ACERCA DEL TRIÁNGULO DE PASCAL

Reinaldo Núñez
Universidad Sergio Arboleda
reinaldo.nunez@usa.edu.co, reinaldonunez@gmail.com

El Triángulo de Pascal es un concepto que se "ve" en la secundaria cuando se desarrolla $(a+b)^n$ o algunas veces como una simple curiosidad. Se quiere mostrar parte de la riqueza matemática que ofrece este triángulo para partir una construcción, explorar diferentes sucesiones, hacer extensiones a los enteros módulo n y sus relaciones con el triángulo Sierpinski; también es útil, mediante un proceso de *copia,* para construir la pirámide de Pascal para el desarrollo de $(a+b+c)^n$ y algunas relaciones matriciales.

RESEÑA HISTÓRICA

El Triángulo de Pascal debe su nombre al matemático Blaise Pascal, siglo XVII, sin embargo, varios matemáticos antes de Pascal ya lo conocían y aplicaban este conocimiento. Por ejemplo, en China y Persia lo descubrieron de forma independiente alrededor del siglo XI. Chia Hsien (ca. 1050), un matemático chino, demostró que el Triángulo se podía usar para extraer raíces cuadradas y cúbicas de números; varios algebristas chinos usaban el triángulo para resolver ecuaciones de orden superior a tres. El Triángulo de Pascal fue escrito de la forma como lo conocemos por el matemático chino Zhu Shijie.

UNA CONSTRUCCIÓN DEL TRIÁNGULO DE PASCAL

Una forma de construir el Triángulo de Pascal consiste en usar técnicas de conteo. Observemos el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b) \\
&= (aa+ab+ba+bb)(a+b) \\
&= aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb \\
&= aaa+(aab+aba+baa)+(abb+bab+bba)+bbb \\
&= 1\cdot a^3+3\cdot a^2b+3\cdot ab^2+1\cdot b^3
\end{aligned}$$

Núñez, R. (2011). Acerca del Triángulo de Pascal. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 93-98). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

$$=\binom{3}{3}a^3+\binom{3}{2}a^2b+\binom{3}{1}ab^2+\binom{3}{0}b^3$$

A partir de esto se tiene que la última expresión está dada por la siguiente regla de conteo: en cada desarrollo se cuentan las a que se encuentran en cada factor, es decir:

- Para el primer factor se tiene que su expresión es $aaa=1\times a^3$, en ésta se encuentran tres (3) letras a, luego se expresa como $\binom{3}{3}$.
- En el segundo factor se tiene $aab+aba+baa=3\times a^2b$ y en cada uno de los tres (3) sumandos hay dos (2) a, luego se expresa como $\binom{3}{2}$.
- En el tercer factor se tiene $abb+bab+bba=3\times ab^2$ y en cada sumando hay dos (1) a, luego se expresa como $\binom{3}{1}$.
- En el último factor bb tenemos que no hay ninguna a, luego se expresa $\binom{3}{0}$.

De forma general, si se continuara con esta construcción se tendría la representación del Triángulo de Pascal que se muestra en la Figura 1. El Triángulo de Pascal puede expresarse en forma de triángulo isósceles como en la Figura 2.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & & & & \cdots & & & &
\end{array}$$

Figura 1. Triángulo de Pascal combinatoria

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1 \\
\cdots
\end{array}$$

Figura 2. Triángulo de Pascal isósceles

También se puede conocer en forma de un triángulo rectángulo.

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
				...					

Figura 3. Triángulo de Pascal rectángulo

EXPLORACIÓN

Triángulo de Sierpinski

El Triángulo de Sierpinski es un fractal construido a partir de cualquier triángulo.

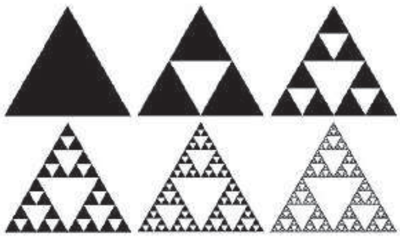

Figura 4. Construcción del Triángulo de Sierpinski

Ahora bien, tomando el Triángulo de Pascal y seleccionando un color para los números impares y otro para los pares se encuentra una relación muy particular con el anterior fractal.

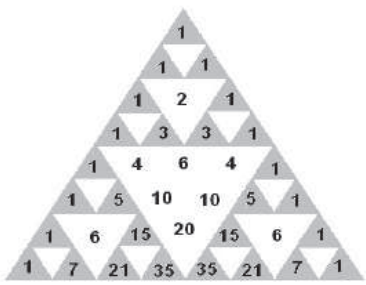

Figura 5. Triángulo de Pascal su relación con el triángulo de Sierpinski

Sucesiones del Triángulo de Pascal

Sucesión de Número de Fibonacci

La sucesión de Fibonacci es 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,... Cada número de la sucesión está dada por la suma de los dos anteriores. En el Triángulo de Pascal se pueden encontrar los números de esta sucesión de la siguiente forma: primero debe situarse un uno en el triángulo, posterior a esto se toma el número sobre éste y se traslada al lado derecho, obteniendo así un número de la sucesión de Fibonacci.

