguntas y sugerencias que, aplicadas adecuadamente, ayudarán a resolver el problema.

Etapa I. Comprensión del problema

Etapa II. Concepción de un plan

Etapa III. Ejecución del plan

Etapa IV. Visión retrospectiva

De esta forma, Polya considera importante que el sujeto domine las cuatro etapas para solucionar un problema. Evidentemente la última es la más importante, porque se reconsidera de nuevo el problema para hacer un análisis y de esta forma se permite encontrar varios procedimientos para solucionarlo. Así mismo, el procedimiento usado pueda servirle para hacer alguna analogía y solucionar otro problema.

Método

El método que se está llevando a cabo en esta investigación es de tipo cualitativo y en *curso*; se enfoca en la educación básica secundaria y se interesa en encontrar las causas que originan las dificultades que presentan los estudiantes en el proceso de comprensión del álgebra. Al respecto, la investigación se realiza en una escuela secundaria diurna pública mexicana, con un grupo de 30 estudiantes de 11 a 13 años.

A manera de exploración y previo a la enseñanza del contenido "ecuaciones de primer grado" se aplicaron dos cuestionarios. El objetivo de ambos cuestionarios fue establecer las condiciones iniciales que enfrentaría la enseñanza de las ecuaciones de primer grado, identificar nociones de pre-álgebra y las dificultades que presentan los estudiantes en el proceso de transición de la aritmética al álgebra. El primero planteó tres reactivos con preguntas abiertas sobre operaciones básicas, números con signo y recta numérica. Algunas de las preguntas que se presentaron a los estudiantes para su contestación son: 1. En el siguiente problema menciona qué operaciones se tienen que realizar para resolverlo. La mamá de Jacqueline va al supermercado y compró los siguientes productos: $3\frac{1}{2}$ kg de azúcar, 1.5 kg de aguacate, $\frac{1}{4}$ kg de queso panela, 2 kg de manzana y 0.5 kg de tortillas. El kg de azúcar tiene un costo de 22.50 pesos, el kg de aguacate cuesta 30 pesos, el kg de queso panela cuesta 70 pesos, el kg de manzana tiene un costo de 26.50 pesos y el kg de tortillas cuesta 13 pesos. ¿Cuánto se tiene que pagar por los productos comprados? Si pagó con un billete de 500 pesos ¿Cuánto recibió de cambio? ¿Cuál es el peso total de los productos comprados?

2. Ubica en la recta numérica 3 números enteros positivos (escríbelos con azul), 3 números enteros negativos (escríbelos con rojo) y 3 números naturales (escríbelos con verde).

3. Cierto mes del año la temperatura en la Ciudad de México es de 6 °C mientras que en Toluca, Estado de México, es de –2 °C. Representa en una recta numérica la temperatura de ambas ciudades.

El segundo instrumento consistió en siete reactivos con preguntas abiertas referidas a: uso de literales en fórmulas geométricas, ecuaciones aritméticas, generalidades de ecuaciones algebraicas, resolución de problemas y la incógnita en modelos geométricos. Algunas de las preguntas que se plantearon a los estudiantes fueron:

1. ¿Cuál es la fórmula para calcular el perímetro de un hexágono regular? Dibuja un hexágono regular, inventa la medida de los lados, utilizando la fórmula calcula el perímetro.

2. Encuentra el número que falta en las siguientes ecuaciones aritméticas: a) 8 +__= 15, b) 4 ×__= 36, c) 30 ÷__= 6, d) 9 + __= 0. 3. Encuentra el valor de *x* en las siguientes ecuaciones algebraicas: a) $\boldsymbol{x} + 4 = 13$, b) $7 + \boldsymbol{x} = 12$ c) $4\boldsymbol{x} + 2 = 22$, d) $6 - \boldsymbol{x} = 0$.

4. a) Por dos libros y una mochila pagué 400 pesos. Considerando que la mochila tiene un costo de 180 pesos. ¿Cuál es el precio de cada libro? b) La base de un rectángulo es el triple que su altura. ¿Cuáles son sus dimensiones, si el perímetro mide 24 cm? (Dibújalo). c) Por 5 plumas y un lápiz se pagaron 65 pesos. Considerando que el costo de las plumas es el mismo y el lápiz cuesta 5 pesos, ¿cuál es el costo de cada pluma?

