

IMPRESIÓN DE DISEÑOS SIMÉTRICOS EN LA OBRA DE ESCHER

Hugh Hilden, José Montesinos, Débora Tejada y Margarita Toro

Universidad de Hawaii, USA; Universidad Complutense de Madrid, España;

Universidad Nacional de Colombia

mike@math.hawaii.edu, jose_montesinos@mat.ucm.es, dtejada@unal.edu.co, mmtoro@unal.edu.co

La búsqueda del hombre de bellos diseños, la selección de formas y colores de distintas piezas que quería usar en sus muros y embaldosados y la repetición sistemática de motivos produjeron patrones simétricos como ejemplos de teselaciones. Así mismo, la naturaleza ha encontrado bellísimas teselaciones resolviendo sus propios problemas. Una teselación o embaldosado de una superficie es cubrirla con una misma pieza que se repite sin dejar espacios ni solapamientos. Aunque a simple vista se piense que son infinitas las formas de producir diseños simétricos planos, básicamente existen sólo 17 formas de producirlos. Mostraremos que la ejecución de estas teselaciones sigue unas reglas sencillas y precisas, las cuales hemos utilizado para imaginar 17 artefactos, los cuales son ejemplos del concepto debido a William Thurston de orbifold (orbificio o calidoscopio generalizado) y que pueden ser utilizados en la impresión de cualquier diseño simétrico plano. Exhibiremos estos artefactos por medio de algunos vídeos y utilizaremos algunas de las obras de Escher para ilustrar nuestra conferencia. Se verá que los conceptos de translación, rotación y de reflexión pueden enseñarse fácilmente por medio de la utilización de estos artefactos.

INTRODUCCIÓN

El estudio de sólidos cristalinos y del principio que gobierna su crecimiento, su forma externa y su estructura interna se llama cristalografía. El orden interno o cristalino de un mineral se puede pensar como un motivo repetido sobre un retículo, que es un arreglo periódico de puntos en el espacio. Por esta razón en cristalografía es fundamental estudiar los patrones de estas simetrías en el espacio. Para ayudar a entender estos patrones en 3 dimensiones, es importante estudiar el caso plano, que es el objetivo principal de este artículo.

Introducimos el tema dando un recorrido muy rápido en la vida de Escher. Luego nos centraremos en los aspectos matemáticos de las teselaciones. Una teselación o embaldosado de una superficie es cubrirla con una misma pieza que se repite sin dejar espacios ni solapamientos. Aunque a simple vista se piense que son infinitas las formas de producir diseños simétricos planos, bá-

sicamente existen sólo 17 formas de producirlos, cada una de ellas asociada con un grupo cristalográfico plano. Mostraremos que la ejecución de estas teselaciones sigue unas reglas sencillas y precisas, las cuales permiten imaginar 17 artefactos que están en correspondencia biunívoca con los 17 grupos cristalográficos planos y que pueden ser utilizados en la impresión de cualquier diseño simétrico plano. Veremos que los conceptos de translación, rotación y de reflexión pueden enseñarse fácilmente por medio de la utilización de estos artefactos. Por otro lado, cada uno de estos artefactos es la ejemplificación concreta de un orbifold euclídeo y, por lo tanto, ellos nos permiten acceder en una forma práctica al concepto de orbifold.

Al lector, le recomendamos no alejarse del computador, pues la lectura se debe hacer interactuando con muchos sitios en la web.¹

NOTAS BIOGRÁFICAS SOBRE ESCHER

Los dibujos de Escher muestran una variada gama de paradojas y objetos imposibles, y exploran los alcances de las ilusiones ópticas. Esta obra, reconocida por su realismo meticuloso y admirada por su virtuosismo, no cesa de intrigar a matemáticos, psicólogos y al público general.

Comenzaremos recordando muy rápidamente quién fue Maurits Cornelis Escher. Nació en Leeuwarden (Frise, Países Bajos) en 1898. Entre 1903 y 1918 realizó sus estudios de primaria y secundaria. Con respecto a estos años hay que decir que la secundaria fue prácticamente una pesadilla para él, con la única excepción de las dos horas semanales de dibujo que disfrutaba enormemente. En 1919 entró a la Escuela de Arquitectura y Bellas Artes de Haarlem, donde rápidamente se dio cuenta que su inclinación no era la Arquitectura sino las Bellas Artes.

Su maestro, el profesor De Mesquita, fue su guía en el aprendizaje del difícil arte del grabado. Para 1922 ya había adquirido gran destreza en el manejo de técnicas de grabado. Su maestro consideró que ya estaba maduro y que era hora de que emprendiera su camino solo. Escher seguiría en contacto con De Mesquita hasta su muerte.

¹ Para apreciar algunos videos sobre los artefactos que imprimen diseños simétricos, recomendamos una visita a la página web: <http://www.atractor.pt>.

En el período comprendido entre los años 1922 y 1935 vivió en Italia, donde conoció a Jetta Umiker, quien sería su esposa desde 1924 y con quien compartió la pasión por dibujar y pintar. Cada primavera emprendían largas excursiones por los pueblos de Italia. La obra de estos años se enmarcó principalmente en el tema de paisajes y grabados de pequeños pueblos, inspirados en las múltiples excursiones hechas en Italia. Para esa época Escher era aún muy desconocido.

En el año 1935 el clima fascista que se vivía en Italia le hace la vida insoporrible y decide dejar Italia. Siendo Jetta de origen Suizo, se radican en Suiza por corto tiempo y en el año siguiente hacen varios cruceros en el Mediterráneo. Estos cruceros los financiaron con grabados de Escher, ya que el dueño de la compañía de cruceros, quien era un amante del arte, le aceptó el canje que Escher le propuso en una carta. En uno de estos cruceros visitó por segunda vez el Palacio de la Alhambra de Granada. Ya había estado allí 10 años antes. Esta segunda visita le entregó a Escher las llaves de un mundo lleno de nuevas posibilidades. En compañía de su esposa tomó nota cuidadosa de muchos de los diseños de la Alhambra, notas que serían su inspiración en los años venideros.

En Internet² se pueden observar los primeros dibujos de teselaciones inspiradas en la Alhambra. Allí vemos, por ejemplo, las acuarelas conocidas como *Niño chino* (*China boy*), *Ardillas* (*Squirrels*) y *Hombres fuertes* (*Strong men*). Todas ellas son del año 1936.

En 1937 se instaló en Uccle, cerca de Bruselas y en sus obras se ve ya la influencia de la Alhambra. En la misma página web podemos apreciar cómo él comienza a hacer variaciones en las teselaciones para producir obras más complejas. Por ejemplo, en el año 1937 produce los grabados *Desarrollo I* (*Development I*) y *Metamorfosis I* (*Metamorphosis I*) en donde se ve claramente la utilización dinámica que él hace de las teselaciones.

En enero de 1941 se trasladó para Baarn en los Países Bajos. Su clima frío y húmedo obligó a Escher a trabajar en recogimiento, lo que a su vez dio pie para que allí fuese la cuna de su obra más rica. En 1962 debió ser operado y su producción se suspendió por un corto período. En 1969 terminó su última y magistral xilografía: *Serpientes*³ (*Serpents*). Esta xilografía está llena de deta-

² Consultar la galería (gallery) de la página web <http://www.tessellations.org>.

³ Véase <http://www.arrakis.es/~sysifus/escher.html>.

lles; se pueden apreciar algunos de menos de 2 milímetros. Murió el 21 de febrero de 1971. Un estudio muy completo de la vida y obra de M. C. Escher se puede leer en *Le miroir magique de M.C. Escher* (Ernst, 1978).⁴

ESCHER: ¿MATEMÁTICO O ARTISTA?

Cuando se observan las obras de Escher, uno no puede dejar de maravillarse por sus minuciosos detalles. Su obra muestra su carácter obsesivo e incansable. En el momento en que Escher se dio cuenta y reconoció la riqueza escondida en los diseños geométricos de la Alambra comenzó un trabajo permanente y repetitivo sobre ellos. Hizo investigaciones matemáticas que lo llevaron a comprender y a descubrir muchos trucos que él pudo aplicar. Los matemáticos, como el geómetra Coxeter, se fascinaron con la obra de Escher e incluso lo invitaron a hablar en congresos de matemáticos, donde Escher no podía más que celebrarlo dado que se consideraba negado para las matemáticas. Podemos afirmar, tal como él mismo lo hacía, que no era matemático, pues no manejaba el lenguaje formal que usamos los matemáticos, sin embargo, sin temor a equivocarnos, podemos decir con toda seguridad que la mente de Escher era privilegiada en su concepción del mundo desde un punto de vista geométrico. Era simplemente un artista dotado con una profunda mente geométrica.

