DISEÑO DE MECANISMO CON CABRI PLUS PARA OBTENER ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE ALGUNAS CURVAS

Benjamín Sarmiento
Universidad Pedagógica Nacional
bsarmiento@pedagogica.edu.co

Se pretende mostrar cómo construir algunas curvas mecánicas usando la vía tradicional de mover una circunferencia de radio r al interior o exterior de una circunferencia de radio R, y cómo obtener la misma curva como una simetría oculta generada por un vector **w** que es la suma de dos vectores **u** y **v** cuyos movimientos dependen de una relación de sus velocidades angulares. Finalmente, se parametrizan las simetrías obtenidas y así se justifica por qué funciona esta forma de construir algunas famosas curvas. Con esto se muestra una vez más la importancia de la geometría dinámica para llegar a nuevos métodos para construir ciertos objetos matemáticos gracias a un trabajo de exploración.

INTRODUCCIÓN

El uso de ambientes virtuales o computacionales para el aprendizaje de la matemática gana cada día un buen número de seguidores. Algunos docentes se privan de aprovechar estas nuevas herramientas por el temor de tener que invertir mucho tiempo y grandes esfuerzos en el aprendizaje de temáticas relacionadas con la informática; los que se deciden a incursionar en estas nuevas formas de presentar el conocimiento a sus estudiantes terminan concluyendo que el quehacer del docente con ayuda de herramientas computacionales requiere mucho tiempo, no para el aprendizaje de temáticas informáticas, sino para idear las actividades dinámicas que ayuden a la comprensión de los conceptos matemáticos y para encontrar nuevas maneras de construir los objetos.

A lo largo de esta conferencia los docentes verán que realmente no se requieren conocimientos avanzados de programación, sólo disposición y ganas de explorar los alcances de las construcciones de representaciones dinámicas de los objetos matemáticos hechos con algún software de geometría dinámica.

CONSTRUCCIÓN DE UN MECANISMO GENERADOR DE CURVAS

La intención es construir un mecanismo manipulable que permita trazar un gran número de curvas mecánicas, a partir del punto final de un vector **w** que

Sarmiento, B. (2011). Diseño de mecanismo con Cabri Plus para obtener ecuaciones paramétricas de algunas curvas. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 119-128). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

resulta de sumar dos vectores **u** y **v**. El vector **w** será el trazador de curvas, los vectores **u** y **v** tendrán magnitudes que podremos variar y se podrán girar a diferentes velocidades en el mismo sentido o en sentidos contrarios. Para modificar las magnitudes de los vectores **u** y **v** se construirán dos controles numéricos que a su vez representarán los radios de dos circunferencias concéntricas en las cuales reposarán los puntos finales de los vectores **u** y **v**.

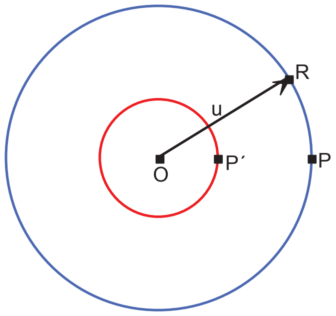


Figura 1.

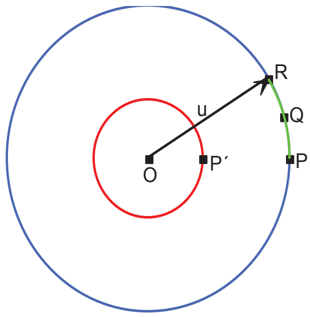


Figura 2.

Inicialmente construimos dos controles numéricos que llamaremos Radio 1 y Radio 2. Esto lo hacemos con la herramienta Número.

Trazamos dos circunferencias concéntricas de radios *R* y *r*, (Radio 1 y Radio 2, respectivamente). Marcamos un punto fijo *P* y un punto móvil *R* sobre la circunferencia *CR* y trazamos el vector *OR* (vector **u**).

Ahora trazamos el arco *PQR* y lo medimos. La medida de este arco nos servirá para controlar la velocidad con que se va mover el vector **v**.

