EL LOGARITMO: ¿CÓMO ANIMAR UN PUNTO QUE RELACIONE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA Y UNA ARITMÉTICA?

Jeannette Vargas, Mario Pérez y María Teresa González
Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca;
Universidad Jorge Tadeo Lozano; Universidad de Salamanca, España
jeannettevargash@usal.es, mario.perez@utadeo.edu.co, maite@usal.es

Volver sobre el concepto de función logarítmica, con los recursos de construcción geométrica y movimiento que nos brinda la tecnología, para una aproximación a la curva logarítmica a través de la relación entre una progresión geométrica y una progresión aritmética es reconstruir el concepto de logaritmo usando algunos de los elementos que inspiraron a Napier en el siglo XVII, los cuales consideramos deben estar ligados a la explicación que se presente actualmente en las aulas. Una construcción que evidencie esta relación entre las progresiones favorece la comprensión del concepto logaritmo y puede contribuir en la generación de reflexiones como, por ejemplo, por qué la base e y qué es lo "natural" del logaritmo natural.

INTRODUCCIÓN

La investigación en Educación Matemática alrededor de los procesos de aprendizaje de los estudiantes, relativos a los conceptos logaritmo y función logarítmica se ha incrementado en los últimos años debido a que se detectó la casi inexistencia de estudios sobre tal problemática a pesar de la importancia que estos conceptos tienen a nivel de la educación superior, el sinnúmero de aplicaciones en la modelación de fenómenos y cómo los profesores continúan manifestando la existencia, en sus grupos, de estudiantes con dificultades relacionadas con la notación y el significado de la palabra logaritmo (Kenney, 2005; Toumasis, 1993), el claro arraigo a los procedimientos memorísticos de algoritmos (Kastber, 2002; Berezovski, 2004), el concepto de logaritmo desligado de su génesis histórica (Berezovski, 2004; Toumasis, 1993) y, en el mejor de los casos, con inquietudes acerca de por qué, entre tantas opciones que podrían existir, el número e es utilizado como la base de los logaritmos naturales (Toumasis, 1993; Fernández y Pacheco, 2000; Katz, 1995).

Desde el punto de vista de su enseñanza, en el caso de las funciones logarítmicas se ha realizado una inversión respecto a su génesis histórica dado que lo

Vargas, J., Pérez, M. y González, M.T. (2011). El logaritmo: ¿cómo animar un punto que relacione una progresión geométrica y una aritmética? En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 129-138). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

habitual es que se enseñe con posterioridad a la función exponencial, mediante la función inversa cuando, en realidad, el concepto de logaritmo surgió previo a la notación de los exponentes (Vargas y González, 2007; Fauvel, 1995) e históricamente se identificaban como curvas logarítmicas las representaciones gráficas que relacionaban las progresiones aritméticas con las geométricas o viceversa. La presentación de las funciones logarítmicas, que se acostumbra hacer en las aulas, como inversa de las funciones exponenciales ha conducido a que se descuiden aspectos que la dotan de significado y que tienen que ver tanto con dicha génesis histórica, como puede ser la relación entre la estructura multiplicativa de la variable independiente y la aditiva del logaritmo, como con su importancia al ser una función que permite transformar multiplicaciones en sumas.

El logaritmo definido por Napier (1550-1617) utilizando una representación de dos puntos en movimiento –uno con velocidad constante y el otro con velocidad variable que va disminuyendo proporcionalmente a la distancia del punto inicial, desplazándose a través de una semirrecta el primero y a través de un segmento el segundo– además de haber tenido una evolución en el ámbito de la matemática que le ha permitido su vigencia en esta ciencia, ha sido sustituido, en las aulas, por oprimir una tecla en la calculadora o digitar ya sea $y = \log x$ o $y = \ln x$ para obtener, de inmediato, en una pantalla gracias a algún programa graficador, un número o una gráfica. Estas facilidades tecnológicas usadas sin reflexión alejan al estudiante de la comprensión del concepto de logaritmo y funciones logarítmicas, razón por la cual se requiere que los profesores e investigadores deban plantear opciones que permitan, mediante el software, utilizar tanto las ideas de las construcciones de los conceptos originales como el concepto actual.