La obra de Escher se puede dividir en tres temas diferentes:

- paisajes,
- teselaciones o embaldosados,
- mundos imposibles (juegos con la perspectiva).⁵ El libro *Un mundo de figuras imposibles* (Ernst, 1991), es un muy buen compendio de estos trabajos de Escher.

TESELACIONES O EMBALDOSADOS

Sólo los dos últimos temas tienen interés para nosotros desde el punto de vista matemático. El tema de los mundos imposibles merece un estudio completo pero éste no es de nuestro interés en este espacio. Aquí queremos estudiar las

⁴ En <http://www.mcescher.com/indexuk.htm> y http://users.erols.com/ziring/escher_bio.htm se encuentran también biografías muy completas.

⁵ Véanse, por ejemplo, *Cascada, Arriba y abajo, Relatividad, Cóncavo y convexo y Tribarras de Penrose* en <http://aixa.ugr.es/escher/table.html>.

teselaciones y tratar de entender las herramientas matemáticas que se usan en el aparentemente complejo y misterioso mundo de ellas. Terminaremos el artículo dando un paseo por otras curvaturas y, a la vez, exhibiendo la grandeza de la mente geométrica de Escher en otras obras relacionadas con las teselaciones.

Una teselación o embaldosado de una superficie es cubrirla con una misma pieza (baldosa) que se repite sin dejar espacios ni solapamientos. Mostraremos, sin demeritar la complejidad del arte de Escher, que la ejecución de estas teselaciones sigue unas reglas sencillas y precisas.

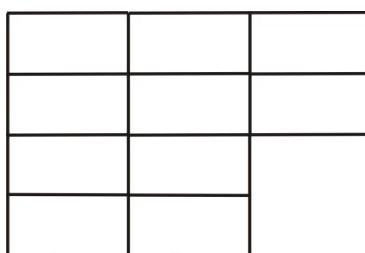


Figura 1. Teselación con rectángulos

A lo largo de la historia de la civilización se encuentran muchos ejemplos de teselaciones, o mosaicos. Desde que el hombre comenzó a construir paredes, pisos y techos, la colocación de piedras, ladrillos o baldosas produjeron en forma natural el surgimiento de teselaciones. La búsqueda de bellos diseños, la selección de formas y colores de las piezas y la repetición sistemática de motivos produjeron patrones simétricos como ejemplos de teselaciones.

Aunque se tienen infinitas formas de hacer diseños simétricos, básicamente existe un número muy restringido de patrones. Hay sólo 17 patrones básicos para hacer diseños simétricos sobre un plano. En efecto, el cristalógrafo E. S. Fedorov, interesado en el estudio de las formas de los cristales, probó en 1891 que existen solamente 17 grupos cristalográficos planos. Para probar esto es suficiente considerar sólo cuatro tipos de movimientos rígidos de una baldosa sobre un plano (decimos que son rígidos porque no cambian el tamaño de la baldosa ni la deforman, simplemente la cambian de lugar sobre el plano). Ellos son: traslaciones; rotaciones, reflexiones y reflexiones corridas. Cualquier movimiento rígido que nos imaginemos puede ser reproducido con una combinación apropiada de estos movimientos. En realidad sería suficiente considerar sólo el movimiento de reflexión, ya que una traslación se puede producir a partir de la combinación de dos reflexiones a lo largo de dos ejes paralelos, una rotación también es la combinación de dos reflexiones, pero en

este caso los ejes no son paralelos y una reflexión corrida es simplemente el producto de una reflexión por una traslación. Estas cuatro clases de movimientos generan grupos algebraicos. Estos grupos son solamente 17 (salvo homomorfismos) y son llamados los grupos cristalográficos planos o euclídeos.

El entendimiento en dos dimensiones, permitió que un poco más adelante Fedorov, Schonflies y Barlow (estos dos últimos matemáticos) demostraran la existencia de solamente 230 grupos cristalográficos tridimensionales.

Las aplicaciones de los grupos cristalográficos han sido diversas. El arte, la arquitectura y hasta la antropología se han beneficiado de ellos. Por ejemplo, como aplicación en la antropología, Albis-González y Valencia-Oviedo (1990) usan los grupos de simetría planos para confirmar la existencia de divisiones estilísticas en la cerámica precolombina de la región central de Panamá.

En la Figura 1 vemos una teselación euclídea con rectángulos. Observándola es natural preguntarse si ¿será posible teselar un plano con baldosas que no sean polígonos? La respuesta es sí y Escher fue un maestro en la producción de teselaciones hechas a partir de baldosas en forma de figuras humanas o de los más diversos y extraños animales. El arte Nazarí que podemos apreciar en los palacios como, por ejemplo en la Alhambra de Granada, fue rico en la creación de teselaciones, pero por razones de índole religioso ellos no se permitieron el uso de figuras humanas o de animales (véase Montesinos-Amilibia, 1987, 2005).

CALIDOSCOPIOS

Hemos dicho que queremos enseñar cuáles son las reglas simples que hay veladas detrás de los 17 patrones de diseños de simetría sobre un plano. Comenzaremos con un ejemplo que todos conocemos: un calidoscopio. Un calidoscopio es un artefacto formado por espejos y que tiene la propiedad que con el mismo artefacto se pueden producir infinitos diseños simétricos sobre el plano simplemente cambiando la imagen que se mira a través de él. Para que el calidoscopio funcione y no se solapen las figuras unas sobre otras, los espejos deben formar entre sí ángulos especiales. Por ejemplo, si los espejos forman un triángulo equilátero, la obra de Escher llamada *Lagarto, pez y murciélago (Lizard/Fish/Bat)* se puede reproducir mirando una baldosa triangular que con-

tiene únicamente las mitades del lagarto, del pez y del murciélago.⁶ En la Figura 2 representamos un esquema de dicha baldosa con su diseño simétrico.

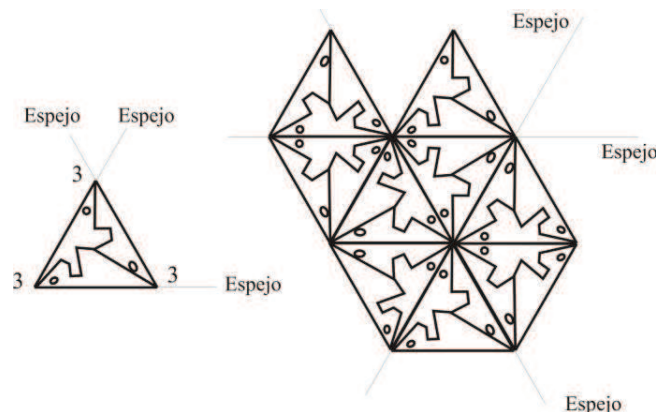


Figura 2. Baldosa y diseño de calidoscopio de triángulo equilátero

El diseño producido por un calidoscopio triangular con tres ángulos de 60° corresponde al grupo cristalográfico euclídeo denotado por $p3m1$, que es generado como grupo algebraico por tres reflexiones a lo largo de tres ejes que forman un triángulo equilátero. En este mismo diseño se ilustran (véase Figura 3) los movimientos rígidos de traslación, rotación, reflexión y de reflexión corrida de una baldosa básica.

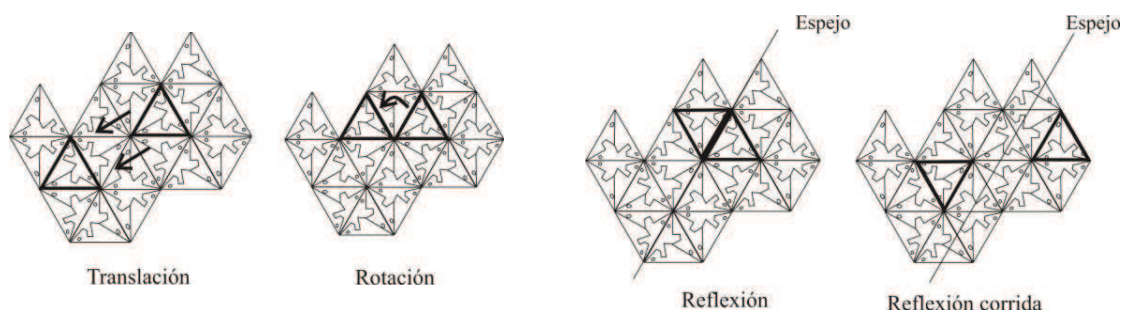


Figura 3. Movimientos rígidos aplicados a una baldosa

Para estudiar diseños simétricos hay dos puntos de vista posibles. De un lado, podemos usar el lenguaje algebraico, y en este sentido es que hablamos de grupos cristalográficos o, por otro lado, nos es permitido usar el lenguaje geométrico y topológico, y en este caso nos referimos en términos de orbificies, “orbifolds” o calidoscopios generalizados. En este artículo no definimos

⁶ Véase la baldosa y el diseño completo de esta obra de Escher en la teselación 85 de la página web: <http://britton.disted.camosun.bc.ca/jbescher2.htm>.

explícitamente el concepto de orbifold, pues nuestro objetivo no es el de profundizar en este concepto. Nos limitaremos a dar los 17 orbifolds asociados a los grupos cristalográficos planos. Por simplicidad en el lenguaje, el término que nosotros usaremos será el de calidoscopio; entendiendo que nos referiremos a los calidoscopios generalizados y que los calidoscopios formados por espejos son sólo ejemplos particulares.

