ANÁLISIS EPISTEMOLÓGICO DE SITUACIONES PROBLEMA QUE CONTRIBUYEN A LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

Erika Ariza y Daniel Cifuentes
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
katatio@hotmail.com, danicimao@hotmail.com

A partir de este trabajo se busca establecer una relación entre el análisis epistemológico de la matemática y los procesos de enseñanza-aprendizaje de la geometría, centrados en un estudio de los problemas que históricamente han fundamentado la integral, desde la postura de resolución de problemas, las ventajas e implicaciones para el trabajo en el aula, el docente y el estudiante. Se hace una presentación del trabajo realizado geométrica y analíticamente para obtener las fórmulas del cálculo de área y volumen de algunas figuras, encaminado a un estudio sobre la importancia del tratamiento de situaciones problema para la enseñanza de la geometría, partiendo de los aportes que desde las situaciones históricamente abordadas se pueden realizar al conocimiento del profesor y los aspectos que puede tener en cuenta para orientar la enseñanza.

Ante la caracterización de los procesos de enseñanza de la matemática como temáticas organizadas en ramas, tales como geometría, estadística, aritmética o cálculo, se presenta una separación entre conceptos que genera una enseñanza de la geometría centrada en el reconocimiento de un conjunto de entes geométricos con propiedades, mas no para la comprensión de sistemas geométricos (MEN, 2006). De manera similar, se evidencia en la matemática escolar un tratamiento trivial, formalizado y algorítmico de los conceptos relacionados con el pensamiento numérico, lo que implica además una visión de la enseñanza y el aprendizaje aislada de la resolución de problemas, desde donde se podría integrar por ejemplo los pensamientos numérico y geométrico.

Si el interés de la educación se centra en que la matemática sea de utilidad y no una disciplina tediosa, debe existir una preocupación por el aprendizaje significativo de los estudiantes. Al respecto, Godino (2003) indica que el significado de la matemática resulta principalmente de los problemas que se resuelven, mas no de las definiciones y las fórmulas, pues así se limita la comprensión de conceptos matemáticos.

Al considerar como objetivo principal de la "actividad matemática" que los estudiantes lleguen a pensar matemáticamente a través de la resolución de

Ariza, E. y Cifuentes, D. (2011). Análisis epistemológico de situaciones problema que contribuyen a la enseñanza de la geometría. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 161-168). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

problemas, “se hace énfasis en los procesos característicos como clasificar, particularizar, generalizar y argumentar” (Mason, Burton y Stacey, 1988, citados en MEN, 1998), con lo que se llega a la comprensión de los objetos matemáticos, no como entes sino como redes de conceptos que se interrelacionan para potenciar el desarrollo del pensamiento matemático. Frente a esto, el docente debe asumir un rol complejo, que involucra no sólo explicar, mostrar y administrar la situación del salón de clases, sino también escoger cuidadosa y adecuadamente un conjunto de situaciones (Gascón, 1989), pues cada situación debe ser coherente con el proceso y las características socioculturales de los estudiantes.

A partir de la resolución de problemas, se busca potenciar el aprendizaje de los sistemas geométricos que, como todos los sistemas, tienen tres aspectos: los elementos de que constan, las operaciones y transformaciones con las que se combinan, y las relaciones o nexos entre ellos (MEN, 1998). Algunos problemas, si se abordan desde la historia permiten caracterizar procesos de resolución y aprendizaje de las matemáticas. Por ello aquí se presenta la forma como puede llegar a darse el análisis histórico-epistemológico desde la interpretación de planteamientos teóricos como los de Godino (2003) y Campos (2004). A partir de un breve análisis al objeto matemático integral, se pretende el reconocimiento de algunos aspectos de la historia que pueden verse involucrados en la enseñanza y así mismo en un aprendizaje significativo por parte del estudiante. Destacan en esto los problemas de cuadraturas y cubaturas en los que se integran aspectos numéricos y geométricos; es allí donde el análisis histórico-epistemológico de los procesos, situaciones o conceptos matemáticos específicos, se torna herramienta para fundamentar el conocimiento del docente y orientarle en su proceso de enseñanza.

Como pauta principal para la educación matemática, se deben buscar situaciones propicias que contextualicen al estudiante en la resolución de un problema y permitan al docente ser guía que oriente de manera crítica y complejice la situación generando un choque cognitivo que lleve al estudiante a poner en juego sus conocimientos y ampliarlos. Esto, porque de acuerdo con Polya (citado en Carrillo y Contreras, 2000) al resolver un problema se utiliza un razonamiento heurístico que permite introducir una notación, establecer relaciones, generalizar y determinar estrategias que generan conocimiento y comprensión de las matemáticas, lo que lleva al estudiante a convertirse en un sujeto activo que participa en la construcción de su conocimiento.