Para modificar la velocidad del vector **v**, se construye un control numérico que llamaremos velocidad. Con la herramienta Calculadora multiplicamos la medida del arco *PQR* por el valor del control Velocidad y esa nueva medida se transfiere a la circunferencia *Cr* tomando como punto de partida a *P´*. Cuando este número (Control velocidad) es positivo el vector **v** se moverá en el mismo sentido del vector **u**, y cuando es negativo se moverá en sentido contrario.

El arco con la nueva medida, trazado sobre *Cr*, terminará en el punto *T*, que será el punto final del vector *OT* (vector **v**). Trazamos el vector *OT* (vector **v**).

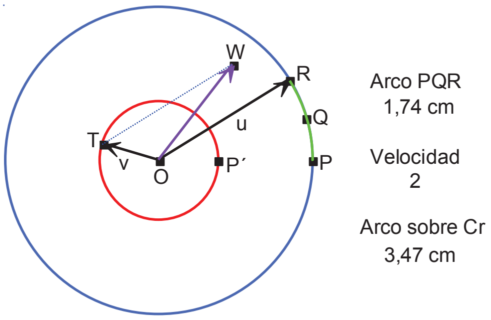


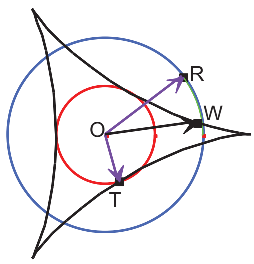
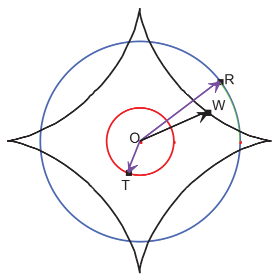
Figura 3

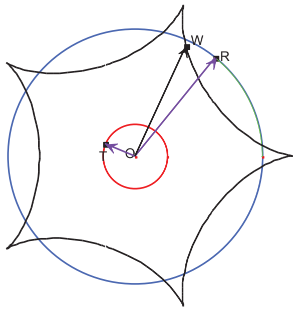
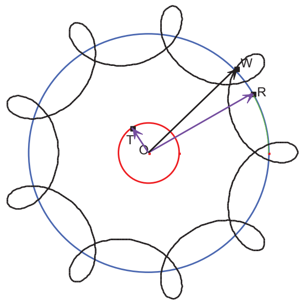
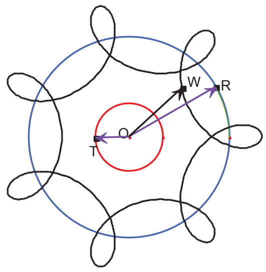
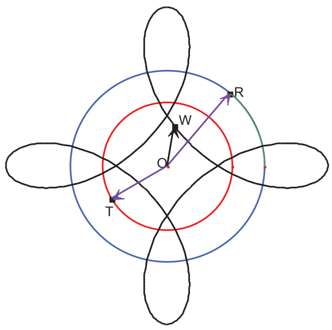
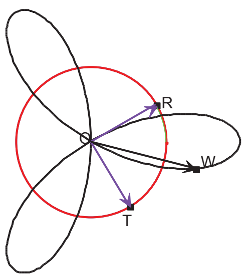
Se traza el vector suma OW (vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$). El rastro o lugar geométrico generado por el punto W a medida que se mueve el punto R será una curva mecánica.

