PROCESOS DEDUCTIVOS EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Rodolfo Eliseo D´Andrea, Lisandro Curia, Andrea Lavalle
Pontificia Universidad Católica Argentina. Campus Rosario. Facultad de Química e Ingeniería Argentina
Universidad Nacional del Comahue. Facultad de Economía y Administración
rodolfoedandrea@uca.edu.ar , lcuria@uncoma.edu.ar, alavalle@uncoma.edu.ar

Resumen. Este trabajo resume una investigación que se plasmó en una tesis de maestría cuyo objetivo principal fue el análisis cualitativo del proceso deductivo desarrollado por estudiantes universitarios de Ingeniería. Se analizó cómo el estudiante puede tener una adecuada disposición mental para acceder a procesos de validación. A tales efectos, se diseñaron una serie de actividades experimentales que junto con el marco teórico, desembocaron en un diagnóstico acerca de la actitud de este tipo de estudiantes frente a procesos de validación. Este diagnóstico generó un modelo didáctico que atenúa el problema de este tipo de estudiantes a la hora de enfrentarse a la demostración. Evitando actitudes rituales y memorísticas y propiciando la reproducción de pruebas matemáticas desarrolladas por el docente en clase.

Palabras clave: validación, deducción, demostración, modelo didáctico

Abstract. This paper summarizes the research that resulted in a master's thesis and whose main objective was the qualitative analysis of deductive process developed by university students from Engineering. It is analyzed as the student, you may have an adequate mental disposition to access validation processes. For these purposes, it is designed a series of pilot activities that together with the theoretical framework, resulted in a diagnosis about the attitude of this kind of students compared to validation processes. This diagnostic generated a teaching model that mitigated the problem of this kind of students getting to grips with the demonstration. Avoiding attitudes rituals and memory and by promoting the reproduction of mathematical proof developed by the teacher in class.

Key words: validation, deduction, proof, teaching model

Introducción

Este trabajo resume una investigación que se plasmó en una tesis de maestría en Educación Matemática. El objetivo principal de esta investigación fue realizar un análisis cualitativo para determinar las dificultades de abordaje del estudiante universitario de Ingeniería en el razonamiento deductivo y la demostración de proposiciones matemáticas, generando un modelo didáctico que permita el mejoramiento de estos procesos.

Breve marco teórico

En Argentina, el estudiante de Ingeniería a la hora de validar proposiciones actúa por lo general, realizando verificaciones aleatorias para algunos casos particulares. Balacheff (2000) precisamente introduce una clasificación acerca de los modos de demostrar que puede presentar un estudiante, donde esta forma se encuentra presente. Clasifica las demostraciones en pragmáticas y conceptuales o deductivas. Las pragmáticas se subclasifican en: 1) Empirismo ingenuo, donde el proceso de validación consiste en la verificación de la propiedad para unos pocos ejemplos elegidos de manera aleatoria. 2) Experimento crucial, donde los procedimientos de los estudiantes se basan en la elección minuciosa de un ejemplo, con el convencimiento de que esa elección es tal que si se cumple para ese particular caso, se cumplirá siempre y 3) Ejemplo genérico**,** que corresponde a procedimientos basados en la elección y manipulación de un ejemplo que, si bien es particular, actúa como representante de su clase. Las conceptuales se subclasifican en: 1) Experimento mental, los estudiantes interiorizan las acciones realizadas previamente (generalmente observación de ejemplos), y las disocian para establecerlas en argumentos abstractos deductivos. 2) Cálculo sobre enunciados, donde se establecen construcciones intelectuales basadas en teorías más o menos formalizadas o explícitas, que se originan en una definición o propiedad. Existen numerosos trabajos descriptivos sobre los modos de demostrar del estudiante, siendo la geometría, génesis de la clasificación citada y otras derivadas. Bell (1976) fue pionero en este tipo de clasificaciones y analizó el tipo de respuesta que puede presentar un estudiante frente a un proceso de validación, siguiéndoles: Harel y Sowder (1998) y Marrades y Gutiérrez (2000), entre otros.