Tras reconocer la importancia de las situaciones problema para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y evidenciar que muchos conceptos se han abordado de manera formal, aislados de la resolución de problemas, se plantea el "análisis histórico-epistemológico" como herramienta que permite tomar elementos de la génesis de la historia y la epistemología para aprovecharlos en la didáctica de las matemáticas. Así lo menciona Filloy (citado en Godino, 2003), desde su aporte a la fundamentación del conocimiento del docente, quien considera los resultados de este análisis a la hora de plantear situaciones problema y orientar su proceso de enseñanza. No se pueden dejar de vincular los fundamentos históricos que han aportado a la evolución del concepto con el estudio de situaciones problema que promuevan la comprensión de un objeto matemático, ya que la epistemología ayuda a establecer la configuración de los elementos constitutivos de la significación de un determinado concepto mediante el análisis de los diferentes sentidos con los que ha podido aparecer y su adaptación al tratamiento de situaciones que a lo largo de la historia han preocupado a las personas (Gómez, 2003). Tal vinculación permite a los docentes orientar los procesos de enseñanza: partir de la consideración del conocimiento de aspectos relacionados con los objetos matemáticos, apropiarse de un significado de la matemática y así mismo fundamentar los objetivos del proceso de enseñanza y el saber qué quiere que sus estudiantes desarrollen.

Para poder definir la manera como el análisis epistemológico de la matemática puede aportar al proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, deben estudiarse y tenerse en cuenta algunos aspectos que permiten una manera distinta de presentar en el aula un concepto matemático, en este caso la integral, incluyendo las situaciones que aportaron y pueden aportar a su comprensión desde estudios geométricos y analíticos. Por ejemplo, Euclides propone en los *Elementos* una reconstrucción de las áreas de figuras mediante el método de exhaución, el cual fue base para procedimientos como las sumas de Riemann y los sólidos de revolución (método de discos), los indivisibles de Cavalieri, las cuadraturas de Eudoxo y Arquímedes, y su desarrollo a partir de ideas como la de límite, lo infinitesimal y la integral misma, que permiten llegar a aproximaciones del área y el volumen de figuras. Todo esto pone en evidencia una relación entre procesos geométricos y analíticos desarrollados a través de la historia.

En este trabajo se busca establecer una relación entre los valores que se obtienen por aproximación y la integración de las funciones, definida como antiderivada, dejando ver la importancia del trabajo geométrico, analítico y numérico interrelacionado para generar comprensión sobre los procesos de integración y conceptos propios como figuras y áreas emergentes en la resolución de situaciones problema específicas. Para evidenciar las relaciones previamente descritas, se aborda el siguiente problema:

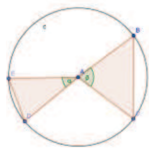
> Obtener fórmulas de cálculo de áreas y volúmenes defiguras y sólidos.

TRATAMIENTO DEL PROBLEMA

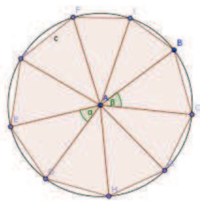
Para encontrar el área de las figuras se requieren: la idea del área como magnitud, aspectos relativos a la proporción, la caracterización del área del rectángulo a partir de construcciones históricas como las presentadas en los *Elementos* de Euclides y que conducen a asumirla como el producto de la base por la altura; de igual manera, el área del triángulo como una derivación de la anterior. Se presentan los procedimientos realizados para el área del círculo, vinculando aspectos de medida, modelación, representación y estudio numérico y geométrico.

Área del círculo

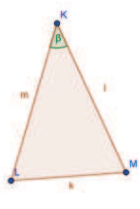
Para determinar el área del círculo es necesario obtener fórmulas en relación con áreas ya conocidas como la del triángulo y el rectángulo. De esta manera se describen algunos pasos para convertir el círculo en una figura cuya área se pueda calcular.



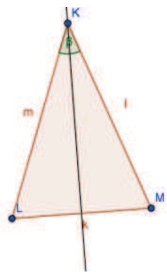
Se sabe que todos los radios del círculo son iguales, por tanto es posible construir triángulos isósceles cuyos lados iguales sean dos radios y el ángulo central sea menor que π. Para poder encontrar el área de cada triángulo es necesario conocer la base y la altura, pero con los datos que se tienen hasta el momento no es posible calcular dichas medidas; para conseguirlas, se condicionan los triángulos de tal forma que se pueda conocer la medida de los ángulos formados por los radios, en este caso, se forman n triángulos semejantes, tal que la suma de los ángulos de los vértices sea 360º.