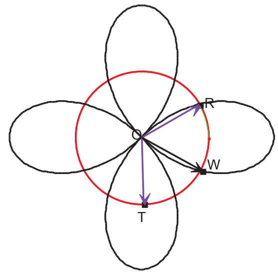
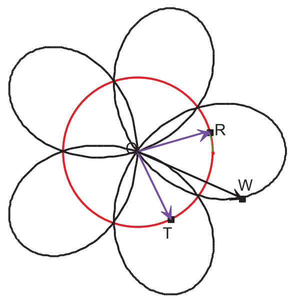
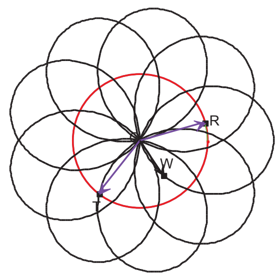
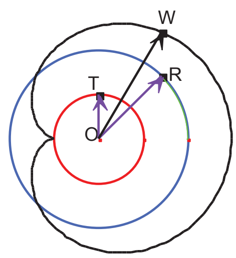
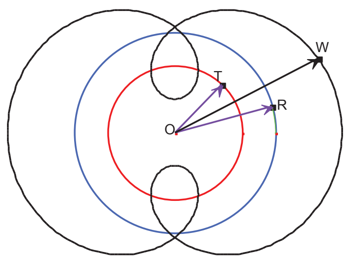
De la misma manera como se diseñó este mecanismo usando dos vectores, se pueden diseñar otros mecanismos usando tres o más vectores y operaciones entre ellos.

Ejemplos de curvas generadas

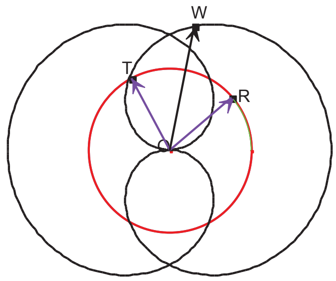
A continuación se darán algunos ejemplos de lugares geométricos ampliamente conocidos obtenidos (ver Lehmann, 1994; Álvarez, 2006; Sarmiento y Rodríguez, 2009a, 2009b) con el mecanismo expuesto, cambiando los valores de los tres controles construidos (ver Figura 4).

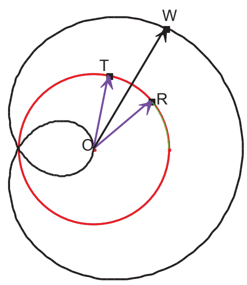
Ej. 1. Tricúspide o Deltoide: Radio 1 = 2 Radio 2 = 1 Velocidad = -1	
Ej. 2. Astroide Radio 1 = 3 Radio 2 = 1 Velocidad = -1	

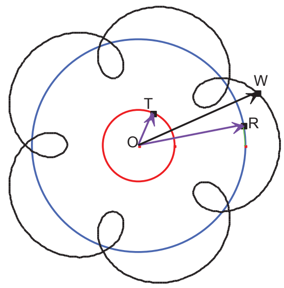
Ej. 3. Hipocicloide de 5 cúspides: Radio 1 = 4 Radio 2 = 1 Velocidad = -1	
Ej. 4. Trocoide Radio 1 = 4 Radio 2 = 1 Velocidad = -2	
Ej. 5. Trocoide Radio 1 = 3 Radio 2 = 1 Velocidad = -2	
Ej. 6. Trocoide Radio 1 = 3 Radio 2 = 2 Velocidad = -2	
Ej. 7. Trifolium Radio 1 = 2 Radio 2 = 2 Velocidad = -2	

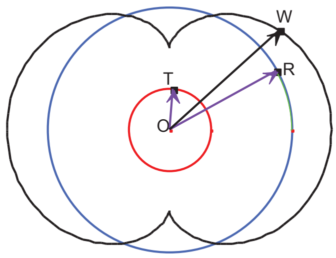
Ej. 8. Cuadrifolium Este lugar geométrico se obtiene cuando: Radio 1 = 2a Radio 2 = 2a Velocidad = -3a	
Ej. 9. Hipotrocoide Radio 1 = 2 Radio 2 = 2 Velocidad = -4	
Ej. 10. Hipotrocoide Radio 1 = 2 Radio 2 = 2 Velocidad = -8	
Ej. 11. Cardioide Radio 1 = 2 Radio 2 = 1 Velocidad = 1	
Ej. 12. Nefroide Radio 1 = 3 Radio 2 = 2 Velocidad = 2	