Metodología

Para el desarrollo de esta investigación se elaboró en primera instancia una encuesta destinada a todos los profesores de Matemática Pura y Aplicada de una Facultad de Ingeniería. Esta encuesta, se implementó a través del correo electrónico y constó de 13 preguntas abiertas. El total de docentes entrevistados fue 17, entre los que se encontraban: ingenieros de diferentes especialidades, estadísticos y profesores de matemática. Entre las cuestiones planteadas a los docentes, se les preguntó acerca de su experiencia como estudiantes frente a la demostración matemática; cómo estudiaban estos desarrollos y cómo los implementaron en el aula como docentes. Finalizada la encuesta docente, se tomó una muestra no aleatoria de 42 estudiantes ingresantes a Ingeniería de la misma Facultad en que fueron entrevistados los docentes. A estos estudiantes se les aplicaron 5 ejercicios de validación y luego una encuesta. En la encuesta, se les preguntó esencialmente acerca de cuándo el docente recurrió a explicaciones a través de la visualización para desarrollar determinados contenidos o para efectuar determinadas demostraciones; y si esto resultaba útil o no para facilitar el aprendizaje. En cuanto a la demostración, se les interrogó sobre si comprendían los desarrollos realizados por el docente en clase; en qué forma los estudiaban; si eran capaces de reproducir una versión propia; si la prueba sumaba o quitaba a la comprensión de una proposición y finalmente si recibieron alguna formación respecto a la estructura de una demostración. De los ejercicios de validación aplicados a los estudiantes solo se mostrarán en este trabajo por cuestiones de espacio, solo tres. Esta selección se realizó en función del nivel de representatividad de los ejercicios. Los ejercicios consistieron en una serie de proposiciones a validar, siendo creciente el nivel de complejidad de las mismas. El estudiante en la primer proposición cuantificada existencialmente solo debió exhibir un caso para establecer la verdad de la misma; la segunda proposición cuantificada universalmente, requirió también de la exhibición del caso que permite determinar el valor falso de la misma (contraejemplo), para finalmente en la tercer y cuarta proposición, ambas cuantificadas universalmente, el estudiante debió recurrir a una prueba para establecer la validación, basada en el raciocinio y la abstracción. En los ejercicios 1 y 2 se analizó el tipo de respuesta brindada por el estudiante, lo que incluyó el tipo de razonamiento seguido. En el ejercicio 5 se analizó únicamente el razonamiento seguido incluyéndose en esto, el tipo de respuesta obtenida. Para el tipo de razonamiento seguido se tomó estrictamente la clasificación de Balacheff (2000), mientras que para el tipo de respuesta, se consideró una clasificación inspirada en Bell (1976); Marrades y Gutiérrez (2000) y Harel y Sowder (1998). A cada estudiante se le entregó una hoja adjunta con definiciones, conceptos, identidades, etc. que pudiera requerir, a los efectos de que se concentrara exclusivamente en el razonamiento y no se distrajera recordando estructuras conceptuales implícitas en los ejercicios propuestos de validación.

Ejercicio 1: Decide el valor de verdad de la siguiente proposición, explicando que razonamientos sigues para justificar la elección: $\exists x \in R/(x-1)(x-2)(x-4)=0$.

Este ejercicio apela a observar en el estudiante, la noción de recuento discreto, que implícitamente permite una noción de cuantificación y que se desarrolla entre los estadios preoperacional y el comienzo de las operaciones concretas. (Piaget e Inhelder, 1972).

Ejercicio 2: Para la siguiente proposición: $\forall x \in R: |x| < 0$, idéntico pedido al ejercicio 1. La idea de este ejercicio fue observar cómo el estudiante reaccionaba intuitivamente frente a una proposición cuantificada universalmente pero falsa. Primero ver cómo evaluaba su valor de verdad, y luego cómo lo validaba. Lo esperado del estudiante es que pudiera probar la falsedad de la proposición utilizando un contraejemplo, o bien justificarlo a través de la definición de valor absoluto o su interpretación geométrica.

Ejercicio 5: Considera las siguientes proposiciones verdaderas: i. Si un número entero es par, entonces su cuadrado es par, ii. Si un número entero es impar entonces su cuadrado es impar. ¿Cómo probarías la verdad de cada una de las mismas?

Aquí directamente se da por sentada la verdad de cada proposición e interesaba cómo el estudiante validaría cada una. Se esperaba que partiendo de un número hipotético, par o impar, elevara al cuadrado cada uno, y luego analizara el resultado obtenido.