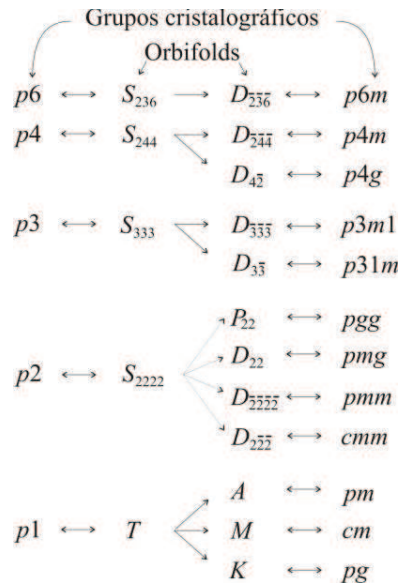


Tabla 1. Grupos cristalográficos versus orbifolds

Históricamente, la simetría de las teselaciones fue primero entendida desde el punto de vista algebraico. Como ya lo hemos dicho, los trabajos del cristalógrafo E. S. Fedorov probaron en 1891 la existencia de sólo 17 grupos algebraicos (cristalográficos) que permiten entender los diseños simétricos sobre un plano. A partir de las ideas de W. Thurston (1997), la simetría de los diseños simétricos se entiende también utilizando el concepto de calidoscopio, que pertenece al mundo de la geometría y de la topología. Ambos lenguajes son equivalentes; para cada grupo cristalográfico existe un calidoscopio y viceversa. En la Tabla 1 listamos los 17 grupos cristalográficos euclídeos con sus correspondientes calidoscopios. Usamos las notaciones usuales para los grupos cristalográficos y para los calidoscopios u orbifolds euclídeos. La notación de los orbifolds se irá entendiendo a medida que se estudia cada uno de ellos (véase Klein y Hurlbut, 1999).

MOVIMIENTOS RÍGIDOS Y ARTEFACTOS QUE LOS PRODUCEN

A continuación mostraremos cómo construir artefactos que permiten imprimir una misma imagen que se repite, obedeciendo al efecto de alguno de los movimientos rígidos (para mayores detalles véase Hilden, Montesinos, Tejada y Toro, 2011).

Traslación

Las rotativas utilizadas en la imprenta son un ejemplo del artefacto que produce traslaciones de una imagen. Cuando se tiene un rectángulo, hecho de material flexible, hay dos maneras de pegar las parejas de lados opuestos para formar dos cilindros diferentes. Y el efecto de impresión (véase Figura 4) usando ambos cilindros es muy diferente. Uno producirá traslaciones horizontales mientras que el otro las producirá en forma vertical. Ilustramos las dos opciones de impresión.

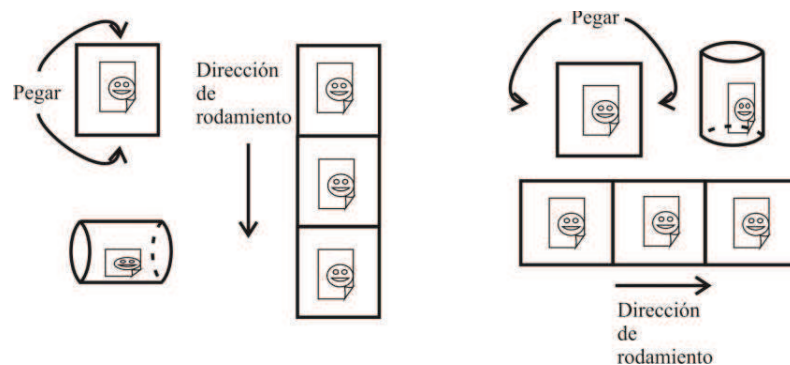


Figura 4. Traslaciones horizontales y verticales

Rotación

Para producir rotaciones necesitamos un artefacto en forma de cono, que al impregnarlo de tinta y ponerlo a rodar sobre un plano reproduzca el movimiento rígido de una rotación. Construimos el cono a partir de un sector circular con un ángulo de $360^\circ/n$, donde n es un entero positivo, con el fin de que al ir imprimiendo no se solapen las imágenes. La Figura 5 representa el caso de una rotación de 90° .

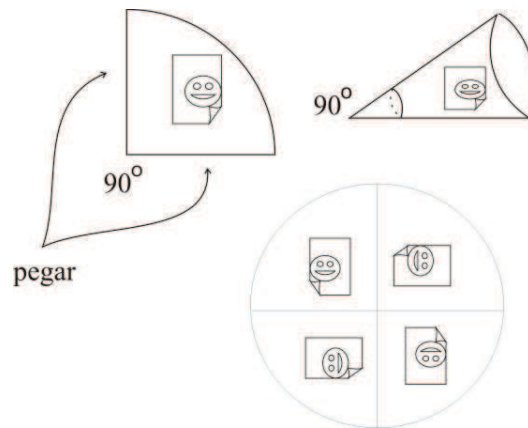


Figura 5. Rotación de 90°

Reflexión

En este caso, necesitaremos un artefacto que imite el efecto de un espejo (véase la Figura 6). Para esto podemos usar el arte de la serigrafía, que usa material poroso y delgado con el fin de poder imprimir una figura por cualquiera de los dos lados del material. Al hacer esto lo que se obtiene es la reflexión de la figura que se ve del otro lado, de igual forma como si la estuviésemos mirando en un espejo. Este artefacto lo debemos hacer con un material delgado y poroso pero con cierta rigidez que permita el rodamiento. Además, el artefacto debe tener bordes rectos, que actuarán como ejes de reflexión y sobre los cuales nos apoyamos para darle vuelta al artefacto y poder ir imprimiendo por ambos lados. Cuando el artefacto va rodando siempre se gira sobre alguna arista manteniéndola apoyada sobre el plano.

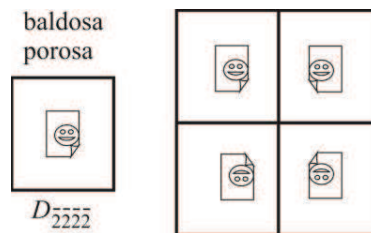


Figura 6. Reflexiones

Reflexión corrida

Para reproducir una reflexión corrida necesitamos un artefacto que combine la posibilidad de hacer una reflexión, o sea que podamos imprimir por ambos lados y que, además produzca también el efecto del cilindro en cuanto a tras-

laciones. Una banda de Möebius cumple ambas condiciones. Construimos una banda de Möebius a partir de un rectángulo hecho de material poroso y flexible, al cual se le pegan dos lados opuestos en forma cruzada. En la Figura 7 mostramos la construcción de una banda y el efecto al imprimir con ella.

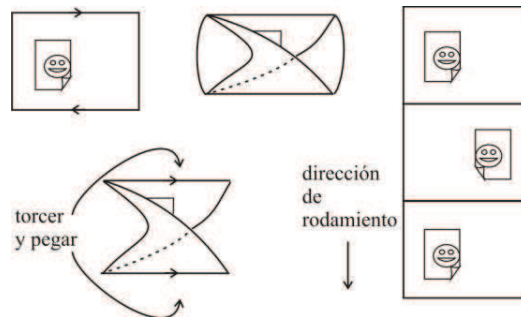


Figura 7. Cinta de Möebius y reflexión corrida

Así pues, cada movimiento rígido puede ser reproducido por un artefacto. Como cada grupo cristalográfico es generado por algunos de estos movimientos rígidos, una buena combinación de los artefactos anteriormente descritos nos dará la posibilidad de tener 17 artefactos diferentes, uno para cada uno de los 17 grupos cristalográficos.

Estos artefactos son justamente los 17 calidoscopios generalizados u orbificies.

