

¿Se puede aprender álgebra en los primeros años de escolaridad?

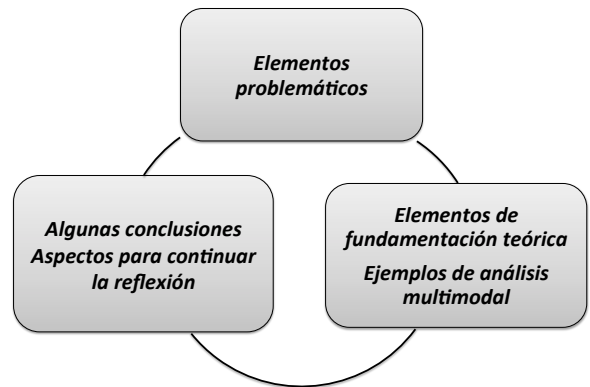
Algunos elementos sobre el desarrollo del pensamiento algebraico temprano

Rodolfo Vergel Causado

Grupo de Investigación Interdisciplinaria en Pedagogía del Lenguaje y las Matemáticas (GIPLyM)
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá, Colombia

10 de Mayo de 2014

Esquema de la presentación



Elementos problemáticos

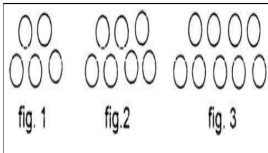


Figura 1. Secuencia figurar con apoyo tabular presentada en Radford (2010a)

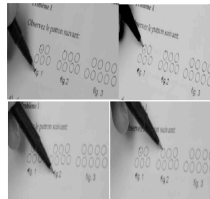


Figura 2. Secuencia de señalamientos realizados por Dan al abordar una tarea sobre secuencia figurar con apoyo tabular

- Dan: (refiriéndose a la Figura 1) Bien...[señalando a la fila superior] **2 en la parte superior; hay, hay 3 en la parte inferior** (...).
- Jimmy: [Figura] 2, hay 3; [Figura] 3, hay 4.
- Dan: Espera un minuto. OK [él hace una serie de gestos mientras habla; ver 4 de los 6 gestos en la Figura 2], **Figura 1, 2 en la parte de arriba. Figura 2, 3 en la parte de arriba. Figura 3, 4. Figura 4, 5.**
- Jimmy: Figura 10, será 11 (...).
- Dan: (...) **11 en la parte de arriba, y 12 en la parte de abajo.**
- Jimmy: Cada vez va a ser uno más en el aire.
- Frank: [Figura] 100? 101, 102 (...).
- Dan: **203.**

Elementos problemáticos

Revisar y repensar los estudios sobre el desarrollo del pensamiento matemático en general y en particular sobre el pensamiento algebraico

(Miranda, Radford & Guzmán, 2007; Arzarello, 2006; Radford, Bardini & Sabena, 2007; Radford, 2006, 2012, 2013a, 2013b; Roth & Radford, 2011).

El desarrollo del pensamiento algebraico puede investigarse a través de la forma en que surgen y evolucionan nuevas relaciones entre el cuerpo, la percepción y el inicio del uso de símbolos a medida que los alumnos participan en actividades sobre generalización de patrones.

Ejemplo: Formas como los niños y niñas refieren a lo indeterminado (Vasco, 2007; Radford, 2008a, 2008b, 2009, 2010b, 2010c)

Epistemológicamente: recursos cognitivos, físicos y perceptuales que los estudiantes movilizan cuando trabajan con ideas matemáticas (Arzarello, 2006; Radford, Edwards & Arzarello, 2009).

Kieran (1989, 2007) y Mason Vs Radford (2008b, 2009, 2010a)

Elementos problemáticos

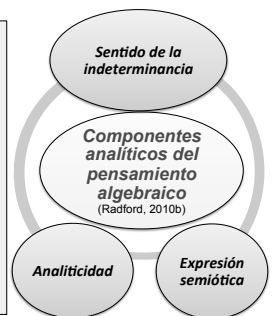
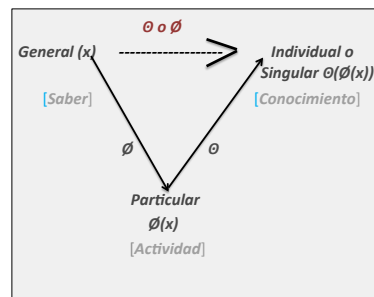
Zona de emergencia del pensamiento algebraico **Ignorada....** (Radford, 2010b)