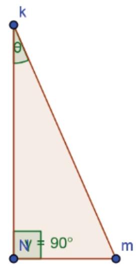


Debido a esa condición, se sabe que uno de los ángulos del triángulo, el central en la circunferencia, mide $360°/n$, donde n determina la cantidad de triángulos. De esta manera obtenemos n triángulos, así:



Reconociendo que $\beta = 360/n$ y que el triángulo es isósceles, pues sus lados son radios del círculo, se deben calcular su base y altura, para lo cual se determina la apotema (una recta perpendicular a la base del triángulo que pasa por el centro del círculo o vértice del triángulo); así, se forman dos triángulos rectángulos que se pueden estudiar por separado recurriendo a identidades trigonométricas y al Teorema de Pitágoras, donde $\theta = 360/2n$.





El lado *NM*, que resulta ser la mitad de la base de los triángulos isósceles formados inicialmente, es cateto opuesto del $\triangle KNM$ que por ser rectángulo, cumple:

$\sin(\theta) = NM/r$, r = radio del círculo.

$$\sin(360/2n) = NM/r \Longrightarrow \sin(360/2n) * r = NM = base$$

De acuerdo con este cálculo se puede encontrar el área de cada triángulo isósceles que conforma al círculo, la cual depende de la base que ya se conoce y la altura que se obtiene a partir de la aplicación del Teorema de Pitágoras (relacionando el radio del círculo –hipotenusa del triángulo– y la base de los triángulos). Todo esto conduce a que el área de cada triángulo rectángulo es:

$$\frac{\mathrm{bh}}{2} = \frac{\left(\sin\left(\frac{360}{2n}\right) * r\right) * r\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{360}{2n}\right)}}{2} = \frac{r^2 \sin\left(\frac{180}{n}\right) \cos\left(\frac{180}{n}\right)}{2}$$

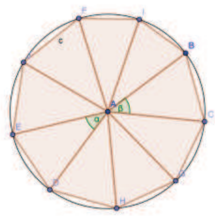
Así mismo, el área del triángulo isósceles corresponderá al doble del área de los rectángulos, es decir:

A (T. isósceles) = $\mathrm{r}^2 \sin\left(\frac{360}{2n}\right) \cos\left(\frac{360}{2n}\right)$

Y una aproximación al área del círculo, será n veces el área de uno de los triángulos isósceles, sabiendo que son congruentes, es decir:

$$A\ Circulo \approx n\left(r^2 \sin\left(\frac{180}{n}\right) \cos\left(\frac{180}{n}\right)\right)$$

Sin embargo, el área de este polígono de *n* lados tiene un área menor a la del círculo en el que está inscrito, esto debido a que sólo los vértices de los triángulos tocan al círculo y así, queda



una región curvilínea sobrante que irá disminuyendo conforme el polígono tenga más lados; cuando sean infinitos lados, la diferencia de áreas será infinitamente pequeña, hasta que la diferencia sea nula. En términos matemáticos:

$$A\ círculo = \lim_{n \to \infty} (n * r^2 * \sin(180/n) * \cos(180/n)) = r^2 * \lim_{\infty} (n * \sin(180/n) * \cos(180/n)) = r^2 * \pi$$

ANÁLISIS DE LA SOLUCIÓN AL PROBLEMA

Si bien hemos destacado el análisis epistemológico de la matemática como un recurso del docente para mejorar sus procesos de enseñanza, debe aclararse la manera como esto se puede realizar. Al respecto, Campos (2004) propone considerar tres componentes primarios, cada uno de los cuales corresponde a un aspecto distinto del objeto matemático y aporta a su conocimiento, lo que llega a ser de utilidad para orientar al docente en su proceso de enseñanza desde la selección de situaciones y, en este caso considerando aspectos relacionados con los procesos de cálculo de área y la integral.