Si se considera como tarea del profesor, por excelencia, el acercar a sus estudiantes al estudio de una ciencia, se deben propiciar actividades de estudio que ayuden a los estudiantes a hacer conexiones entre ideas y descubrir sus interrelaciones lógicas. Esto, puede hacer más plausible contextualizar la enseñanza de las matemáticas mediante la presentación de un concepto en donde se exploran respuestas a preguntas tales como ¿de dónde vino?, ¿quién, por qué y cómo alguien pudo mencionar esto? En esta línea de ideas sobre elementos que conforman el concepto de logaritmo desde su génesis histórica se pretende desarrollar el contenido de este documento que puede brindar una estrategia más de acercamiento a su estudio.

Logaritmo neperiano y sistema de logaritmos

El interés de John Napier por resolver los problemas astronómicos de la época utilizando las recién descubiertas Reglas de Prosthaphaeresis[1] y los avances de la física, le permiten crear un sistema mecánico para efectuar cálculos aritméticos que llevó a la invención de los logaritmos:

> Sean el segmento *AB* y una semirrecta *CDE* dados. Sea un punto *P* que parte de *A* y se mueve a lo largo de *AB* con velocidad variable que decrece en proporción a su distancia *B*; supongamos que un punto *Q* parte al mismo tiempo de *C* y se mueve a lo largo de la semirrecta *CDE* con velocidad uniforme igual a la velocidad inicial del punto *P*; entonces a la distancia variable *CQ* se le llama el logaritmo de la distancia *PB*. (Boyer, 2003, p. 303)

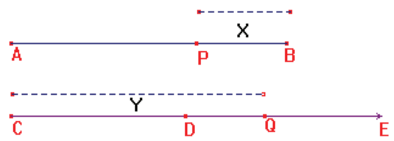

Figura 1. Representación del logaritmo de Napier

El término logaritmo acuñado por Napier proviene de "logos", razón y "aritmos", número, y hace referencia al "número de la razón", es una medida del "número de veces" que la "acción razón" ha ocurrido. Este término, que incursionó como una práctica para agilizar los cálculos astronómicos, había evolucionado desde una etapa inicial, en la cual se plantea la relación entre los términos de una progresión geométrica y los correspondientes términos en la progresión aritmética sin que emergiera aún ningún concepto, siendo en el siglo XVII cuando se nomina el nuevo concepto y, desprendiéndose de la mirada en las progresiones discretas, se elabora un modelo que involucra variabilidad, covariación y una búsqueda de continuidad, generando una definición geométrica y la elaboración de tablas de cálculo. El no cumplimiento, en todos los casos, de la equivalencia del logaritmo de un cociente y producto, con la diferencia o suma de los logaritmos, se supera en la etapa siguiente que se ca-

1 Palabra griega que significa suma y resta.

racteriza por cambios que conllevan la aceptación de las igualdades log 1 = 0; log 10 = 1, y la utilización de 10 como base de los logaritmos, situación que se traduce en un esquema de logaritmo con propiedades como las que se consideran actualmente. Se generaliza la idea y se define el concepto de logaritmo como exponente, considerando la logaritmación como una de las dos operaciones inversas de la elevación de potencias, lo cual hace posible aplicar a los logaritmos procedimientos algebraicos. Finalmente, se llega a una de las principales etapas del desarrollo matemático del concepto, puesto que el estudio del logaritmo como área bajo la curva y, a través de series, elevó el concepto de logaritmo al rango analítico. Esta etapa y el desarrollo del Análisis, dan paso a la introducción de los logaritmos en el ámbito de las funciones trascendentes (Vargas y González, 2007, p. 142).

En la presentación que hacemos, acogemos dos de las fases en la invención de los logaritmos que estuvieron presentes en Napier (Moulton, 1915). Una primera, de carácter aritmético, como correspondencia entre progresiones aritméticas y geométricas y, la segunda, de carácter geométrico, que incorpora movimiento de puntos.