Tipos de respuestas exhibidas por el estudiante

Clasificación Ejercicio 1: Completa universal: El estudiante encuentra y comprueba el conjunto finito completo de los casos requeridos. *Incapacidad frente a verdad universal=Incapacidad Bell:* El estudiante es incapaz de encontrar todos los casos requeridos. *Completa existencial:* El estudiante encuentra y comprueba que se requiere un único caso para probar la validez. *Incompleta inconsistente:* El estudiante determina el valor de verdad de la proposición pero no justifica su decisión. *Incompleta inconexa***:** El estudiante determina el valor de verdad de la proposición pero justifica inadecuadamente su decisión. *Incompleta existencial:* El estudiante detecta que existe algún caso que prueba la validez de la proposición pero no lo indica. *Incapacidad frente a verdad existencial:* El estudiante es incapaz de dilucidar que la verdad de la proposición se comprueba con solo encontrar un valor que la satisfaga.

Clasificación Ejercicio 2: Falsedad universal completa: El estudiante encuentra y comprueba el único caso requerido que le permitirá probar la falsedad. *Falsedad universal incompleta:* El estudiante detecta la falsedad de la proposición y no encontrando el contraejemplo justifica con argumentos consistentes. *Falsedad universal inconexa:* El estudiante detecta la falsedad de la proposición y no encontrando el contraejemplo, intenta justificar tal falsedad con argumentos erróneos. *Incapacidad frente a Falsedad universal:* El estudiante es incapaz de detectar tal falsedad. *Falsedad universal inconsistente:* El estudiante detecta la falsedad de la proposición pero no justifica su decisión.

Clasificación Ejercicio 3: Obedece a los lineamientos de Balacheff (2000).

Resultado de los ejercicios

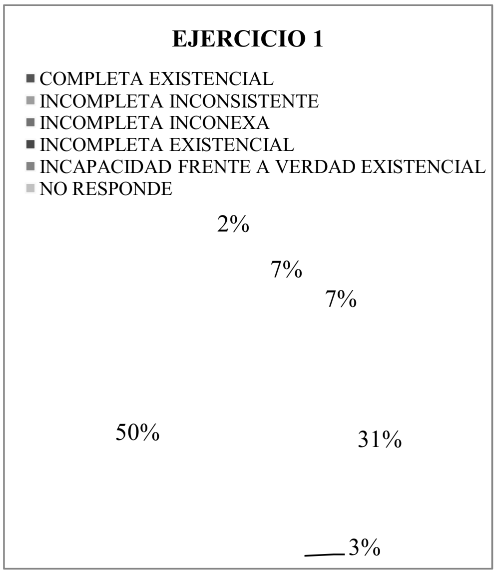

Figura 1: Resultados del Ejercicio 1

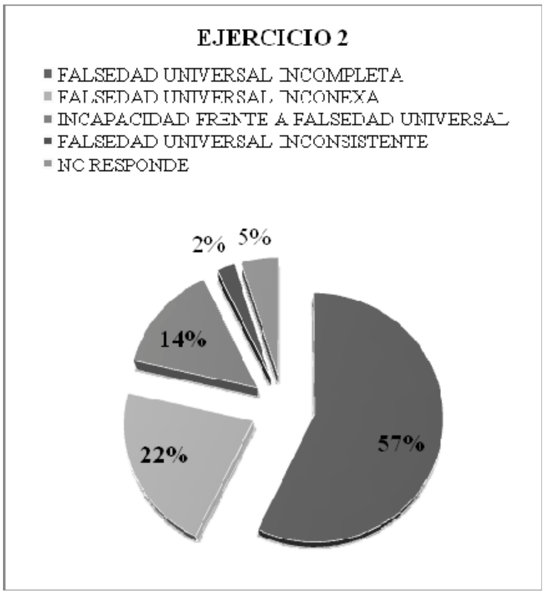

Figura 2: Resultados del Ejercicio 2

Figura 3: Resultados del Ejercicio 5.

