SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA SEMEJANZA UTILIZANDO FRACTALES

Claudia Castro, Luz Díaz y Rosa Palacios
Universidad Sergio Arboleda, Fundación Universidad de América, Colegio Policarpa Salavarrieta
mathclaudiacastro@yahoo.com, dicamelu73@yahoo.es, rosamariwill@hotmail.com

Una secuencia didáctica se entiende como un sistema de reflexión y actuación del profesor en donde se explicitan aquellos aspectos del quehacer didáctico fundamentales a toda acción de enseñanza y aprendizaje, y en el que participan estudiantes, docentes, saberes y el entorno. En la secuencia didáctica a la que se refiere esta ponencia, propuesta para la enseñanza de la semejanza, los fractales serán el recurso a través del cual se identificarán las características y propiedades de la semejanza. En la planeación se tuvieron en cuenta la relación intrafigural y las transformaciones geométricas propuestas por Lemonidis, como referente teórico para analizar el concepto de semejanza.

MARCO TEÓRICO

Al hacer la revisión teórica del concepto de semejanza se encontró que es necesario que los estudiantes tengan nociones acerca de proporcionalidad, caracterización de figuras planas, medida de ángulos y lados, lo cual permitirá construir, según Lemonidis (1991), una aproximación al concepto de semejanza desde las transformaciones geométricas y la relación intrafigural.

Respecto a las transformaciones geométricas, se tendrán en cuenta las transformaciones isomórficas que se caracterizan por conservar la forma de la figura original, la proporcionalidad entre los lados homólogos y la congruencia entre ángulos correspondientes. La *relación intrafigural* se da entre figuras que forman parte de configuraciones de Thales en la que se consideran los aspectos proyección y homotecia con sus correspondientes razones, según Lemonidis (1991).

Una vez revisado el proceso de enseñanza a partir de la propuesta de Lemonidis, se organiza, con base en la teoría de jerarquía de aprendizaje de Gagné (1975), un ideograma en el que se relacionan los objetivos asociados a discriminaciones, conceptos, reglas y reglas superiores que conducen al objetivo

Castro, C., Díaz, L. y Palacios, R. (2011). Secuencia didáctica para la enseñanza de la semejanza utilizando fractales. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 181-188). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

general. Cada requisito se enumera y se asocia a los siguientes objetivos, que permite proponer una secuencia.

1. Utilizar los conceptos de proporción y medida de segmentos.
2. Analizar la proporción de los lados de las figuras planas y encontrar la constante de proporcionalidad.
3. Evidenciar el Teorema de Thales.
4. Introducir el concepto de semejanza en figuras separadas.
5. Comprobar los criterios de semejanza de triángulos.
6. Deducir las condiciones de semejanza entre figuras planas.