Definiciones de logaritmo como vínculo entre una progresión aritmética y una geométrica fueron utilizadas en el siglo XIX. Serret (1887), por ejemplo, establecía la siguiente:

> I. Dadas dos progresiones crecientes e indefinidas:
>
> $1, r, r^2, r^3, r^4 \ldots$
>
> $0, d, 2d, 3d, 4d, \ldots$
>
> una por cociente, comenzando por 1, y la otra con diferencia d comenzando por cero, se llama *logaritmos* de los números que forman parte de la progresión por cociente a los números que le corresponden respectivamente en la progresión por diferencia.
>
> Las dos progresiones de las cuales se trata constituyen un *sistema de logaritmos* sujetas solamente a la condición de comenzar la primera por 1 y la segunda por 0. (Serret, 1887, p. 270)

REPRESENTACIÓN DE UN SISTEMA DE LOGARITMOS CON GEOMETRÍA DINÁMICA

Una representación gráfica del concepto de logaritmo dado por Serret, en un contexto de geometría dinámica, se muestra a continuación. Tomemos la progresión geométrica $1, r, r^2, r^3, \ldots$ y la aritmética $0, d, 2d, 3d, \ldots$ en donde diremos, con Serret, que logaritmo de 1 es 0, logaritmo de r es d, logaritmo de r^2 es $2d$, etc. En el eje horizontal colocamos la progresión geométrica y en el vertical la aritmética (los logaritmos).

Construimos geométricamente las potencias de r de la siguiente manera: se traza una circunferencia de radio 1 centrada en el origen O y señalamos un punto P de ella, cualquiera, ubicado en el primer cuadrante; trazamos luego el rayo OP cuyo ángulo de inclinación llamamos θ. La tangente a la circunferencia por P determina un punto de intersección Q con el eje x. Entonces: $\sec\theta = OQ/OP = OQ/1 = OQ$. El movimiento de P, en el primer cuadrante, permite recorrer todos los valores de OQ mayores que 1:

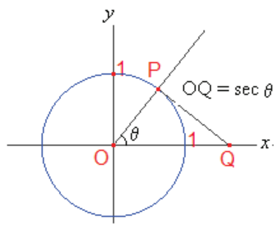

Figura 2

Construimos el ángulo θ para cada valor particular de $r > 1$ así: determinamos el punto Q tal que $OQ = r$; con la construcción para trazar tangentes a una circunferencia desde un punto exterior a ella, trazamos la tangente a la circunferencia desde Q, con punto de tangencia P en el primer cuadrante, y luego, la semirrecta OP, la cual tiene el ángulo de inclinación θ requerido.

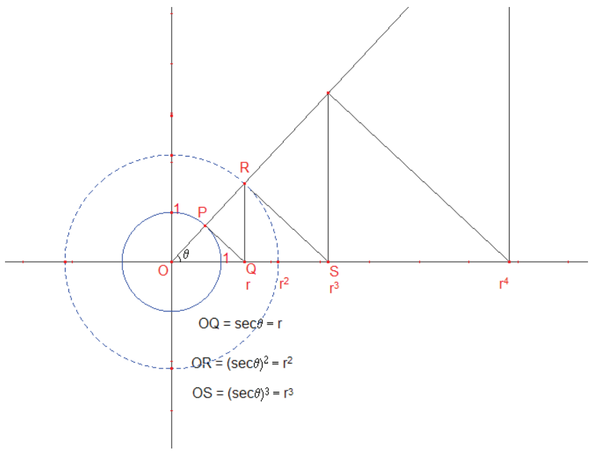

Figura 3

Trazando ahora la perpendicular al eje *x* por *Q* se determina el punto de intersección *R* con el rayo *OP*. El segmento *OR* tiene como longitud $(\sec\theta)^2 = r^2$. Si de nuevo se traza la perpendicular (Figura 3) al rayo *OP* por *R* y se determina la intersección *S* con el eje *x* se tiene que *OS* tiene longitud $(\sec\theta)^3 = r^3$. Continuando este proceso se construyen las potencias de *r*, con exponente entero positivo.

Serret extiende luego el concepto de logaritmo a los números obtenidos para las potencias de *r* que tienen exponente entero negativo: $r^{-1}, r^{-2}, r^{-3}, \ldots$; para esto se amplía la progresión aritmética a los múltiplos negativos de *d*: -*d*, -2*d*, -3*d*,…y decimos que el logaritmo de r^{-1} es $-d$, el logaritmo de r^{-2} es $-2d$, etc… La construcción geométrica de estas potencias de *r* (Figura 4) se continúa como antes pero hacia el interior del círculo:

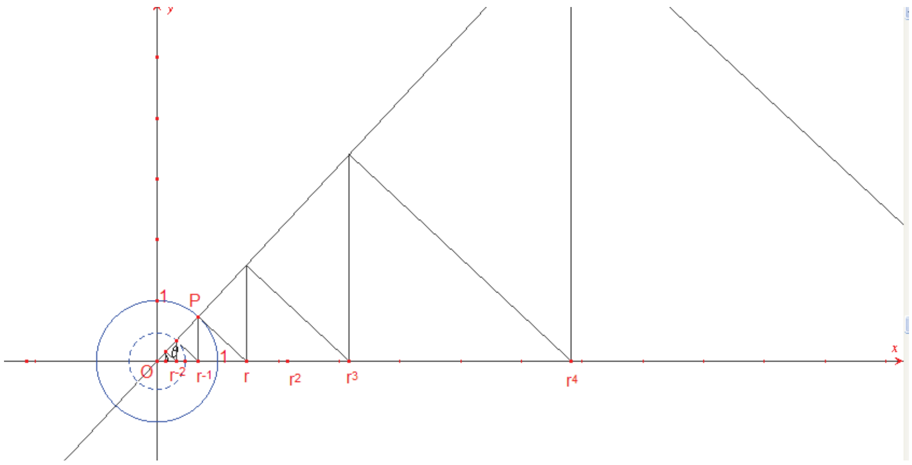

Figura 4

Una vez obtenidas las potencias, graficando los puntos de la forma (r^n, nd), con *n* entero y uniendo con segmentos dichos puntos (Figura 5), se tiene una primera aproximación, con segmentos rectilíneos, a la curva logarítmica.

Una vez definido el logaritmo para las potencias enteras de *r*, Serret define los logaritmos de los números que son medias geométricas entre potencias sucesivas de *r* (potencias de *r* con exponente fraccionario) como las correspondientes medias aritméticas. Las medias geométricas se construyen con el método de Descartes (1637/1952) el cual describimos a continuación.

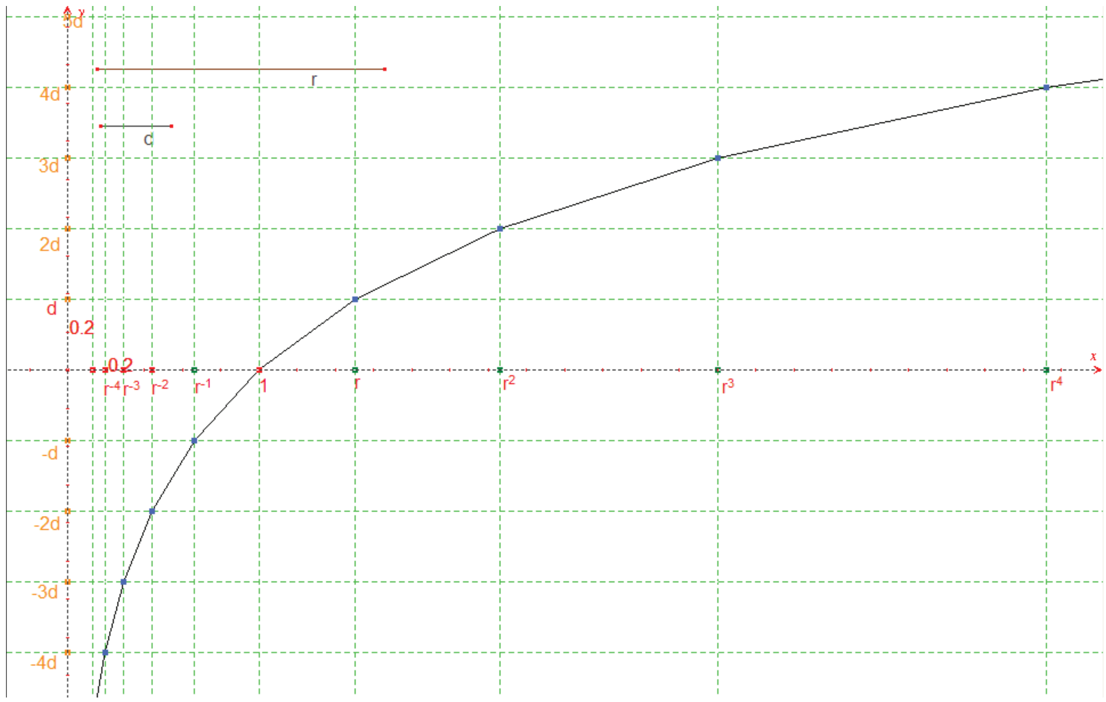

Figura 5

MÉTODO DE DESCARTES PARA CONSTRUIR MEDIAS GEOMÉTRICAS

En los libros II y III de la *Geometría*, Descartes describe un mecanismo formado por reglas articuladas que le permite construir n medias geométricas entre dos números a y b, $0 < a < b$:

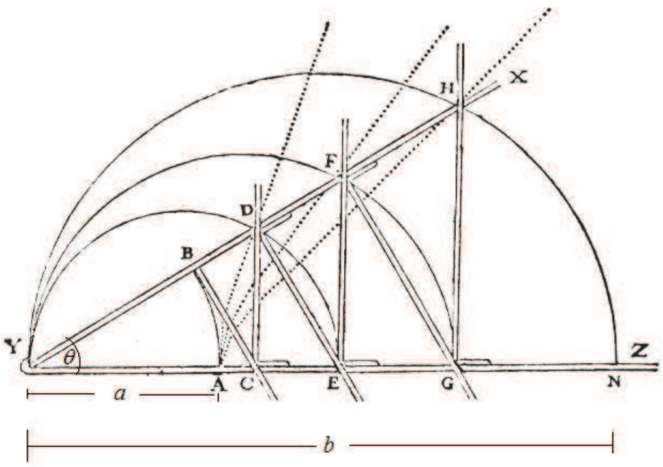

Figura 6. Mecanismo para construir n medias geométricas de Descartes

Las longitudes $\alpha = YA, YC, YD, YE, YF, \ldots$ forman una progresión geométrica de razón $\sec\theta$. Ajustando el ángulo θ se pueden conseguir las medias geométricas que se deseen. En la figura se ha ajustado θ para conseguir 3 medias geométricas. El ajuste puede conseguirse por medio de la intersección de la semicircunferencia de diámetro b con la curva descrita por el punto D al variar θ si se trata de conseguir una media geométrica; con la curva descrita por F si se trata de dos medias geométricas; con la curva descrita por H si se trata de tres, etc. En un ambiente de geometría dinámica las curvas descritas por D, F, H,… se determinan con la herramienta *lugar geométrico*.

En la Figura 7 se tiene una mejor aproximación a la curva logarítmica, obtenida al añadir los logaritmos de las dos medias geométricas entre potencias enteras, sucesivas, de r.

Finalmente, define Serret el logaritmo de los números que no son potencias fraccionarias de r con sucesiones convergentes de potencias fraccionarias de r.

Una aproximación a la *base b* del sistema de logaritmos que determinan las dos sucesiones, o sea, el número b para el cual $\log_b b = 1$ se ve en la Figura 7:

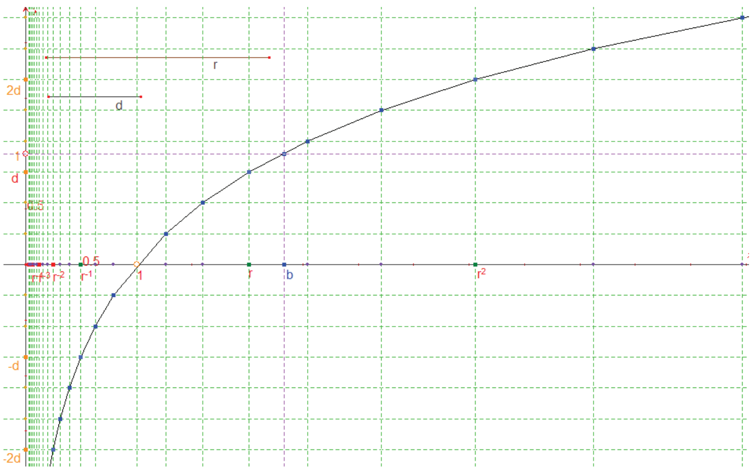

Figura 7

I. Se traza la perpendicular al eje y por el punto de ordenada 1; por la intersección de esta recta y la línea poligonal se baja una perpendicular al eje x, la cual lo intercepta en un punto que es aproxidamente b.

Aun cuando la definición de logaritmo de Napier no es la definición que empleamos actualmente (Hobson, 1914), una adaptación de su método original, basado en movimiento de puntos, podría usarse hoy en día como una alternativa para introducir los logaritmos naturales (Katz, 1995).