Formas de pensamiento algebraico suscitadas por las Tareas y Actividades

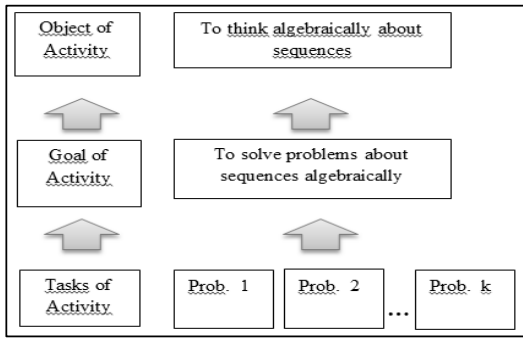
Problema didáctico:

Aparición de formas de pensamiento algebraico

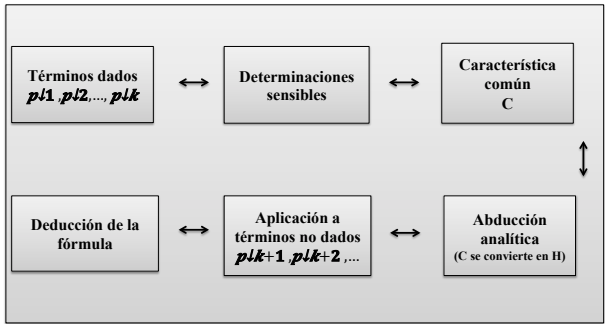
Terna hegeliana Radford (2013a)



La estructura del Particular
(Radford, 2013a)



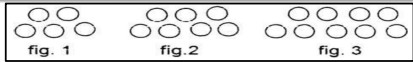
Generalización algebraica de patrones
(Radford, 2013b)



Sobre el análisis multimodal

- La inclusión del cuerpo en el acto de conocer...
 - La consideración de los recursos cognitivos, físicos y perceptuales que los estudiantes utilizan cuando trabajan con ideas matemáticas (Radford, Edwards & Arzarello, 2009)
 - El análisis debe tener en cuenta la relación de los diferentes recursos semióticos movilizados durante la actividad (lenguaje escrito, lenguaje hablado, gestos, acciones, etc.) (Arzarello, 2006)
 - El discurso de los estudiantes es una práctica social (Fairclough, 1995). El análisis debe tomar en cuenta la relación de los diferentes textos producidos en la actividad:
 - texto escrito
 - texto hablado
 - texto gestual
- con sus procesos de interpretación y producción, así como con su contexto social.

Ejemplos de análisis multimodal



“Calcula el número de círculos de la figura 9, sin construirla. Explica cómo lo haces”

L5. Laura Sofía: porque **1 más 1 da 2** [pausa] [tapa con sus dedos el primer círculo de la fila de arriba y el primero de la fila de abajo] **sumándole 3** [hace circular su dedo índice derecho alrededor de los tres círculos que sobran en la figura 1, después de contar el primero de la fila de arriba y el primero de la fila de abajo] [estas tres círculos los denomina luego “la torre”].

L6. Profesora Johanna: ¿y en la figura número 2?

L7. Laura Sofía: **2 más 2, 4** [pausa] [a medida que habla señala los cuatro círculos antes de la torre a través de dos deslizamientos con su índice derecho, el primero sobre los primeros círculos de abajo hacia arriba y luego sobre los siguientes dos círculos de abajo hacia arriba], **sumándole 3** [desliza su índice derecho en un recorrido triangular].

L8. Profesora Johanna: ¿y en la figura 3?

L9. Laura Sofía: **6** [pausa] [ubica su dedo pulgar derecho tapando el tercer círculo de arriba de izquierda a derecha] **y sumándole 3** [vuelve a deslizar su índice derecho en un recorrido triangular].

L3. Profesor Rodolfo: Y eso de 9 más 9, 18 ¿cómo lo haces en la figura?

L4. Profesora Johanna: Sí, enséñame acá en la figura [señala con su mano la secuencia] ¿cómo es?

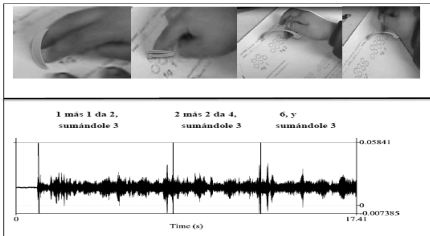


Figura 24. Arriba: Secuencia de gestos (señalamientos) que despliega Laura Sofía acompañada de palabras. Reconstrucción del video. Abajo: Un análisis prosódico en el programa Praat de las elocuciones de Laura Sofía (L5, L7, L9) con intervenciones de la profesora Johanna (L6 y L8)