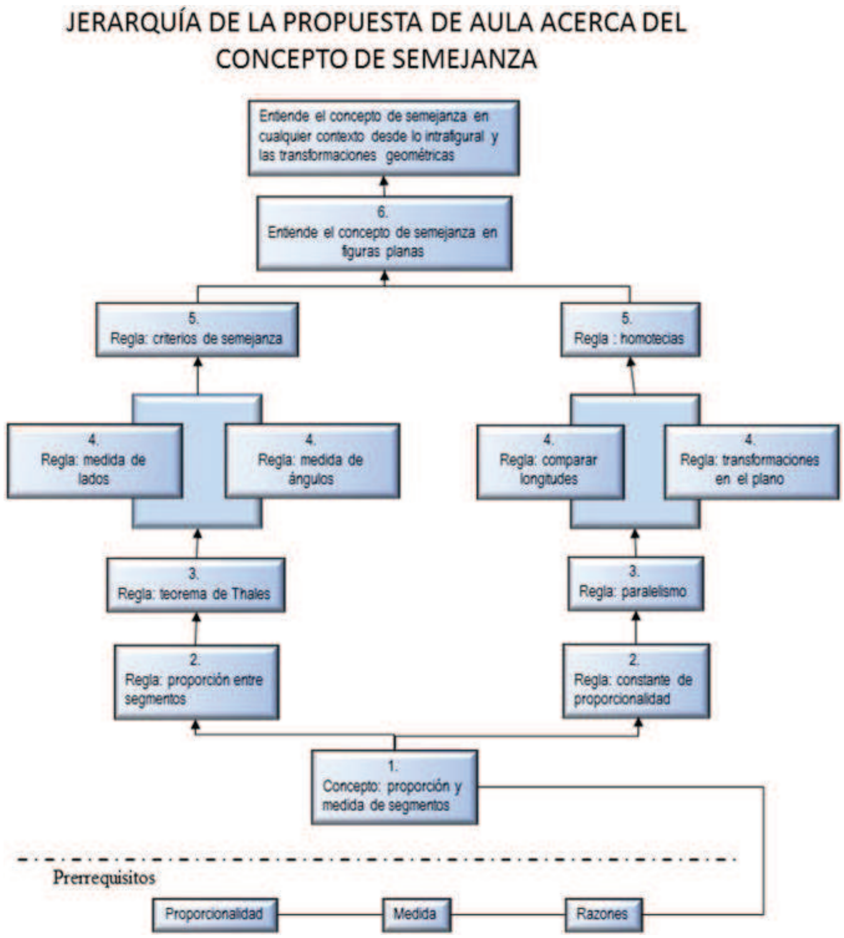


Figura 1. Jerarquía de aprendizaje para el concepto de semejanza (Castro y Céspedes, 2009, p. 41)

A partir de los objetivos y teniendo identificado el proceso de aprendizaje de la secuencia, se organiza la jerarquía, empezando de abajo hacia arriba hasta llegar al objetivo principal. Como recurso didáctico para lograr la comprensión del concepto semejanza, se utiliza la propiedad de autosemejanza de los fractales, a través de la cual se abordarán las relaciones intrafigurales y las transformaciones geométricas.

Los fractales como recurso para la enseñanza de la semejanza

Los fractales se pueden definir como una estructura geométrica generada por la iteración infinita de un proceso simple, que se caracteriza básicamente por dos propiedades: la dimensión y la autosemejanza. Dado que la intención de esta propuesta es considerar la pertinencia de la enseñanza de la semejanza a través de los fractales y no el aprendizaje de los mismos, se hace énfasis en centrar la atención en la característica de la autosemejanza.

Mandelbrot (s.f.) define la característica de autosemejanza en fractales de la siguiente forma: "En general, *F* es una estructura autosemejante si puede ser construida como una reunión de estructuras, cada uno de las cuales es una copia de *F* a tamaño reducido (una imagen de *F* mediante una semejanza contractiva)", es decir, un conjunto es autosemejante si al ser descompuesto en partes, cada una de sus partes es semejante al conjunto total, como se observa en la Alfombra de Sierpinski.

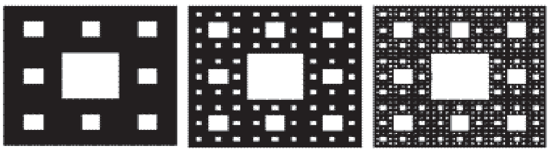


Figura 2. Alfombra de Sierpinski

La propiedad de autosemejanza de los fractales se establece a partir de las transformaciones de semejanza, lo que implica, aplicar sobre una figura una homotecia (ampliarla o disminuirla), una rotación y/o una traslación. Además, el fractal permite que sobre su construcción se realice un análisis intrafigural de cada una de sus partes, mirándolas como figuras separadas.

A continuación se presentan algunos de los conceptos matemáticos que se relacionan con el estudio de la semejanza y la forma como se pueden visualizar a través de los fractales.

Teorema de Thales: Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos transversales, los segmentos determinados sobre las transversales son proporcionales.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$

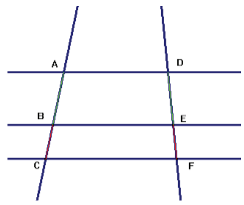


Figura 3. Representación gráfica del Teorema de Thales

Proyección paralela: *S*ean *a* y *a*' dos rectas concurrentes en *O* y una recta *b* no paralela ni a *a* ni a *a*' y sean *P, Q, R, S* puntos sobre *a*, se trazan rectas paralelas a *b* que pasen por *P, Q, R, S* y que corten a *a*' en *P', Q', R', S',* esto es: por cualquier punto de *a* puedo trazar una recta paralela a *b* que cortará a *a*', es decir, a cada punto de *a* es posible asociar un punto de *a*'.

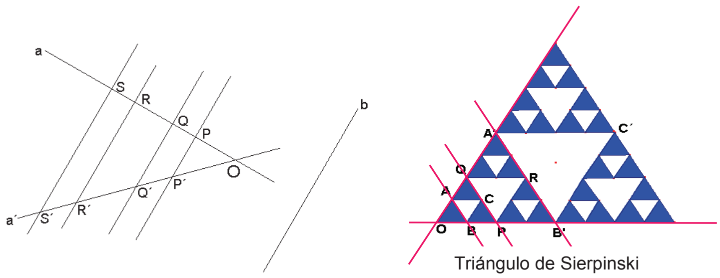


Figura 4. Proyección paralela (Triángulo de Sierpinski)

El uso del Triángulo de Sierpinski permite visualizar dentro de un contexto, en este caso los fractales, la proyección paralela, el Teorema de Thales y las relaciones de razón y proporción que allí se presentan.