Los dos cuestionarios se aplicaron en el aula, el primero con 15 minutos y el segundo con 30 minutos como máximo para su contestación individual, a la hora de la clase de matemáticas. Por sus respuestas obtenidas en el primer cuestionario, se seleccionó y entrevistó a un alumno en una sesión video-grabada para clarificar sus contestaciones.

Resultados

De las respuestas recopiladas con el primer cuestionario, el 40% evidenciaron dificultades para identificar las operaciones a realizar en la solución de problemas, de forma notoria en las restas y divisiones, lo cual se constató con un alumno a quien se entrevistó y que cometió errores principalmente con estas operaciones. La Figura 1 muestra las dificultades que tiene el estudiante para identificar que operaciones realizar para resolver un problema.

En el siguiente problema menciona; ¿Qué operaciones se tienen que realizar para resolverlo ?
La mamá de Jacqueline va al supermercado y compró los siguientes productos:

$3\frac{1}{2}$ *kg de azucar,* 1.5 *kg de aguacate,* $\frac{1}{4}$ *kg de queso panela,* 2 *kg de manzana*

y 0.5 *kg de tortillas.* **El kg de azúcar tiene un costo de 22.50 pesos, el kg de aguacate cuesta 30 pesos, el kg de queso panela cuesta 70 pesos, el kg de manzana tiene un costo de 26.50 pesos y el kg de tortillas cuesta 13 pesos. ¿Cuánto tiene que pagar la señora por los productos comprados? Si pagó con un billete de 500 pesos ¿Cuánto recibió de cambio? ¿Cuál es el peso total de los productos comprados?**

Figura 1. Reactivo referente a identificar operaciones a realizar en una situación problémica.

En el caso del reactivo de números con signo, los estudiantes pueden ubicar un número positivo en la recta numérica; sin embargo, sólo dos estudiantes lograron ubicar un número negativo; los demás ubicaron un número negativo a la derecha del cero, lo que demuestra que no tienen nociones de números con signo (negativos). La Figura 2 muestra lo que un estudiante contestó.

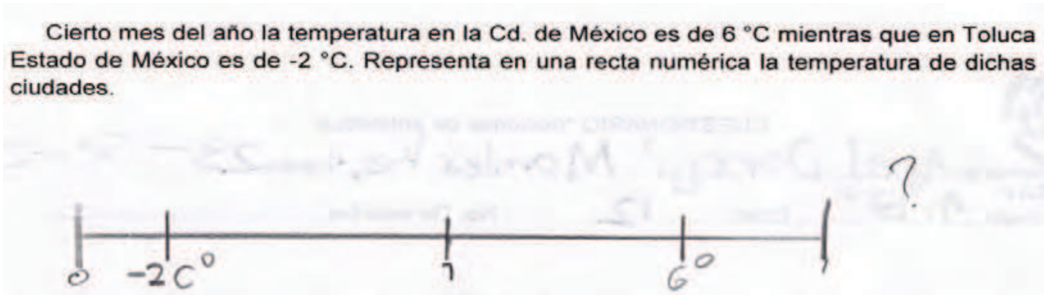

Figura 2. Reactivo referente a números con signo.

Finalmente, en el tercer reactivo, con respecto a la recta numérica sólo un alumno de cada nueve ubicó correctamente los números positivos, negativos y naturales. La Figura 3 muestra las dificultades de la ubicación de los números negativos en la recta numérica.

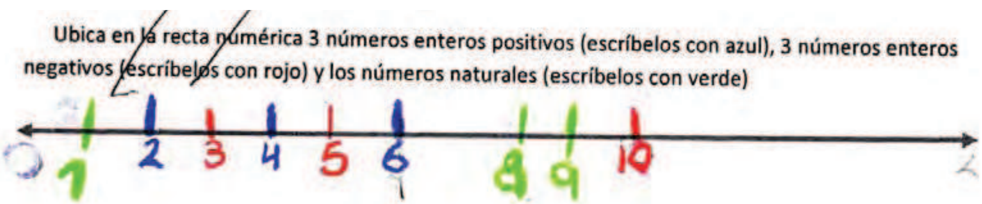

Figura 3. Reactivo referente a la ubicación de números positivos, números negativos y números naturales en la recta numérica.