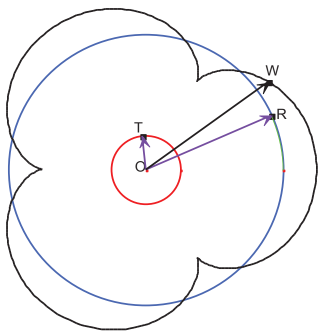
<table>
<tr><td>Ej. 13. Espiral de Durero

Radio 1 = 2
Radio 2 = 2
Velocidad = 3</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Ej. 14. Caracol de Pascal

Radio 1 = 2
Radio 2 = 2
Velocidad = 2</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Ej. 15. Hipocicloide de cinco ciclos

Radio 1 = 3
Radio 2 = 1
Velocidad = 2</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Ej. 16. Epicicloide de dos ciclos

Radio 1 = 3
Radio 2 = 1
Velocidad = 1</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Ej. 17. Epicicloide de tres ciclos

Radio 1 = 2 ; 4
Radio 2 = 2 ; 4
Velocidad = -2 ; 1</td><td>
</td></tr>
</table>

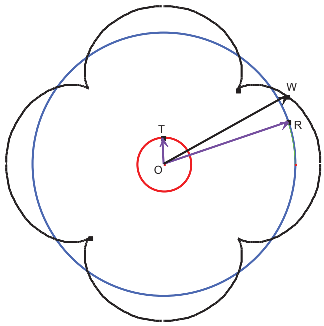
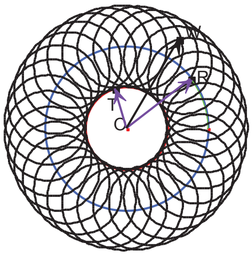
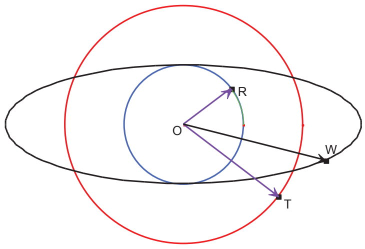
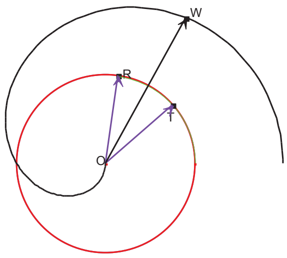
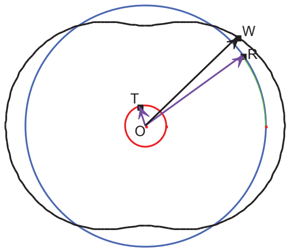
Ej. 18. Epicicloide de cuatro ciclos Radio 1 = 5 Radio 2 = 1 Velocidad = 1	
Ej. 19. Epitrocoide Radio 1 = 4 Radio 2 = 2 Velocidad = 14	
Ej. 20. Elipse Radio 1 = 2 Radio 2 = 4 Velocidad = -2	
Ej. 21. Espiral Radio 1 = 3 Radio 2 = 3 Velocidad = 0.5	
Ej. 22. Ovalo de Casini Radio 1 = 3.6 Radio 2 = 0.6 Velocidad = 0.5	

Figura 4

PARAMETRIZACIÓN DE LAS CURVAS OBTENIDAS

Consideremos dos circunferencias concéntricas de radios R y r y centradas en O, y tracemos el radio OM de la circunferencia CR.

Marcamos un punto móvil P sobre CR, determinamos el ángulo $\alpha = \measuredangle MOP$ y trazamos el vector $\mathbf{u} = OP$.

Determinamos el ángulo $\beta = n\alpha$, $(n \neq 0)$, y trazamos el vector $\mathbf{v} = OT$ tal que $\measuredangle MOT = \beta$.

Las coordenadas del punto P son $x = R\text{Cos}(\alpha)$, $y = R\text{Sen}(\alpha)$.

Las coordenadas del punto T son $x = r\text{Cos}(\beta)$, $y = r\text{Sen}(\beta)$.