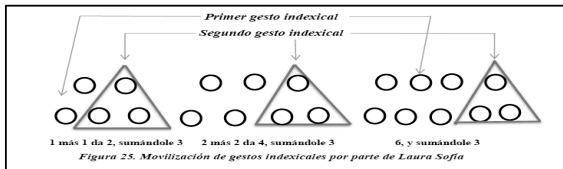


Figura 25. Movilización de gestos indexicales por parte de Laura Sofía

Figura 26. Producción de Laura Sofía, ítem 6 de la Tarea 2

Figura 28. Producción de Luis Felipe, ítem 6 Tarea 2

“Siempre le vamos a sumar acá la torre”

- > **Esquema operacional, generalización de acciones numéricas**
- > **Generalización algebraica Factual: Abducción analítica se usa para deducir ...**
- > La **indeterminancia no alcanza el nivel de la enunciación o del discurso**. Está presente a través de la aparición de algunos de sus casos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 1000).
- > El **carácter operatorio de la indeterminancia está mediado por los medios semióticos de objetivación (gestos, ritmo, palabras, intención perceptiva actividad perceptual)**. Mediación como constitutiva de la actividad. **Idea de Nodo semiótico**
- > **Expresión semiótica a través de actividad multimodal ... Fórmula encarnada (Radford, 2010a)**
- > La **inclusión en cualquier proceso de un signo (Vygotski, 1929) remodela toda la estructura de las operaciones psicológicas**.
- > La **naturaleza de los tres vectores que caracterizan el pensamiento algebraico está determinada por la estructura del Particular hegeliano**.

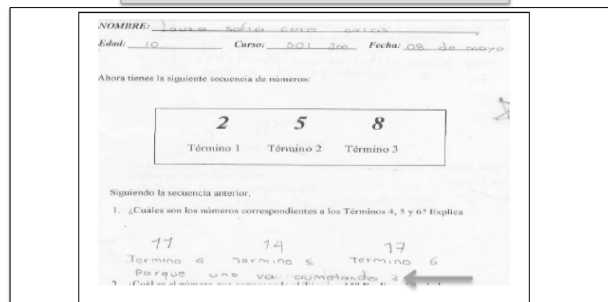


Figura 32. Reconocimiento del patrón en la secuencia por parte de Laura Sofia

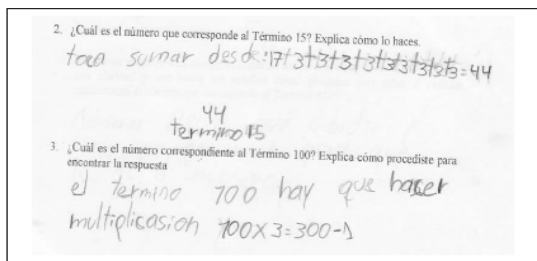


Figura 34. Producción de Yaneth a los ítems 2 y 3 de la Tarea 3

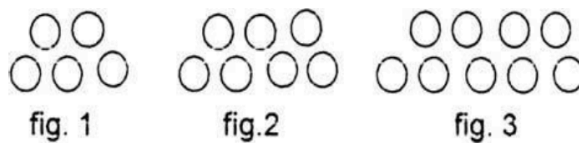
$$T1a + (n - a) \times 3 = T1n$$

El Particular hegeliano en relación con...

Formas sofisticadas de generalización aritmética parecen estar muy cerca de proto-formas de pensamiento algebraico basadas en una proto-analiticidad

El problema del Mensaje

Recuerda la secuencia de círculos:



La profesora Johanna tiene una bolsa y dentro de ella introduce varias tarjetas, cada una con un número. Cada uno de estos números corresponde a una de las figuras de la secuencia anterior. Ella saca al azar una tarjeta y la introduce en un sobre, asegurándose que ningún estudiante haya visto el número de la tarjeta. Johanna quiere que el sobre sea enviado a la profesora Estella con un mensaje que será introducido en el sobre junto con la tarjeta que contiene el número. Este mensaje debe explicar a la profesora Estella cómo calcular rápidamente el número de círculos que corresponde al número de la tarjeta.

Análisis multimodal

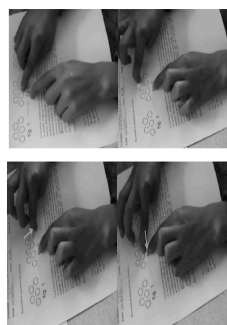
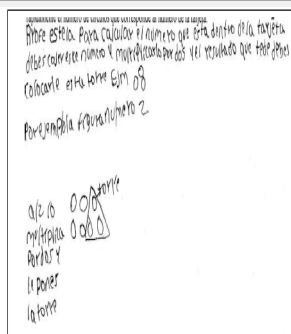


Figura 40. Producción de Jimmy sobre la Tarea 4, Problema del M.