Modelo didáctico propuesto

Los resultados de las encuestas docentes, ejercicios y encuestas a los estudiantes permitieron formular un diagnóstico que resume los resultados del modo siguiente: El estudiante ingresante a Carreras de Ingeniería requiere en los cursos de Matemática, comprender la demostración de proposiciones verdaderas no axiomáticas y teoremas. Tiene profundas dificultades para su comprensión, y más aún para reproducirlas, producto del retardo del desarrollo del pensamiento formal y la supresión de desarrollos teóricos en el área de Matemática en el ciclo medio. A esto se suma la experiencia personal de los docentes que valoran la formación recibida en la demostración de proposiciones y teoremas pero asimismo reniegan de aprendizajes memorísticos implícitos en estas cuestiones. Como consecuencia de estas experiencias y la reticencia de los estudiantes a incorporar estos contenidos, debilitan estos procesos en el aula. Con base en el diagnóstico y el marco teórico se propuso un modelo didáctico para la presentación y evaluación de demostraciones de proposiciones verdaderas no axiomáticas y teoremas. Éste se traduce a una secuencia conductista de tareas, que implícitamente tienden a generar el desarrollo del razonamiento lógico y la disciplina de la inteligencia en el estudiante. La secuencia de tareas es la siguiente: I. Accesibilidad del lenguaje Matemático: Generación por parte del docente de un prolegómeno acerca de elementos esenciales que hacen a la construcción del lenguaje matemático en todo curso inicial de Matemática universitaria que utiliza esta disciplina científica como herramienta. II. Interpretación coloquial de las proposiciones: Es fundamental que el estudiante pueda apropiarse de su significado, desde su propio lenguaje. III. Verificación: La exhibición de ejemplos contribuye notablemente a incrementar la apropiación de lo postulado por la proposición a validar. IV. Visualización: Esta acción, puede ser la interpretación geométrica de la proposición a demostrar ya sea a través de un diagrama a mano alzada o la utilización de un software matemático apropiado. V. Simbolización: Luego de cumplidas las etapas precedentes, entonces es posible presentarle al estudiante la proposición a demostrar desde el lenguaje que le es propio a la Ciencia Matemática. VI. Elementos epistemológicos de la proposición a demostrar: En esta etapa el estudiante deberá detectar hipótesis, hipótesis implícitas y tesis de la proposición a demostrar. VII. Contenidos implícitos de la proposición a demostrar: Aquí el estudiante deberá reunir la información más relevante que se necesita para la prueba y que está implícita en la etapa anterior. VIII. Pregunta de abstracción: Esta etapa está tomada de Solow (1992) y es la clásica pregunta de abstracción que un estudiante debe plantearse a la hora de abordar la prueba que quiere realizar. Este tipo de pregunta es coloquial, donde no interviene el lenguaje matemático y tiene que ver con el planteo específico de la situación implícita en la proposición que se quiere demostrar. Se detalla un ejemplo en párrafo aparte. IX. Guía secuenciada: Detallada en párrafo siguiente. X. Artificios: Esta etapa se lleva a cabo cuando el proceso de validación de la proposición a demostrar requiere de artificios en su desarrollo. La idea es desglosarlos secuenciadamente, estudiando su proceso epistemológico. No es objetivo de este trabajo detenerse en este análisis. Para quien desee profundizarlo, se recomienda leer el artículo: El artificio Matemático (D´Andrea, 2010). XI. Recomendaciones para el docente acerca de la redacción de la guía secuenciada y la implementación de este modelo.

Pregunta de abstracción: Por ejemplo, si se quiere probar lo planteado en el ejercicio 5 para los estudiantes, la pregunta de abstracción para este caso sería: ¿Cómo puedo demostrar que el cuadrado de un número entero es par?

Guía secuenciada

La Guía Secuenciada es una serie de instrucciones que describen la sucesión de argumentaciones que estructuran la prueba. Estas deben ser elaboradas por el docente inicialmente y gradualmente es el estudiante quien debe hacerlo a efectos de mostrar el nivel de comprensión alcanzado. La habilidad ‘demostrar’ no es requerida por estudiantes de ingeniería, pero si la capacidad de razonamiento implícito y precisamente la idea de la Guía es conducir al estudiante por ese camino, evitando actitudes rituales y memorísticas. Poincaré (1981) manifiesta que una demostración matemática es una cadena de silogismos ordenados, donde el orden y su intuición es fundamental para la realización de una demostración que trasciende a su memorización. Se expone a continuación un ejemplo:

Criterio de la derivada primera para la determinación de la monotonía de una función. Caso funciones estrictamente decrecientes. Enunciado: f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y $\forall x \in (a,b){:}\, f'(x) > 0 \Rightarrow f\ es\ estrictamente\ creciente\ en\ (a,b)$. Prueba: Sea $[x,y] \subset [a,b], f$ resulta continua en $[x,y]$ por ser éste, subconjunto del intervalo donde la función es continua por hipótesis. Algo similar ocurre con la derivabilidad de f en el subintervalo $(x,y) \subset (a,b)$. Resulta entonces que por el Teorema del valor medio del Cálculo Diferencial, $\exists c \in (x,y)/f(y) - f(x) = f'(c)(y-x)(*)$. $y - x > 0$ por ser la medida de la amplitud de un intervalo; $f'(c) > 0$ por hipótesis. El producto del segundo miembro de (*) es positivo, resultando el primer miembro, también positivo.