Test para identificar el calidoscopio que corresponde a un diseño simétrico

Caso 1. *No hay rotaciones*

1. No hay reflexiones ni reflexiones corridas: Toro T
2. No hay reflexiones pero hay reflexiones corridas: Botella de Klein K
3. Hay reflexiones y reflexiones corridas: Cinta de Möebius M
4. Hay reflexiones y no reflexiones corridas: Anillo A

Caso 2. *Hay rotaciones pero no hay reflexiones ni reflexiones corridas*

1. Hay centro de orden 6: S_{236}
2. Hay centro de orden 3 pero no de orden 6: S_{333}
3. Hay centro de orden 4: S_{244}

4. Sólo hay centros de orden 2: S_{2222}

Caso 3. *Hay rotaciones y reflexiones o reflexiones corridas*

1. Hay centro de orden 6: $D_{\overline{236}}$

2. Sólo hay centros de orden 3 y por todos ellos pasan reflexiones: $D_{\overline{333}}$

3. Sólo hay centros de orden 3 y por alguno de ellos no pasan reflexiones: $D_{\overline{3\bar{3}}}$

4. Hay centros de orden 4 y por ellos pasan reflexiones: $D_{\overline{244}}$

5. Hay centros de orden 4 pero por ellos no pasan reflexiones: $D_{\overline{4\bar{2}}}$

6. Sólo hay centros de orden dos

1. Por todos ellos pasan reflexiones: $D_{\overline{2222}}$

2. Sólo por algunos pasan reflexiones: $D_{\overline{2\bar{2}2}}$

3. Por ninguno de ellos pasan reflexiones pero hay reflexiones: D_{22}

4. Por ninguno de ellos pasan reflexiones pero hay reflexiones corridas: P_{22}

Compárese el test anterior con la Figura 9 de Albis-González y Valencia-Oviedo (1990). Véase también Gutiérrez-Santos (1992) y Klein y Hurlbut (1999).

Teselaciones planas

En lo que sigue estudiaremos los grupos cristalográficos junto con sus calidoscopios asociados (según la Tabla 1). Además los relacionaremos con algunas de las obras de Escher.

LOS GRUPOS CRISTALOGRAFICOS cm Y pm Y LOS CALIDOSCOPIOS M Y A

Si miramos detenidamente la obra *Escarabajos*⁷ (*Scarabs*), sin tener en cuenta sus colores, podemos distinguir un eje de reflexión que pasa por el medio de los escarabajos y otro eje de reflexión corrida que pasa en medio de las patas de los escarabajos. Como no hay rotaciones, deducimos entonces que se trata del calidoscopio denotado por M (primera letra de Möebius). Éste lo llamamos cinta de Möebius, la cual es la misma *cinta de Möebius* descrita un poco más arriba pero, además, imprimimos con ella misma varias cintas paralelas así:

⁷ Véase <http://www.tessellations.org/eschergallery20.htm>.

una vez se ha impreso una cinta como la de la Figura 7, se consigue la impresión de su reflejo en sus bordes al darle la vuelta a la cinta de Möebius como si fuese un calcetín. El calidoscopio M corresponde al grupo cristalográfico cm , que es generado por una reflexión y una reflexión corrida con ejes paralelos.

Si en la misma obra de los escarabajos, tenemos en cuenta los colores, podemos distinguir dos ejes de reflexión paralelos, uno que pasa por la mitad de los escarabajos blancos y otro que pasa por el medio de los escarabajos cafés. Tenemos entonces dos ejes de reflexión paralelos y como no hay rotaciones, deducimos que el calidoscopio correspondiente es A , llamado *anillo*. Un anillo es un cilindro hecho de material poroso. La manera de operar con este cilindro es la de imprimir primero una cinta como cualquiera de las de la Figura 4 y a continuación darle la vuelta al cilindro como a un calcetín para imprimir el reflejo de la primera cinta en una cinta paralela.

EL GRUPO CRISTALOGRAFICO $p1$ Y EL TORO T

En la obra *Pegasos*⁸ podemos ver que hay una baldosa básica en forma de pegaso (en nuestro análisis no hacemos caso a los colores y pensamos que todos los pegasos son del mismo color) que se repite trasladada en dirección horizontal y en dirección vertical. Es decir, tenemos traslaciones en dos sentidos. Obsérvese que se ven también traslaciones diagonales, pero estas aparecen como composición de traslaciones horizontales con verticales. Observamos también que no hay rotaciones ni reflexiones. A partir de la baldosa del pegaso y teniendo la autorización para hacer traslaciones en dos sentidos (independientes) podemos teselar todo el plano. El grupo cristalográfico generado por dos traslaciones es $p1$ y corresponde al calidoscopio llamado *toro*, denotado por T . En la Figura 8 exhibimos un toro y el diseño que se imprimiría con él.

Abrimos un paréntesis en nuestra discusión sobre los artefactos que nos permiten reproducir las teselaciones para hacer caer en cuenta cómo Escher se las ingenió para hacer sus diseños sin tener que usar artefactos como el toro. Aunque Escher no conocía el toro, supo aplicar la esencia del toro, el cual tiene la particularidad de trasladar una figura en dos direcciones.

⁸ Ver <http://britton.disted.camosun.bc.ca/jbescher3.htm> y <http://www.tessellations.org/eschergallery25.htm>

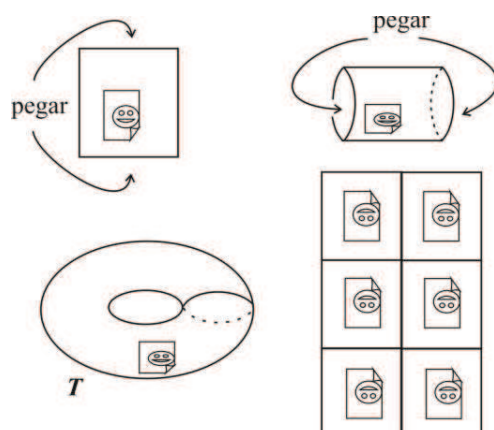


Figura 8. Diseño impreso con un toro

En la misma página web <http://britton.disted.camosun.bc.ca/jbescher3.htm> se ve la animación que ilustra cómo se construye la baldosa básica a partir de un cuadrado y que probablemente nos muestra lo que Escher hizo. Allí podemos ver muy claramente las dos traslaciones que hemos mencionado. La clave de esta construcción es la de partir de una teselación sencilla del plano hecha en este ejemplo por cuadrados y luego cada cuadrado se modifica tal cual se ve en la animación mencionada. La idea es de deformar, por ejemplo, la línea que forma el lado superior del cuadrado, en este caso, se dibuja el perfil de la cabeza y del lomo del pegaso, para trasladarla enseguida hacia el lado inferior del cuadrado, formando ahora el pecho y las patas traseras del pegaso. A continuación se deforma la línea del lado derecho del cuadrado obteniendo las alas y la cola del pegaso para luego trasladarla hacia el lado izquierdo del cuadrado obteniendo con ella las patas delanteras del pegaso. Trucos similares a éste fueron utilizados por Escher para poder confeccionar sus diseños. En general, él partía de una teselación hecha por polígonos y a continuación los deformaba utilizando éste u otros trucos similares que más adelante comentaremos. El truco anterior es posible aplicarlo siempre que se tengan dos lados paralelos e iguales en el polígono al cual se le hacen las deformaciones.⁹

Cerrando el paréntesis, en <http://www.tessellations.org/eschergallery15.htm> encontramos la obra *Sapos y peces* de 1942 de Escher que podría ser impresa por un toro. En ella observamos que la baldosa básica está conformada por la pareja de un sapo junto con un pez y que, además, las traslaciones no son ho-

⁹ Véase el mismo truco aplicado en la construcción de otras teselaciones (en particular las teselaciones 75 y 97) en <http://britton.disted.camosun.bc.ca/jbescher4.htm>, aunque en estos dos casos no se aplica sino a un solo par de lados.

rizontales ni verticales, como en el caso de los pegasos, sino que siguen la dirección de dos diagonales, que no son perpendiculares entre sí. En este caso debemos construir el toro a partir de un paralelogramo que no es rectángulo. La dirección de sus lados nos dirá cuál es la dirección de las traslaciones. La Figura 9 nos enseña un cilindro que genera traslaciones sesgadas.

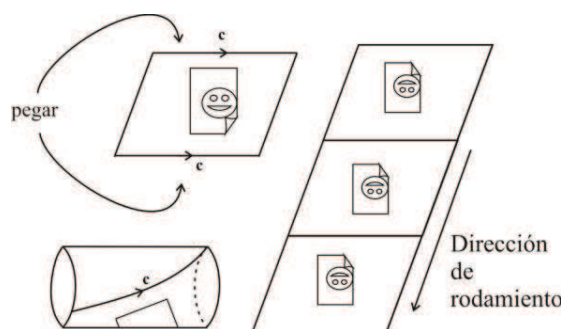


Figura 9. Traslación siguiendo una diagonal

Le recomendamos al lector que haga el ejercicio de construir este cilindro con un paralelogramo de papel.