Del segundo cuestionario, el 37% de las respuestas mostraron conocimientos básicos para acceder a la enseñanza de las ecuaciones de primer grado, manifestando ideas de: incógnita, igualdad, fórmula, figura geométrica regular, uso de literales, etc. No obstante, quienes contestaron correctamente lo hicieron por tanteo, sin exhibir otro procedimiento, y obtuvieron el resultado mediante cálculo mental. Se revelaron más dificultades para el apartado de "uso de literales en fórmulas geométricas", a pesar de haber estudiado este contenido en el nivel educativo anterior; sólo 10% de las respuestas fueron correctas en este apartado y su aplicación para cálculo de perímetros. Para las ecuaciones aritméticas del tipo número perdido, $a + \square = b$, $a\square + b = c$, 58% del grupo contestó acertadamente, lo que mostró un cierto dominio de ellas, aunque no como ecuación. En el reactivo de generalidades de ecuaciones algebraicas se presenta la literal x como incógnita; 56% del grupo respondió correctamente, pero a falta del acercamiento al uso de literales, los alumnos dudaron, por lo que el investigador dio una idea general del rol de la x en una ecuación durante la aplicación del cuestionario. A los reactivos de resolución de problemas aritméticos/algebraicos contestó correctamente 45% del grupo, aunque sin realizar operaciones. Finalmente, en el apartado de la incógnita en modelos geométricos, sólo 17% de las respuestas fueron correctas, lo que indica que la mayoría de los alumnos no poseía los conocimientos requeridos para la enseñanza del tema de interés. La Tabla 1 resume los principales tipos de respuestas obtenidas.

Contenido	Uso de literales en fórmulas geométricas		Ecuaciones aritméticas				Generalidades de ecuaciones algebraicas				Resolución de problemas			La incógnita en modelos geométricos		Total
Reactivo	1		2				3				4			5		5
Inciso	a	b	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	a	b	15
Tipo de respuesta																
Bien (B)	10%		58%				56%				45%			17%		37%
Noción (N)	20%		2%				0%				13%			12%		10%
Mal (M)	13%		24%				27%				24%			10%		20%
No contestó (NC)	57%		16%				17%				18%			61%		33%

Tabla 1 Porcentajes de tipo de respuestas recopiladas con el cuestionario.

Como conclusión en el segundo cuestionario, uno de cada tres alumnos tiene conocimientos básicos para estudiar el tema de ecuaciones de primer grado; sin embargo, aún con dificultades respondieron a los reactivos en las ecuaciones aritméticas y generalidades de ecuaciones algebraicas haciendo uso del cálculo mental y el tanteo; para encontrar el resultado, de igual manera manifestaron estos medios en las respuestas del reactivo de solución de problemas. Además, 63% del grupo exhibió un escaso uso de los sistemas matemáticos de signos.

Comentarios

De la aplicación de los dos cuestionarios resultó el uso insuficiente que los estudiantes hacen de los Sistemas Matemáticos de Signos aritméticos y la necesidad de que den sentido al uso de variables en pre-álgebra. Así también muestran dificultades para identificar operaciones a realizar en la solución de problemas; esto augura dificultades en la comprensión del lenguaje algebraico por medio de la solución de problemas. Por ello, la enseñanza de las ecuaciones de primer grado se encaminará al arribo de la aplicación del método cartesiano, en donde el uso correcto de los Sistemas Matemáticos de Signos aritméticos y algebraicos implica una evolución en la solución de problemas que se desprende de los ejemplos concretos dados en el proceso de enseñanza. Para el seguimiento de esta investigación se planea aplicar otros instrumentos después de la enseñanza de las ecuaciones de primer grado que conducirá el investigador, así como realizar entrevistas para caracterizar la comprensión de los alumnos del lenguaje algebraico de ecuaciones de primer grado.

Referencias bibliográficas

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Iberoamérica.

SEP, (2006). *Educación básica. Secundaria. Programas de Estudio*. México: Conaliteg.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Solares, A. (2001). *Sistema Matemático de Signos y distintos niveles de representación de la incógnita*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.