Asumamos que un punto P parte de 0 y se mueve hacia la derecha con velocidad constante v. Al mismo tiempo, parte un punto Q, desde 1, también hacia la derecha, con la misma velocidad v (Figura 8), la cual se incrementa de modo que en cualquier punto es proporcional a su distancia de 0. Supongamos que para el mismo tiempo transcurrido desde que salieron los dos puntos, P se encuentra a una distancia y de 0 y que Q se encuentra a una distancia x de 0. Definimos, de forma análoga a Napier, el logaritmo de x como y:

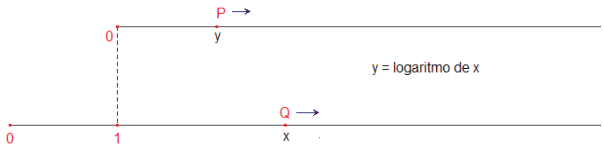

Figura 8

Con ayuda del cálculo podemos mostrar que el logaritmo así definido es el logaritmo natural:

Velocidad de $P = \frac{dy}{dt} = v$, $y(0)=0$. Resolviendo tenemos: $y = vt$

Velocidad de $Q = \frac{dx}{dt} = kx$, $x(0)=1$, $x'(0)=v$. Resolviendo: $\ln x = kt + c$. Como $x(0)=1$, $c=0$ y ya que $x'(0)=v$, $k=v$, luego $\ln x = vt = y$

MÁS PREGUNTAS A MANERA DE CONCLUSIONES

En el desarrollo de esta indagación, los argumentos geométricos y el uso de programas de geometría dinámica nos permitieron, no sólo realizar una construcción para la aproximación de la curva logarítmica dependiente de d y r, sino también abrir caminos para continuar con la investigación sobre el tema al plantear preguntas tales como:

¿Subyacen en esta aproximación a la curva logarítmica elementos que justifiquen diseñar una instrucción guiada hacia mecanismos de interiorización, coordinación, encapsulación de la función exponencial?

¿Cómo continuar, profundizar o lograr otras aproximaciones relacionadas con la explicación acerca de lo natural de los logaritmos naturales?

¿Admiten los pasos aquí detallados procesos de institucionalización del saber que favorezcan el aprendizaje/comprensión de la función logarítmica?

¿El uso, en el aula de clase, del registro de representación gráfica y su coordinación con otros registros de representación, llevará implícito la generación de obstáculos didácticos?

REFERENCIAS

Berezovski, T. (2004). *An inquiry into high school students' understanding of logarithms.* Tesis de maestría no publicada, Simon Fraser University, Burnaby, BC, Canada.

Boyer, C. (2003). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Descartes, R. (1637/1952). *The Geometry* (Trad. D.E. Smith y M.l. Latham). LaSalle, Illinois: Open Court.

Fauvel, O. (1995). Revisiting the history of logarithms. En F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson y V. Katz (Eds.), *Learn from the masters!* (pp. 39-47). Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.

Fernández, I. y Pacheco, J. (2000). ¿Por qué son naturales los logaritmos neperianos? *Epsilon,* 46-47, 107-116.

Hobson, E.W. (1914). *John Napier and the invention of logarithms, 1614; a lecture* (pp. 23-24). Cambridge: University Press.

Katz, V.J. (1995). Napier's logarithms adapted for today's classroom. En F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson y V. Katz (Eds.), *Learn from the masters!* (pp. 49-55). Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.

Kenney, R. (2005). *Students' understanding of logarithmic function notation*. Ponencia presentada en la reunión anual del North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Roanoke, VA. Tomado el 14 de marzo de 2011, de: http://www.allacademic.com/meta/p24727_index.html.

Moulton, L. (1915). The invention of logarithms, its genesis and growth. En C. Knott (Ed.), *Napier tercentenary memorial volume* (pp. 1-32). London, UK: Longmans.

Serret, J.A. (1887). *Traité d'arithmétique* (séptima edición). París, Francia: Gauthier-Villars.

Toumasis, C. (1993). Teaching logarithms via their history. *School Science and Mathematics, 93*(8), 428-434.

Vargas, J. y González, M.T. (2007). Segmentos de la historia: la función logarítmica. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, XV, 129-144.