LOS GRUPOS CRISTALOGRAFICOS $p3m1$, pmm , $p4m$ Y $p6m$ Y LOS CUATRO CALIDOSCOPIOS COMUNES $D_{\overline{333}}$, $D_{\overline{2222}}$, $D_{\overline{244}}$ Y $D_{\overline{236}}$

El grupo cristalográfico $p3m1$ generado por reflexiones a lo largo de tres ejes que forman un triángulo equilátero y el grupo pmm generado por reflexiones a lo largo de cuatro ejes que forman un rectángulo están en correspondencia con los calidoscopios comunes formados por espejos y denotados por $D_{\overline{333}}$ y $D_{\overline{2222}}$, donde la letra D significa que se tiene un disco topológico con bordes y cada uno de los números \overline{n} nos indica que hay un ángulo en el borde de $180^\circ/n$ formado por dos espejos consecutivos.

Ya discutimos anteriormente que la obra de Escher llamada *Lagarto, pez y murciélago* puede ser reproducida observando una baldosa triangular que contiene únicamente la mitad del lagarto, la mitad del pez y la mitad del murciélago a través de un calidoscopio de tres espejos que forman entre ellos ángulos de 60° y por lo tanto este diseño corresponde al calidoscopio $D_{\overline{333}}$ (véase la Figura 2). Por otro lado, la obra *Motivos 4*¹⁰ (*Motifs 4*) corresponde al calidoscopio $D_{\overline{2222}}$ y se puede reproducir al mirar una baldosa cuadrada, que contenga solamente la mitad de una abeja, de una mariposa, de un pez y de un murcié-

¹⁰ Véase <http://www.tessellations.org/eschergallery19.htm>.

lago, a través de un calidoscopio formado por cuatro espejos que forman un cuadrado. Por otro lado, los calidoscopios $D_{\overline{244}}$ y $D_{\overline{236}}$ corresponden a los grupos $p4m$ y $p6m$ que son generados, cada uno por tres reflexiones a lo largo de tres ejes. En el primero, los tres ejes forman un triángulo isósceles recto y en el segundo forman un triángulo con ángulos de 90° , 60° y 30° . Al igual que los dos calidoscopios anteriores sus diseños se pueden producir por tres espejos que formen los ángulos respectivos. La Figura 10 ilustra $D_{\overline{2222}}$.

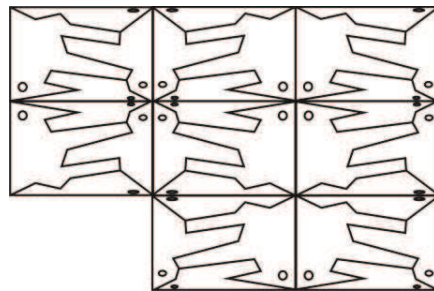


Figura 10. Diseño de calidoscopio $D_{\overline{2222}}$

EL GRUPO CRISTALOGRÁFICO $p3$ Y EL CALIDOSCOPIO S_{333}

En la obra *Reptiles*¹¹ vemos que hay una baldosa básica en forma de lagarto que se repite. En la misma forma que en el caso de los pegajos en nuestro análisis no nos interesa diferenciar los colores. La baldosa se repite por rotación de 120° en los vértices señalados con triángulos en la Figura 11 y esto nos permite teselar todo el plano.

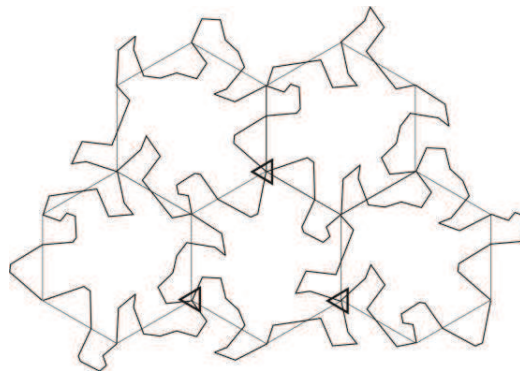


Figura 11. Centros de rotación de 120°

El grupo cristalográfico generado por tres rotaciones de 120° en los vértices de un triángulo equilátero es $p3$ y corresponde al calidoscopio S_{333} . Aquí la letra

¹¹ Véase [http://aixa.ugr.es/escher/800x600/Reptiles_\(boceto\).jpg](http://aixa.ugr.es/escher/800x600/Reptiles_(boceto).jpg)

S nos indica que se tiene una esfera topológica y cada número n nos dice que hay un cono de $360^\circ/n$. Recordemos que el artefacto que nos reproduce una rotación es un cono. Así, S_{333} es un artefacto parecido a una almohada o cojín triangular con tres esquinas, que a su vez son conos de 120° cada uno. Lo mostramos en la Figura 12.

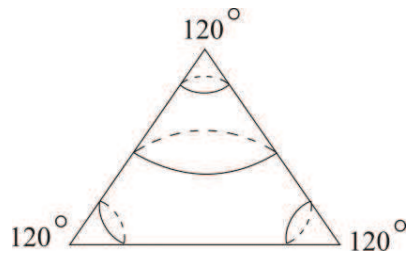


Figura 12. El cojín S_{333}

Abramos de nuevo un paréntesis y expliquemos brevemente el truco que probablemente usó Escher para construir la baldosa del lagarto. Escher partió de una teselación hecha de hexágonos regulares y cada uno de estos hexágonos lo modificó teniendo en cuenta la esencia del calidoscopio S_{333} , que es la de producir tres rotaciones de 120° en los vértices de un triángulo equilátero. La secuencia exhibida en la Figura 13 nos ilustra los dos primeros pasos en la construcción de la baldosa básica a partir de un hexágono. No ilustramos el tercer paso que se realiza de manera similar para modificar los últimos dos lados del hexágono (véase Seymour y Britton, 1989, p. 207).

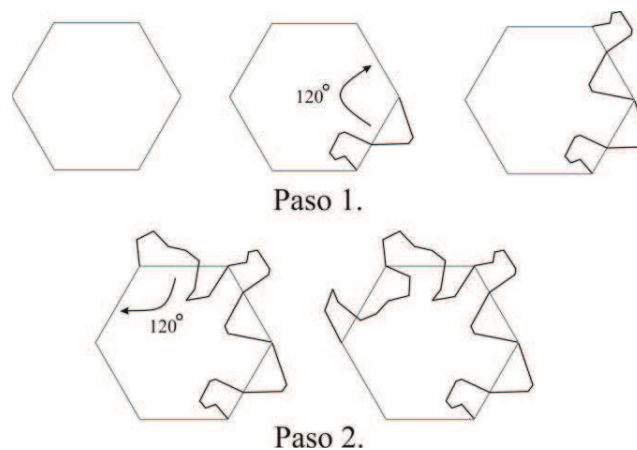


Figura 13. Los dos primeros pasos para construir el lagarto de la baldosa básica

Este truco se puede aplicar cuando se tienen lados consecutivos iguales en el polígono de la teselación original.¹²

LOS GRUPOS $p2$, $p4$, $p6$ Y LOS CALIDOSCOPIOS S_{2222} , S_{244} Y S_{236}

El calidoscopio S_{2222} , como su notación lo indica, tiene cuatro esquinas que son conos de 180° y aparece en dos formas básicas diferentes una es la de una almohada tradicional y la otra tiene forma de cojín tetraédrico o almohada torcida. Este calidoscopio corresponde al grupo cristalográfico $p2$, que es generado por cuatro rotaciones de 180° . Representamos la construcción de la almohada torcida junto con su diseño simétrico en la Figura 14.

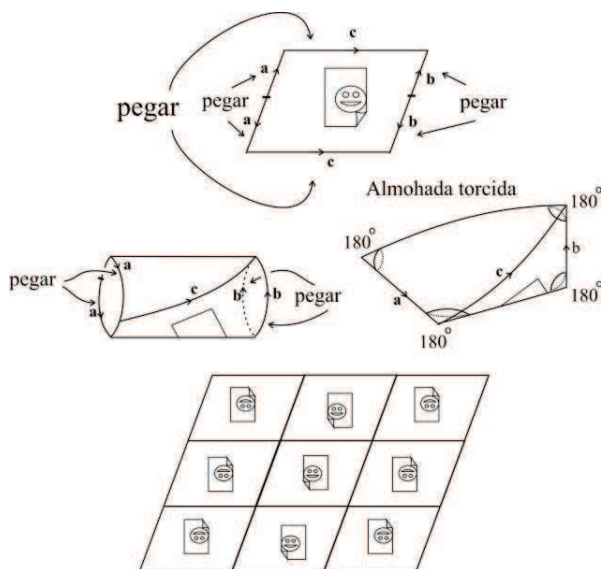


Figura 14. S_{2222} en forma de almohada torcida

Otra forma de construir el cojín tetraédrico o almohada torcida es la siguiente: partimos de un triángulo acutángulo de material flexible al cual le marcamos los puntos medios de sus tres lados. Trazamos el triángulo que une estos puntos medios, doblamos a lo largo de los lados de este nuevo triángulo y al pegar estas mitades nos produce el tetraedro. Observamos que por la forma en que lo hemos construido, cada vértice de este tetraedro está formado por tres ángulos cuya suma es exactamente 180° . Le proponemos al lector construir este tetraedro con papel. Si dicho tetraedro lo cubre con tinta en forma irregular y lo echa a rodar sobre un plano verá cómo se produce un diseño simétrico.