Criterios de semejanza de triángulos: Es posible a partir de la construcción de diferentes fractales, visualizar los criterios de semejanza de los triángulos y establecer la relación intrafigural de las figuras semejantes generadas en dicha construcción.

- Criterio AA (ángulo-ángulo): Si dos ángulos de un triángulo son congruentes a dos ángulos de otro triángulo, los triángulos son semejantes.

- Criterio LAL (lado-ángulo lado): Si dos lados de un triángulo son proporcionales a sus lados correspondientes de otro triángulo y los ángulos correspondientes entre estos lados son congruentes, entonces los triángulos son semejantes.

- Criterio LLL (lado-lado-lado): Si los lados correspondientes de dos triángulos son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

Con las siguientes situaciones, en donde se presenta la construcción del triángulo de Sierpinski con diferentes tipos de triángulos (escaleno e isósceles), se pretende la construcción, medición y cálculo, de cada uno de los criterios de semejanza.

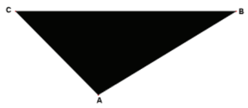
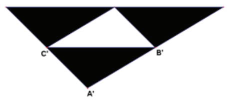
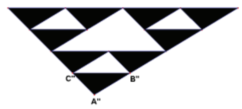
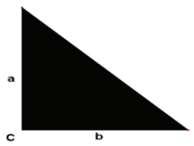
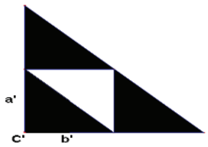
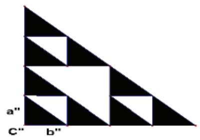
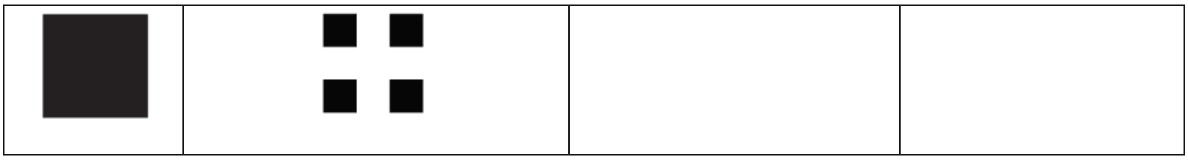
Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4
			
Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4
			
a. Construye el paso 4 del Triángulo de Sierpinski. **b.** Encuentra la razón entre $\frac{a}{a'} =$ __________ $\frac{b}{b'} =$ __________ **c.** Encuentra la medida de: $< C =$ __________ $< C' =$ __________ y $< C'' =$ __________			

Figura 1. Triángulos de Sierpinski escaleno y rectangular

Otras relaciones: En el estudio de la semejanza es importante que el estudiante comprenda las relaciones relativas a la longitud de los lados, la amplitud de los ángulos, la medida de perímetros y áreas que se dan entre la imagen y la preimagen. La construcción y el análisis que se hace sobre un fractal permite a los estudiantes encontrar estas relaciones y generalizarlas.

Paso1	Paso 2	Paso 3	Paso 4
Dibuja un cuadrado de lado 9u	Divide el cuadrado en nueve cuadrados congruentes. Elimina los cinco cuadrados centrales, dejando los cuadrados de las esquinas.	Sobre cada cuadrado obtenido repite lo indicado en el Paso 2. Quedan 16 cuadrados.	Repite el proceso del paso anterior sobre los cuadrados resultantes. Quedan 64 cuadrados.



a) Denomina como A al primer cuadrado del paso 1 y como A’ a uno de los cuadrados del paso 2, y continua con el proceso hasta enumerar un cuadrado de cada paso.

b) ¿Cuál es la longitud del lado de cada uno de los cuadrados en cada paso? ¿Se conserva alguna relación entre las longitudes de los lados? Concluye

d) ¿Cómo son los ángulos de cada cuadrado y qué relación guarda con los ángulos de los otros cuadrados?

e) Halla perímetro y área de uno de los cuadrados obtenidos en cada paso.

Figura 6. Análisis del Cuadrado de Cantor

METODOLOGÍA

El trabajo del profesor muchas veces se ve enmarcado en el diseño de actividades que permitan potenciar la participación activa de los estudiantes en sus procesos de aprendizaje, para lo cual resulta importante orientar actividades que promuevan, entre otras: la interacción de los estudiantes, el uso de recursos y materiales didácticos, el reconocimiento y uso de diferentes representaciones y por último, el trabajo con situaciones o problemas significativos.