Figura 41. Secuencia de gestos (señalar y tocar) de Jimmy Stiven que le sirve de apoyo en el mensaje dirigido a la profesora Estella. Reconstrucción del video

Estudiante	Expresión semiótica de la indeterminancia	Analicidad o carácter operatorio de la indeterminancia
Jimmy Stiven	"el numero que esta dentro de la tarjeta"	"debes coger ese numero y multiplicarlo por dos y ese resultado que te de debes colocarle esta torre ejm ●●"
Luis Felipe	"figura"	"a la figura le sumo el mismo numero de la figura y al resultado que me dele sumo 3"
Yaneth	"el numero que le saiga en la tarjeta"	"sumar el numero que le saiga en la tarjeta dos veces y le suma mas tres"
Sumer	"el numero que te entregaron"	"el numero que te entregaron tienes que multiplicarlo por 2 y el numero que te dio le sumas 3"
Astrid	"el numero que esta en la cartulina"	"el numero que este en la cartulina lo tienes que colocar en la parte de arriba y en la parte de abajo y le sumas tres."

Tabla1. Rejilla que presenta las expresiones semióticas de la indeterminancia y su respectiva analiticidad de varios estudiantes cuando abordan el Problema del Mensaje

Algunas conclusiones

- Las **formas de pensamiento algebraico temprano** Factual y Contextual **emergen (aparecen)** como **posibilidades** que los alumnos **instancian en la Actividad**.
- **Los tres "vectores" que caracterizan el pensamiento algebraico cambian según lo hace el Particular hegeliano (relaciones Φ y Θ)**
 - **Tareas antes del Problema del mensaje no invitan a pensar la indeterminancia en forma analítica; ésta aparece en una forma intuitiva y queda sin nombrar.**
 - **La analiticidad aparece mediada por los medios semióticos de objetivación.**
- **Denominación lingüística (ejemplo "la torre"). Estos medios semióticos de objetivación se incrustan en la manera en que los estudiantes piensan y llegan a conocer.**

Algunas conclusiones

- **EL Problema del Mensaje** obliga a los alumnos a movilizar otros medios semióticos de objetivación, en este caso **recursos lingüísticos ("a la figura le sumo el mismo número de la figura y al resultado que me dele sumo 3", "el numero que te entregaron tienes que multiplicarlo por 2 y el numero que te dio le sumas 3")**
- **La Actividad (Particular) hace aparecer el pensamiento algebraico Contextual como una evolución del Pensamiento algebraico Factual:**
Expresiones semióticas antes y durante el Problema del Mensaje son distintas:



En este estrato de **pensamiento algebraico Contextual la indeterminancia se tradujo en un objeto de discurso por parte de los estudiantes.**

Algunas conclusiones

- Vinculación más refinada de los recursos semióticos y en consecuencia un nivel más profundo de **conciencia y de inteligibilidad del problema en cuestión... Contracción semiótica.**
- Recursos semióticos tales como los **gestos, el movimiento, la ritmicidad y la actividad perceptual son consubstanciales a la manifestación y constitución del pensamiento algebraico temprano.**
- Papel importante del **ritmo como medio semiótico de objetivación.**
(Radford, Bardini & Sabena, 2007, Arzarello, 2006)
- **Deícticos espaciales, ritmo, palabras y actividad perceptual se complementan para generar una toma de conciencia en los estudiantes de la manera en que la tarea puede ser atacada desde un punto de vista algebraico (Nodo semiótico).**

Aspectos para continuar la reflexión ...

- Sobre el papel cognitivo del ritmo tanto en el Pensamiento algebraico Factual como en el Contextual.**
- Profundizar las generalizaciones aritméticas y algebraicas en relación con el Particular hegeliano. Al parecer existen Formas sofisticadas de generalización aritmética o tal vez Proto-formas de pensamiento algebraico (basadas en una proto-analiticidad).**
- Explorar la relación del Particular con la evolución del pensamiento algebraico Contextual hacia el Simbólico.**
- Sobre la incorporación del lenguaje natural en las formulaciones algebraicas de los estudiantes.**
- Profundizar la relación dialéctica entre las analiticidades GA y PA.**
- La ausencia de índices o elementos espaciales y geométricos en las secuencias numéricas (con o sin apoyo tabular) hace recaer los procesos de generalización en relaciones entre números ... tendencia hacia inducciones ingenuas y generalizaciones aritméticas** (Radford, 2008b, 2013b).

**Mil gracias
por su atención**