Génesis. Este componente se relaciona con los indicios históricos o momentos importantes en los cuales se desarrolla el objeto matemático, por tanto podemos referirnos a los trabajos iniciales de Arquímedes, Eudoxo y otros matemáticos griegos quienes se enfrentaron a situaciones en que requerían del área de figuras geométricas, y frente a las cuales se establecen cuadraturas y cubaturas. Allí se resaltan procesos mediante los cuales se consolidó la integración, al superar obstáculos como el reconocimiento y comprensión del continuo, infinito, límite, variación, entre otros, los cuales se conciben en la enseñanza actual desde definiciones que permiten caracterizar la matemática axiomática y algorítmica. Desde esta perspectiva se lleva a los estudiantes a realizar cálculos asociados a fórmulas, sin reconocer las relaciones que se establecen entre los diferentes conceptos. La importancia de problemas como las cuadraturas radica en la posibilidad de relacionar procesos de modelación y comunicación, a partir de razonamientos geométricos y aritméticos, con el desarrollo de conocimientos, habilidades o competencias matemáticas.

Estructura. La integración (entendida como el área bajo la curva) se concibe no sólo como la antiderivada en los problemas referenciados, sino como un objeto matemático relacionado con las nociones de continuidad de una función, límite, etc., por medio de las cuales se configuran métodos de descubrimiento y demostración de propiedades y soluciones, tales como el método de exhaución, el cual inicialmente hace uso de varios aspectos de la geometría analítica para hacer deducciones y así mismo demostrar la validez de las respuestas, desde el estudio de magnitudes y relaciones de proporcionalidad.

La solución de problemas donde se requiere de la integración se basa históricamente en la relación que hay entre distintas representaciones. Consiste inicialmente en una aplicabilidad donde la geometría analítica es el primer contexto en el que aparece, requiere de propiedades y axiomas, tales como la conmensurabilidad de medidas, axiomas de continuidad y el reconocimiento del límite en varios momentos, los cuales pueden configurar adecuadamente la comprensión de la integral, esto pasando por ideas como lo infinitamente pequeño y lo indivisible.

Función. La actividad matemática es una actividad por excelencia educativa; es utilizable en diversas tareas necesarias para la organización de una sociedad. Dar este contexto a los conceptos aporta al interés y validez que el estudiante le otorga. En el caso de la integral se debe hacer un reconocimiento de su aplicabilidad al cálculo de áreas de figuras geométricas, áreas entre curvas, cálculo del trabajo y otras magnitudes físicas, en la industria, la mecánica, la medicina, etc. De esta manera se contribuye a superar esa falsa creencia de que los aprendizajes en matemáticas son útiles sólo dentro del aula de clase para resolver una serie de ejercicios.

Para concluir, es necesario reconocer que las cuestiones epistemológicas han sido casi totalmente descuidadas por los profesores (Vergnaud, 1990), lo que se ve reflejado en el tipo de situaciones que seleccionan para la enseñanza de los objetos matematicos. A la hora de reconstruir el proceso conceptual de la matemática, debe tenerse en cuenta el correspondiente análisis histórico-epistemológico pues éste ayuda al docente a orientar los procesos de enseñanza. Es necesario considerar múltiples aspectos de los objetos matemáticos que permitan al estudiante construir su conocimiento y por ende lograr una educación de calidad.

La resolución de problemas abre la posibilidad dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje para que el estudiante se convierta en un “resolutor” de situaciones en las cuales pone en juego no sólo los conocimientos previos, sino también razonamientos heurísticos y estrategias, con lo que se desarrolla un pensamiento matemático y se promueve que los aprendizajes sean significativos y relacionados con la comprensión de los conceptos, la funcionalidad y aplicación de los mismos. Desde el abordaje del problema relativo al área del círculo se muestra una relación entre la geometría y la aritmética, que permite al estudiante ver la matemática no como algo mecánico y trivial, sino que debe haber una comprensión previa de los objetos, para que sea una herramienta a la hora de enfrentar situaciones en distintos contextos.

REFERENCIAS

Campos, A. (2004) *Acerca de la epistemología de la matemática.* En *Memorias del XV Encuentro de Geometría y III de Aritmética*. (Versión electrónica.) Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Carrillo, J. y Contreras, C. (2000). *Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una visión desde múltiples perspectivas y niveles educativos.* Huelva, España: Hergué.

Gascón, J. (1989). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(2), 129-159. Recuperado de: http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33540202

Godino, J. (2003). *Teoría de las funciones semióticas*. *Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Granada, España: Universidad de Granada. Recuperado de: www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf

Gómez, B. (2003). La investigación histórica en didáctica de la matemática. En E. Castro (Coord.), *Investigación en educación matemática: Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 79-85). Granada, España, Universidad de Granada. Recuperado el 28 de mayo de 2011 en: http://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=12300

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998). *Lineamientos curriculares*. Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). *Estándares básicos de* competencias *en matemáticas.* Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio.

Vergnaud, G. (1990). Epistemology and psychology of mathematics education. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 14-30). Cambridge, Gran Bretaña: Cambridge University Press.