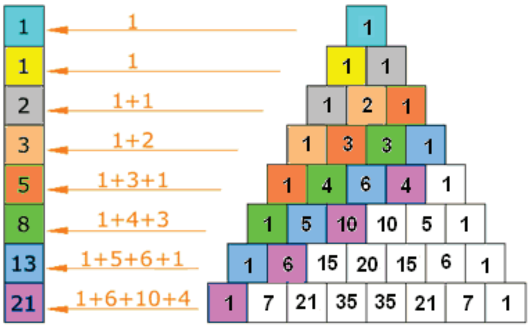

Figura 6. Sucesión de Fibonacci en el Triángulo de Pascal

Otras sucesiones

En la siguiente representación del Triángulo de Pascal se pueden observar sucesiones como: la constante (en la primera columna); los números naturales (segunda columna); números triangulares (tercera columna) y los números tetraédricos en la columna cuatro.

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
				...					

Figura 7. Triángulo de Pascal y otras sucesiones

REPRESENTACIÓN DEL TRIÁNGULO EN Z_2 Y Z_3

La siguiente es la construcción del Triángulo de Pascal en Z_2 y Z_3; estas construcciones tienen un patrón parecido al del triángulo de Sierpinski.

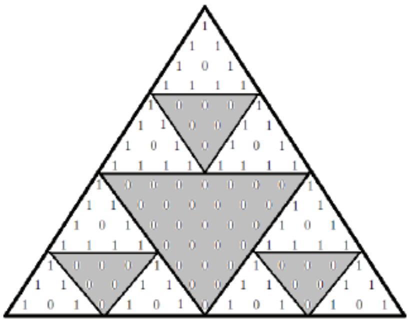

Figura 8. Representación del Triángulo de Pascal en Z_2

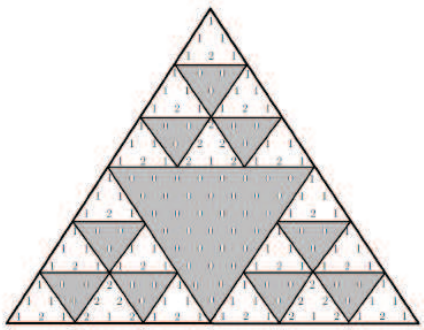

Figura 9. Representación del Triángulo de Pascal en Z_3

LA PIRÁMIDE DE PASCAL

La Pirámide de Pascal se construye de la siguiente manera: colocamos en la punta un uno (1). Para el siguiente nivel colocamos 1 en cada esquina del triángulo. El tercer y cuarto nivel se construyen sumando los números que están en los lados laterales del triángulo como se muestra en la Figura 10.

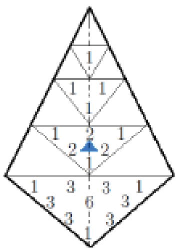

Figura 10. Pirámide de Pascal 1

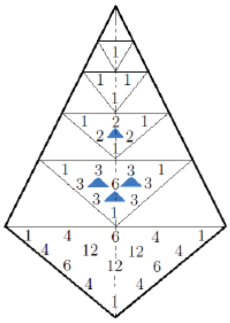

Figura 11. Pirámide de Pascal 2

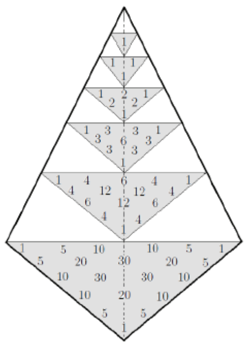

Figura 12. Pirámide de Pascal

Continuando el procedimiento anterior se tienen los niveles quinto y sexto, obteniendo la pirámide que se muestra en la Figura 11. Finalmente se tiene la pirámide de la Figura 12.

Ahora bien, desarrollando $(a + b + c)^n$ se puede ver que se obtienen los números de la pirámide anterior.

$$(a+b+c)^0 = 1$$

$$(a+b+c)^1 = a+b+c$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$$

$$(a+b+c)^4 = a^4 + 4a^3b + 4a^3c + 6a^2b^2 + 12a^2bc + 6a^2c + 3ab^3 + 12abc^2c + 4ac^3 + 4ab^3 + b^4 + 4b^3c + 6b^2c^2 + 4bc^3 + c^4$$

MATRICES DE PASCAL

Las Matrices de Pascal son matrices infinitas que contienen los coeficientes binomiales. Algunos ejemplos:

Ln : Son matrices expresadas de forma triangular inferior.

$$L_1 = (1), \qquad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad L_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 13. Matrices de Pascal inferiores

Un: Son matrices expresadas de forma triangular inferior.

$$U_1 = (1), \qquad U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 14. Matrices de Pascal superiores

$Ln \times Un$

Pn definida como $\left\{ \begin{matrix} p_{i1} = 1 = p_{ij} = 1 \\ p_{ij} = p_{i-1,j} + p_{i,j-1} \quad Si\ ij > 1 \end{matrix} \right\}$