¹² Véase el mismo truco aplicado en la construcción de otras teselaciones (en particular, las teselaciones 104 y 99) en la página web <http://britton.disted.camosun.bc.ca/jbescher4.htm>.

Por su lado, los calidoscopios S_{244} y S_{236} (véase la Figura 15) son análogos al cojín S_{333} y tienen forma de cojines triangulares. Ellos corresponden a los grupos cristalográficos $p4$ y $p6$. Donde $p4$ es generado por tres rotaciones, una de 180° y dos de 90° y, por su lado, $p6$ también es generado por tres rotaciones, en este caso de 180° , 120° y 60° .

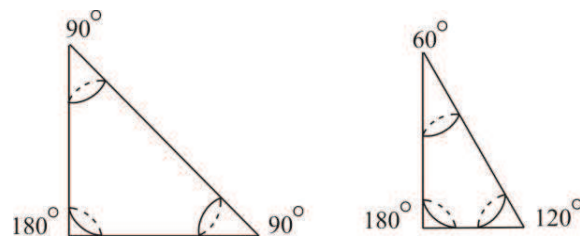


Figura 15. Los cojines S_{244} y S_{236}

En la obra de Escher encontramos diseños con estos tres calidoscopios. Por ejemplo, *Ardillas*¹³ y *Sapos*¹⁴ (*Frogs*) corresponden ambas al calidoscopio S_{2222} .

Por otro lado, la obra titulada *Pescado*, de 1938, y la del mismo nombre, de 1964, son ambas producidas por S_{244} .¹⁵ De la misma forma, la obra *Lagartos II* (teselación 104) corresponde a S_{244} .¹⁶ En la misma página web consultada para la obra citada antes, tenemos un ejemplo de S_{236} en la obra del *Pez volador* (haga clic en la teselación 99 para ver el diseño completo). Es interesante observar allí mismo la animación de la construcción de su baldosa básica.

LOS GRUPOS cmm , pmg Y LOS CALIDOSCOPIOS $D_{\overline{222}}$ Y D_{22}

A continuación describiremos cómo se construyen los calidoscopios $D_{\overline{222}}$ y D_{22} . Primero que todo pensemos en el siguiente hecho. Consideremos la almohada rectangular S_{2222} , sin diseño pintado sobre ella. Pensémosla como si estuviese llena de aire. Ella tiene un plano de simetría que pasa simultáneamente por las cuatro esquinas. Al cortar la almohada a lo largo de este plano, obtenemos dos piezas rectangulares del mismo tamaño. Si pensamos que ellas son hechas de material poroso, entonces cada una de ellas resulta ser el cali-

¹³ Véase <http://www.tessellations.org/eschergallery2.htm>.

¹⁴ Véase <http://www.tessellations.org/eschergallery14.htm>.

¹⁵ Ver <http://www.tessellations.org/eschergallery10.htm> y <http://www.tessellations.org/eschergallery26.htm>.

¹⁶ En <http://britton.disted.camosun.bc.ca/jbescher4.htm> se aprecia la animación de la baldosa básica de *Lagartos II*.

doscopio $D_{\overline{2222}}$ estudiado anteriormente. Así, de S_{2222} hemos obtenido dos veces $D_{\overline{2222}}$, por esta razón se dice que S_{2222} es el doble de $D_{\overline{2222}}$. Pero S_{2222} admite otras dos clases de planos de simetría (véase Figura 16) y cada vez que cortemos por uno de ellos encontraremos otro artefacto que si lo pensamos de material poroso nos permitirá imprimir diseños diferentes.

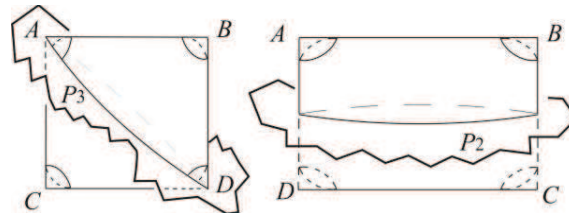


Figura 16. Otros planos de simetría de S_{2222}

Al cortar por los planos anteriores obtenemos los calidoscopios $D_{\overline{222}}$ y D_{22} , donde el primero de ellos se parece a un sombrero de fiesta de cumpleaños con dos ángulos de 90° en su borde y el segundo a una funda de almohada. Apreciamos estos calidoscopios en la Figura 17, junto con los diseños simétricos que ellos producen. De la misma forma que anteriormente, los números de la notación nos indican la esencia de los calidoscopios. Así, el número 2 sin barra de $D_{\overline{222}}$ nos dice que hay un centro de rotación de 180° , la letra D que hay reflexiones y los dos números 2 con barra nos dicen que hay dos vértices diferentes donde se tienen reflexiones a lo largo de ejes perpendiculares entre sí, que son justamente ángulos de 90° en el borde del disco. Por otro lado, en la notación D_{22} , la letra D indica la existencia de un eje de reflexión y los dos números 2, indican la existencia de dos centros de rotación de 180° . La obra *Cangrejos*¹⁷ (*Crabs*) es un ejemplo de D_{22} .

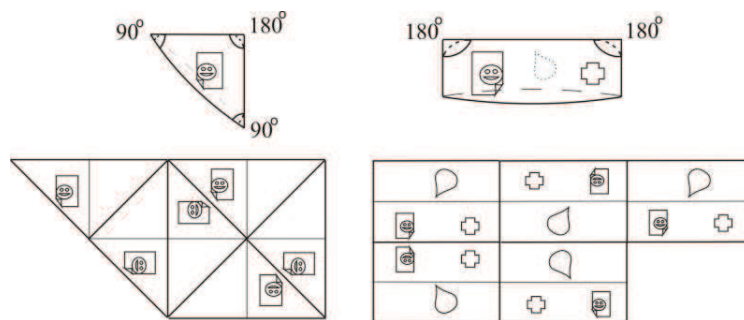


Figura 17. Los calidoscopios $D_{\overline{222}}$ y D_{22} y sus diseños simétricos

¹⁷ Véase en <http://www.mcescher.com/indexuk.htm>, página oficial de Escher.

LOS GRUPOS $p4g$, $p31m$ Y LOS CALIDOSCOPIOS $D_{4\bar{2}}$ Y $D_{3\bar{3}}$

Los artefactos $D_{4\bar{2}}$ y $D_{3\bar{3}}$ correspondientes a los grupos $p4g$ y $p31m$ se asemejan también a sombreros de fiesta de cumpleaños que aparecen al cortar, respectivamente, los cojines triangulares S_{244} y S_{333} a lo largo de planos de simetría (véase la Figura 18).

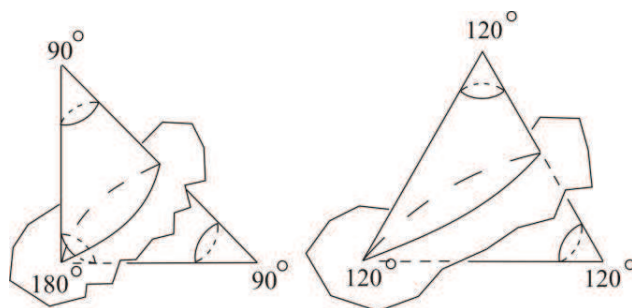


Figura 18. Planos de simetría de S_{244} y S_{333}

De nuevo $D_{4\bar{2}}$ nos indica que se tiene un cono de 90° y que hay un ángulo de 90° en el borde. Mientras que $D_{3\bar{3}}$ tiene un cono de 120° y un ángulo de 60° en el borde. De esto podemos deducir que $p4g$ se puede generar con una rotación de 90° junto con dos reflexiones a lo largo de ejes perpendiculares y, por su lado, $p31m$ está generado por una rotación de 120° junto con dos reflexiones a lo largo de ejes que forman un ángulo de 60° (obsérvese la Figura 19).

En Escher encontramos diseños con estos calidoscopios. Por ejemplo, la obra *Hombres fuertes*¹⁸ y la obra *Trabajo simétrico 45*, conocida también como *Ángeles y demonios*¹⁹, corresponden ambas al calidoscopio $D_{4\bar{2}}$. Por otro lado, el *Niño chino*²⁰ de 1936, se relaciona con a $D_{3\bar{3}}$.