Así, teniendo en cuenta la definición de función estrictamente creciente: $f(y) - f(x) > 0 \Rightarrow f(y) > f(x) \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $(x,y) \subset (a,b)_{Q.E.D.}$

Guía Secuenciada: Considerar la función de la hipótesis en un subintervalo $[x,y]$ del dominio. Previa verificación de las hipótesis del teorema del valor medio del Cálculo Diferencial en el subintervalo citado, aplicarlo a tal función. Analizar el signo de uno de los miembros de la igualdad obtenida, producto de la aplicación del teorema citado. En base a esto, se podrá arribar a la tesis, teniendo en cuenta la definición de función estrictamente creciente en el subintervalo considerado.

Conclusiones

Las encuestas docentes revelaron la valoración de estos respecto a la formación recibida en la demostración de proposiciones verdaderas no axiomáticas y teoremas en sus carreras de grado, ponderando que el tipo de razonamiento utilizado influyó posteriormente en su carrera profesional. Manifestaron que a la hora de haber estudiado tales contenidos debían recurrir a la memoria para retener secuencias y artificios, declarando mayoritariamente no haber recibido formación respecto a la estructura interna de un teorema. A pesar de esto, no hacen demasiado hincapié en las demostraciones en sus clases y como consecuencia tampoco a la hora de evaluar. Una razón relevante es la dificultad y reticencia del estudiante, cada vez más agudizada, de recibir estos contenidos y más aún de reproducirlos. Los docentes hacen hincapié en su mayoría, en la visualización de proposiciones verdaderas a demostrar, previo al desarrollo de la prueba formal en el caso de ser realizada. Los ejercicios realizados por los estudiantes manifestaron desconocimiento del lenguaje matemático, lo que dificulta la lectura de proposiciones y su validación. Situación agudizada con la supresión de contenidos teóricos en el ciclo medio. Algunos estudiantes manifestaron que les gustaría poder reproducir sus propias versiones de las pruebas dadas por el docente o el libro de texto, pero les resulta una tarea difícil y terminan aceptándolas ritualmente con una relativa comprensión. La existencia de la demostración para el estudiante es un acto ritual, que debe ser repetido o imitado más allá de constituirse en una herramienta con una función explicativa sustentada en un sistema de validación cuya construcción pueda sea aceptada por el estudiante y su entorno. (Azcárate Giménez, 1998).

Observación final: El presente trabajo es una síntesis de las ideas principales de la tesis de maestría: Análisis del razonamiento deductivo de estudiantes de Carreras en Ciencias Naturales e Ingenierías en el proceso de validación de proposiciones matemáticas, defendida el 30 de abril de 2010 y publicada por Editorial Académica Española en junio de 2012. La tesis mencionada fue realizada en el marco del programa de Maestría en Educación en Ciencias con mención en Matemática de la Universidad Nacional del Comahue situada en la ciudad de Neuquén, Argentina.

Referencias bibliográficas

Azcárate Giménez, C. (1998). Acerca de los procesos del pensamiento matemático avanzado. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española,* 1 (2), 235-243.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá: Una empresa docente. Universidad de Los Andes.

Bell, A.W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7(1), 23 – 40.

D´Andrea, R.E. (2010). El Artificio Matemático. Reflexión e intento de solución. En: M.E. Ascheri, R.A.Pizarro, N.Ferreyra. (Comp. y Ed.), *Actas de III Reunión Pampeana de Educación Matemática* III (pp. 53-64). La Pampa: EdUNLPam

D´Andrea, R.E., Curia, L. y Lavalle, A. (2012). *Razonamiento deductivo y validación en estudiantes universitarios.* Alemania: Editorial Académica Española.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. En: A. H. Schoenfeld, J. Kaput y E. Dubinsky. (Eds.), *Research in Collegiate mathematics education III* (pp. 243-283). Providence: American Mathematical Society.

Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 87-125.

Piaget, J.e Inhelder, B. (1972). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Buenos Aires: Paidós.

Poincaré, H. (1981). *La Ciencia y el Método*. México: CONACyT.

Solow, D. (1992). *Cómo entender y hacer demostraciones en Matemáticas*. México: Noriega Editores.