Para organizar la secuencia de actividades se toma como base la propuesta del Grupo Deca (1992), que propone incluir:

- **Actividades de iniciación e introducción**: En esta fase se observan las ideas previas de los estudiantes y se da cuenta de la importancia de trabajar nuevos conceptos.
- **Actividades de desarrollo y estructuración**: El estudiante entra en contacto con los nuevos conceptos y empieza a trabajar para asimilarlos. Es importante tener en cuenta que en esta etapa el estudiante logra comprensión de algunas situaciones que le permiten la resolución de situaciones problemáticas.
- **Actividades de aplicación y profundización**: El estudiante aplica los conocimientos adquiridos en situaciones problemáticas nuevas, reflexiona acerca de los procesos empleados en la resolución de los problemas y plantea nuevos problemas.

- **Actividades de evaluación**: La evaluación es concebida como un continuo dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje; sin embargo, las actividades planteadas en esta fase están diseñadas para conocer el grado de apropiación y estrategias de resolución de problemas.

<table>
<tr><th colspan="4">Secuencia para la enseñanza de la semejanza</th></tr>
<tr><th>Tipo de actividad</th><th>Actividad</th><th>Intención</th><th>Recursos</th></tr>
<tr><td>Actividad de introducción</td><td>Análisis y construcción del conjunto de Cantor y del copo de nieve</td><td>Revisar conceptos previos de los estudiantes sobre proporcionalidad y medida</td><td rowspan="4">Según Godino (2002), clasificaremos los recursos en:
Ayudas al estudio: textos y documentos en los que se aborde el estudio de la semejanza y los fractales
Instrumentos semióticos:
De tipo gráfico – textual, guía o taller para el estudiante

Representaciones fractales</td></tr>
<tr><td>Actividad de estructuración</td><td>Análisis y construcción del Triángulo de Sierpinski
Construcción del cuadrado de Cantor</td><td>Deducir el Teorema de Thales, hacer una aproximación a la semejanza a partir de figuras separadas</td></tr>
<tr><td>Actividad de profundización</td><td>Análisis y construcción
Triángulo de Cantor, Triángulo de Sierpinski y Cuadrado de Besicovich.</td><td>Trabajar los criterios de triángulos semejantes</td></tr>
<tr><td>Actividad de evaluación</td><td>Análisis de las
Curvas de Hilbert y Peano</td><td>Aplicar los conceptos estudiados:
proporcionalidad, Teorema de Thales, criterios de semejanza</td></tr>
</table>

Tabla 1. Secuencia didáctica para la enseñanza de la semejanza

Se plantea una metodología de trabajo en grupo con el fin de que los estudiantes a través de la comunicación y la interacción, propongan estrategias de solución a las situaciones planteadas. El profesor será un orientador en el proceso de construcción de los estudiantes, dará pautas para la realización de la socialización y tendrá a su cargo la institucionalización de los conceptos. En la evaluación se propondrán actividades en las cuales se hará uso de figuras fractales y de otras de diferente naturaleza para verificar que el concepto de semejanza se ha comprendido ya que los estudiantes pueden utilizarlo en diferentes contextos.

REFERENCIAS

Castro, C. y Céspedes, Y. (2009). *Concepciones de los estudiantes de grado octavo sobre el concepto de semejanza.* Tesis de maestría no publicada, Universidad Sergio Arboleda, Bogotá, Colombia.

Gagné, R. (1975). *Principios básicos del aprendizaje para la instrucción*. México D.F., México: Diana.

Godino J. (2002). Uso de material tangible y gráfico-textual en el estudio de las matemáticas: superando algunas posiciones ingenuas. En A.M. Machado et al. (Ed.), *Actas do ProfMat 98*. Guimaraes, Portugal: Associaçao de Professores de Matemática.

Grupo Deca. (1992). Orientaciones para el diseño y elaboración de actividades de aprendizaje y de evaluación. *Revista AULA*, 6, 33-39.

Lemonidis, Ch. (1991). *Conception, réalisation et resultats d'une expérience d'enseignement de l' homothétie*. Tesis doctoral no publicada, Université Louis Pasteur, Strasbourg, Francia.

Mandelbrot, B. (s.f.). *Objetos fractales. Autosemejanza*. Recuperado el 2 de marzo de 2011, en: http://coco.ccu.uniovi.es/geofractal/capitulos/01/01-04.shtm#Cantor.