¹⁸ Véase <http://www.tessellations.org/eschergallery3.htm>.

¹⁹ Véase <http://www.dartmouth.edu/~matc/math5.pattern/lesson7art.html>.

²⁰ Véase <http://www.tessellations.org/eschergallery1.htm>.

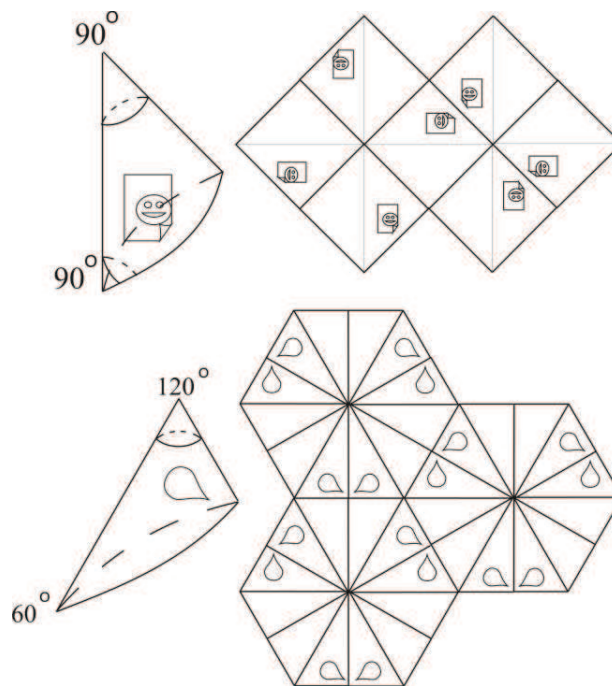


Figura 19. D_{42} y D_{33} con sus diseños simétricos

LOS GRUPOS pg , pgg Y LOS CALIDOSCOPIOS K Y P_{22}

Llegamos al final del listado de calidoscopios y con ello a los diseños de Escher más complejos y algunos de los más bellos. Los calidoscopios K y P_{22} son llamados, respectivamente, *botella de Klein* y *plano proyectivo*. K primera letra de Klein y P primera letra de proyectivo.

Las obras *Golondrinas (Swallows)* y *Jinetes*²¹ (*Horsemen*) así como *Leones alados (Winged lions)*, en la teselación 66) y *Bulldogs*²² (en la teselación 97) son ejemplos de la botella de Klein K .

Observándolas con cuidado se detecta en ellas dos reflexiones corridas sobre ejes paralelos. Estas reflexiones se ven muy claras en la animación (que se aprecia en la misma página web) de la construcción de la baldosa básica de *León alado*. Es interesante anotar que en la construcción de la baldosa de *Bulldog* no se observa sino una única reflexión corrida la cual es seguida por una traslación. Sin embargo, así como el grupo pg , correspondiente a K , se puede

²¹ Ambas obras se aprecian en <http://www.tessellations.org/eschergallery2thumbs.htm>.

²² Se aprecian en <http://britton.disted.camosun.bc.ca/jbescher4.htm>.

generar por dos reflexiones corridas paralelas, también es posible generarlo con una sola reflexión corrida y una traslación.

Teniendo en cuenta la última observación, el artefacto K debe ser la combinación de un cilindro, que produce traslaciones, con una cinta de Möebius que produce una reflexión corrida. Para construirlo partimos de un rectángulo con cierres en sus bordes, tal cual lo ilustramos en la Figura 20.

El proceso de impresión, consiste en cerrar primero los cierres marcados con la letra A, hacer rodar la cinta de Möebius, para imprimir una cinta horizontal, y luego abrir los cierres A y cerrar los B, para hacer rodar una vuelta completa el cilindro, luego se intercambian los cierres, para imprimir de nuevo con la cinta de Möebius, y así se continúa imprimiendo alternando los cierres.

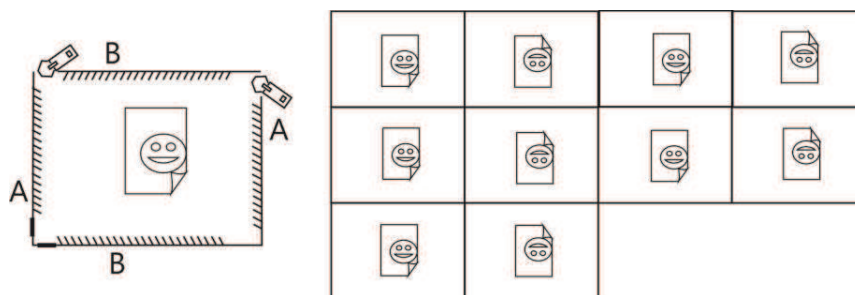


Figura 20. Botella de Klein y su diseño

Finalmente, para terminar esta sección de tesselaciones planas, estudiamos el Plano Proyectivo P_{22} , que es el calidoscopio correspondiente a las obras *Leones (Lions)* y *Perros (Dogs)*.²³ Detallando éstas, encontramos que en cada una de ellas hay dos reflexiones corridas con respecto a ejes perpendiculares. Su grupo cristalográfico correspondiente es pgg . El artefacto que imprimirá un diseño de estos debe ser una combinación de dos cintas de Möebius, que deben trabajar en forma perpendicular. Al igual que en el caso anterior partimos de un rectángulo con cierres en sus bordes dispuestos como en la Figura 21. Y la operación del artefacto se hace alternando el uso de los cierres, unas veces para obtener una cinta de Möebius que imprime en forma vertical y otras veces una cinta de Möebius que imprime en forma horizontal.

²³ Véase <http://www.tessellations.org/eschergallery1thumbs.htm>.

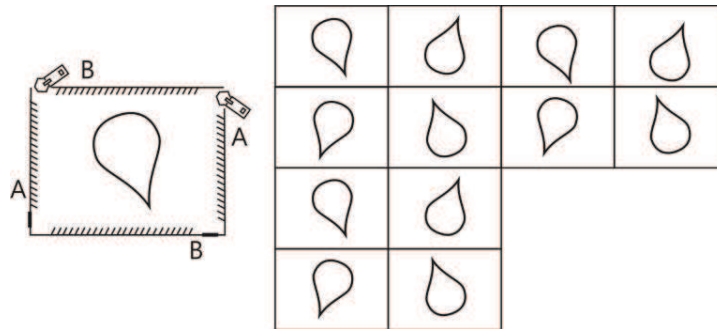


Figura 21. Plano proyectivo y su diseño

TESELACIONES EN OTRAS CURVATURAS

Así como tenemos teselaciones sobre un plano, es posible considerar teselaciones sobre otras superficies. Un plano es una superficie de curvatura constante cero. Una esfera es una superficie de curvatura constante positiva y un plano hiperbólico es una superficie de curvatura constante negativa. La Figura 22 nos muestra teselaciones hechas con triángulos en cada una de estas curvaturas.



Figura 22. Teselaciones sobre superficies de distintas curvaturas

Cuando observamos las dos primeras figuras, nuestra mente reconoce que la primera de ellas cubre una superficie plana (euclídea) y que la segunda cubre una esfera. Con respecto a la tercera nuestro cerebro no tiene la experiencia y se confunde. Manteniendo la mirada sobre ella vemos a veces que los vértices de los triángulos se salen del plano y otras que se hunden en el plano y no se sabe muy bien de qué superficie se trata; esta última es una teselación del modelo de Poincaré del plano hiperbólico.

Teselaciones esféricas

La mayoría de las teselaciones que hizo Escher son euclídeas, pero también podemos encontrar en sus trabajos teselaciones sobre esferas. Son ejemplos

una esfera esculpida en madera y teselada con peces²⁴, al igual que otra bella esfera también esculpida en madera con una teselación hecha de ángeles y demonios, cuya fotografía se encuentra en Ernst (1978, p. 41). También ubicamos una falsa teselación de una esfera²⁵; decimos que es falsa porque la figura del pez cambia de tamaño sobre la esfera, lo cual no es permitido en una verdadera teselación, ya que los movimientos son rígidos. Las teselaciones esféricas pueden también ser producidas por artefactos similares a los calidoscopios ya discutidos.

Teselaciones hiperbólicas

Escher estuvo muy obsesionado con la posibilidad de plasmar el infinito en una superficie finita esta idea repetitiva lo llevó a hacer muchas teselaciones del plano hiperbólico usando principalmente el modelo de Poincaré. El disco de Poincaré es una especie de claraboya redonda que nos permite visualizar el plano hiperbólico. Tiene la particularidad que a medida que nuestros ojos se dirigen al borde de la claraboya las figuras que observamos están cada vez más y más lejos y por eso su tamaño aparente es más pequeño. El borde corresponde al infinito.