Construimos el vector suma $OW = OP + OT$, donde las coordenadas de **W** son:

$x = R\text{Cos}(\alpha) + r\text{Cos}(\beta)$, $y = R\text{Sen}(\alpha) + r\text{Sen}(\beta)$.

$x = R\text{Cos}(\alpha) + r\text{Cos}(n\alpha)$, $y = R\text{Sen}(\alpha) + r\text{Sen}(n\alpha)$.

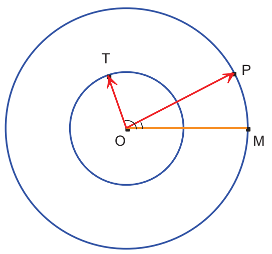


Figura 5

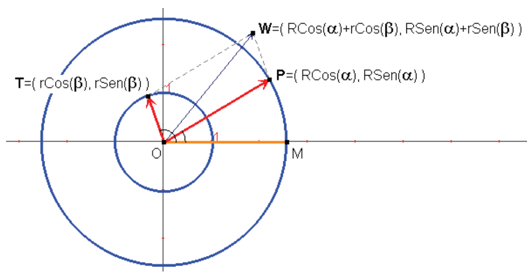


Figura 6

Usando esta parametrización del punto W, podemos obtener parametrizaciones particulares, dándole valores a R, r y n. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1

Si R=2, r=2 y n=2, entonces h(α) = [2Cos(α) + 2Cos(2α), 2Sen(α) + 2Sen(2α)] es la ecuación para el caracol de Pascal.

Ejemplo 2

Si R =2, r =2 y n =-3, entonces $h(\alpha)$ = [2Cos(α) + 2Cos(3α), 2Sen(α) -

2Sen(3α)] es la ecuación para el cuadrifolium.

Ejemplo 3

Si R =3, r =3 y n =-1, entonces $h(\alpha)$ = [3Cos(α) + Cos(3α), 3Sen(α) + Sen(3α)] es la ecuación para el cuadrifolium.

Ejemplo 4

Si R =2, r =1 y n =-1, entonces $h(\alpha)$ = [2Cos(α) + Cos(α), 2Sen(α) - Sen(α)] es la ecuación para el deltoide o tricúspide.

Ejemplo 5

Si R =3, r =1 y n =-1, entonces $h(\alpha)$ = [3Cos(α) + Cos(α), 3Sen(α) - Sen(α)] es la ecuación para el astroide.

Ejemplo 6

Si R =4, r =1 y n =-2, entonces $h(\alpha)$ = [4Cos(α) + Cos(2α), 4Sen(α) - Sen(2α)] es la ecuación para la trocoide.

Ejemplo 7

Si R =2, r =2 y n =-2, entonces $h(\alpha)$ = [2Cos(α) + 2Cos(2α), 2Sen(α) - 2Sen(2α)] es la ecuación para el trifolium.

Ejemplo 8

Si R =2, r =2 y n =3, entonces $h(\alpha)$ = [2Cos(α) +2 Cos(3α), 2Sen(α) + 2Sen(3α)] es la ecuación para la espiral de Durero.

Ejemplo 9

Si R =2, r =4 y n =-2, entonces $h(\alpha)$ = [2Cos(α) + 4Cos(2α), 2Sen(α) - 4Sen(2α)] es la ecuación para una elipse.

Ejemplo 10

Si R =2, r =1 y n =1, entonces $h(\alpha)$ = [2Cos(α) + Cos(α), 2Sen(α) + Sen(α)] es la ecuación para la cardioide.

REFERENCIAS

Lehmann, Ch. (1994). *Geometría analítica*. México: Editorial Limusa.

Álvarez, J. (2006). *Curvas en la historia*. España: Nivela Libros y Ediciones.

Sarmiento, B. y Rodríguez, Y. (2009a). *Los tres problemas clásicos de la geometría*. Bogotá, Colombia: El autor.

Sarmiento, B. y Rodríguez, Y. (2009b). *Setenta curvas famosas*. Bogotá, Colombia: El autor.