En la teselación del plano hiperbólico (tercera figura) de la Figura 22 debemos entender que todos los triángulos tienen el mismo tamaño, sólo que los que vemos más pequeños están más alejados. En las obras *Límite circular III*, *Límite circular IV*²⁶ y *Límite circular I*²⁷ debemos entender que en cada una de ellas, todas las figuras son del mismo tamaño aunque las veamos de diferentes tamaños.

Para visualizar el plano hiperbólico existen diferentes clases de ventanas (o modelos). Además del modelo del disco de Poincaré, Escher usó el modelo del semiplano superior en la obra *División de superficie*²⁸. Lo mismo ocurre en la obra *División*²⁹. En este modelo el borde inferior está en el infinito y mientras más cerca estén las figuras a dicho borde ellas realmente están más y más lejos y por eso su tamaño aparente es más pequeño.

²⁴ Véase <http://www.dartmouth.edu/~matc/math5.pattern/lesson7art.html>.

²⁵ Véase http://aixa.ugr.es/escher/800x600/Superficie_esferica_con_peces.jpg.

²⁶ Ésta y la anterior se pueden apreciar en <http://www.arrakis.es/~sysifus/escher.html>.

²⁷ Véase http://aixa.ugr.es/escher/800x600/Limite_circular_I.jpg.

²⁸ Se aprecia en http://aixa.ugr.es/escher/800x600/Division_de_la_superficie.jpg.

²⁹ Véase <http://www.tessellations.org/eschergallery21.htm>.

Antes de enterarse de la existencia del modelo de Poincaré, Escher venía trabajando en su obsesión de plasmar el infinito en sus dibujos. En trabajos como *Evolución II*³⁰ y *Pequeño y más pequeño*³¹, Escher estaba elaborando la misma idea del infinito pero organizó las cosas de manera que las figuras más distantes estaban más cerca al centro del dibujo y por eso su tamaño es cada vez más pequeño mientras más cerca estén del centro. Estos dibujos los podemos pensar como la visión que tendríamos a la entrada de un túnel que está teselado. En su última y magistral obra *Serpientes*³² combina lo que ocurre en el disco de Poincaré con la idea de túnel teselado. Allí vemos que, aproximándonos tanto al borde como al centro del círculo mayor, los círculos que tejen la maya donde se enredan las serpientes se achican, dando la impresión de lejanía.

Para más información sobre el plano hiperbólico y el modelo de Poincaré, consúltese <http://mathworld.wolfram.com/PoincareHyperbolicDisk.html> y <http://math.youngzones.org/Non-Egeometry/poincare.html>. Véase también Montesinos-Amilibia (1987, 1992) y Ramírez-Galarza y Seade (2002).

Teselaciones del espacio

Así como un plano euclídeo se puede teselar, es posible teselar el espacio euclídeo. En este caso las baldosas básicas que se repiten son tridimensionales. Aunque brevemente, Escher también excursionó en el campo de teselaciones del espacio euclídeo tridimensional. Sus obras *División cúbica del espacio*³³ y *Profundidad*³⁴ hacen gala de su impresionante capacidad geométrica y son ejemplo de teselaciones del espacio euclídeo.

TESELACIONES COMO PARTES DE OTRAS OBRAS

Muchas de las teselaciones que realizó Escher eran estudios preliminares para introducirlas como parte de otras obras mucho más complejas.

En la obra *Reptiles*³⁵ vemos que se incluye, como parte de ella, la teselación plana Reptiles (boceto) mencionada en el estudio de S_{333} . Esta obra plasma

³⁰ Véase http://aixa.ugr.es/escher/800x600/Evolucion_II.jpg.

³¹ Véase <http://www.tessellations.org/eschergallery22.htm>.

³² Véase <http://aixa.ugr.es/escher/800x600/Serpientes.jpg>.

³³ Véase http://aixa.ugr.es/escher/800x600/Division_cubica_del_espacio.jpg.

³⁴ Véase en <http://www.mcescher.com/indexuk.htm>, página oficial de Escher.

³⁵ Véase <http://britton.disted.camosun.bc.ca/jbescher2.htm>.

cómo Escher se maravillaba con la idea de poder hacer dibujos con la apariencia de tres dimensiones en una superficie de sólo dos dimensiones. De forma similar y magistralmente, Escher usa la teselación de los *Leones alados* (véase la Botella de Klein K anteriormente estudiada) como parte central de su obra *El espejo mágico*³⁶ donde de nuevo se puede apreciar el juego de las tres dimensiones en dos dimensiones. Esta idea se repite en *Encuentro*³⁷ siendo la teselación del fondo también una Botella de Klein.³⁸

La serie de *Metamorfosis* (I, II y III) además de utilizar algunas teselaciones ya estudiadas por él involucra el desarrollo del concepto topológico de homotopía. Informalmente podemos decir que una homotopía es la deformación de un objeto durante un período de tiempo.

En *Metamorfosis I*³⁹, Escher retoma la teselación del *Niño chino* (véase el estudio de $D_{3\bar{3}}$) y la transforma gradualmente en un pueblo al lado de un acantilado. En *Metamorfosis II*⁴⁰ se observa la transformación de la palabra *metamorphose* pasando por diversas teselaciones y dibujos.

De carácter muy similar es la obra *Metamorfosis III*, la cual se aprecia en la página web: http://en.wikipedia.org/wiki/Metamorphosis_III.

CONCLUSIONES

Hemos visto en este artículo varias cosas:

- (1) Los grupos cristalográficos desde un punto de vista geométrico y práctico.
- (2) Una forma divertida para entender los movimientos rígidos.
- (3) Una forma práctica para imprimir diseños simétricos.
- (4) Una introducción al concepto de orbifold.
- (5) La obra de Escher como ejemplificación de los grupos cristalográficos.
- (6) Una introducción rápida a otras curvaturas.

³⁶ Véase http://aixa.ugr.es/escher/800x600/Espejo_magico.jpg

³⁷ (<http://www.tessellations.org/eschergallery17.htm>)

³⁸ Invitamos al lector a visitar <http://www.mcescher.com/indexuk.htm>, página oficial de Escher.

³⁹ Véase <http://www.tessellations.org/eschergallery6.htm>.

⁴⁰ Véase la animación que recorre esta obra en <http://www.3quarks.com/Applets/Metamorphose/>.

(7) Interpretaciones diferentes, a las usuales en topología, del toro, de la cinta de Möebius, de la botella de Klein y del plano proyectivo.

REFERENCIAS

- Albis-González, V.S. y Valencia-Oviedo, J.A. (1990). Una aplicación de los grupos de simetría a la confirmación de períodos y subperíodos estilísticos en la cerámica de la región central de Panamá. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias*, 17(67), 703-714.
- Ernst, B. (1978). *Le miroir magique de M.C. Escher*. Berlín: Ed. Benedikt Taschen.
- Ernst, B. (1991). *Un mundo de figuras imposibles*. Berlín: Ed. Benedikt Taschen.
- Gutiérrez-Santos, M.V. (1992). *Notas de geometría*. Bogotá: Editorial de la Universidad Nacional de Colombia.
- Hilden, H.M., Montesinos, J.M., Tejada, D.M. y Toro, M.M. (2011). Artifacts for stamping symmetric designs. *American Mathematical Monthly*, 118(4). 327-343.
- Klein, C. y Hurlbut, C.S. (Jr.) (1999). *Manual of mineralogy* (after James D. Dana). (Edición 21, revisada). Nueva York: John Wiley and Son.
- Montesinos-Amilibia, J.M. (1987a). *Classical tessellations and three-manifolds*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag.
- Montesinos-Amilibia, J.M. (1987b). Caleidoscopios y grupos cristalográficos en la Alhambra. *Epsilon*, volumen extra, 9-30.
- Montesinos-Amilibia, J.M. (1992). Las geometrías no euclídeas: Gauss, Lobachevski y Bolyai. *Historia de la matemática*, 65-114.
- Montesinos-Amilibia, J.M. (2003). *Caleidoscopios y 3-variedades*. Bogotá: Editorial de la Universidad Nacional de Colombia.
- Montesinos-Amilibia, J.M. (2005). *Geometría en los mosaicos del Palacio de la Alhambra de Granada*. Conferencia presentada en la Cátedra Pedro Nel Gómez, Universidad Nacional de Colombia, 4 de agosto 2005, Vídeo institucional.
- Ramírez-Galarza, A.I. y Seade, J. (2002). *Introduction to classical geometries*. Berlin: Birkhauser Verlag.
- Seymour, D. y Britton, J. (1989). *Introduction to tessellations*. Palo Alto, California: Dale Seymour Publications.
- Thurston, W. (1997). *Three-dimensional geometry and topology* (vol. 1). (Editado por S. Levy). Princeton, NJ: Princeton University Press.