El Teorema de Barrow como propuesta para la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo

Harold Devia y **Tatiana Galvis**
Universidad Pedagógica Nacional
hdevia@gmail.com, matetag@gmail.com

Se presenta la descripción de un taller del trabajo de grado titulado *Propuesta didáctica para el paso de la gráfica de la función derivada a la gráfica de una función primitiva*, y las conclusiones de su implementación con estudiantes de cálculo integral de Licenciatura en Matemáticas, de la Universidad Pedagógica Nacional. El propósito del trabajo fue diseñar un conjunto de actividades que involucraran el empleo de algunas herramientas del cálculo, para establecer la relación que existe entre el cálculo diferencial y el cálculo integral a través del Teorema Fundamental del Cálculo, y además, resaltaran el uso del sistema de representación gráfico de las funciones a través de los procesos de visualización y análisis gráfico.

Justificación

Uno de los conceptos fundamentales en el estudio del Cálculo es el de función, a partir del cual se abordan los conceptos de derivada e integral. Siguiendo a Font (2005), las funciones tienen cuatro representaciones: la simbólica, la tabular, la gráfica y la verbal. Entre ellas es posible establecer conexiones “que marcan las diferentes etapas de aprendizaje en los estudiantes” (Turégano, 1998, p. 45) y realizar cambios de unas a otras a través de lo que Font denomina procesos de traducción y conversión.

En el Cálculo Integral se suele usar constantemente la representación simbólica, haciendo énfasis en el uso de algoritmos y distintos métodos para hallar las antiderivadas de una función. Como consecuencia de este enfoque de enseñanza, el uso de la representación gráfica queda relegado a un segundo plano, lo que dificulta entender la integral de una función desde su interpretación geométrica como el área acumulada bajo una curva, tal como menciona Turégano (1998).

Con base en las ideas citadas, se diseñó una propuesta para analizar el Teorema Fundamental del Cálculo como aquel concepto que relaciona el proceso de integración con el de diferenciación, y que constituye un “robusto puente que

Devia, H. y Galvis, L. (2011). El Teorema de Barrow como propuesta para la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 189-196). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

une estas dos estructuras matemáticas aparentemente independientes" (Turégano, 1998, p. 236).

MARCO TEÓRICO

Font (2005) sólo considera cuatro representaciones del concepto de función (la analítica, la tabular, la gráfica y la verbal) y afirma que a pesar de que éstas hacen alusión a un mismo objeto matemático, en cada una se privilegia el uso de algún proceso cognitivo, y la integración de éstos son los que hacen a una persona competente en el estudio del objeto matemático llamado función.

Para la representación gráfica es indispensable el proceso de la visualización; para la tabular, los procesos que incluyen aspectos numéricos y cuantitativos; para la analítica, los procesos relacionados con la capacidad simbólica; y finalmente, la representación verbal, la asocia con los procesos que incluyen las capacidades lingüísticas de una persona.

De acuerdo con Cantoral y Montiel (2003), la visualización es la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende. Castro y Castro (1997) presentan la noción de visualización como la capacidad para la formación de imágenes mentales que permiten la evocación de un objeto sin que el mismo esté directamente presente.

En el libro *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* de Duval (como se cita en MEN, 2004) existen tres niveles de visualización: el global de percepción visual, el de percepción de elementos constitutivos y el operativo de percepción visual. El primero es el nivel más elemental donde se observan los objetos de manera global para asociar figuras geométricas a objetos físicos. En él se le da importancia a la posición del objeto o al tipo de trazo, sin tener en cuenta aspectos matemáticos como propiedades y relaciones. En el segundo nivel, además de retomar los aspectos del nivel anterior, se consideran las relaciones entre los elementos constitutivos, es decir, las figuras geométricas se enuncian con nombre propio, por ejemplo como cuadrados y triángulos. Al tener nombre propio, tienen características propias como lo son las relaciones de congruencia entre lados y ángulos; y relaciones de perpendicularidad y/o paralelismo. Es importante en este nivel orientar al estudiante para visualizar los objetos de manera no estandarizada. Por último, el tercer nivel además de considerar la percepción de las características de una figura para operar en ella, se reorganizan los elementos que la conforman para lograr la solución de un problema planteado; es el caso de las conocidas pruebas sin palabras, donde la visualización se enfoca en la capacidad de transformar la figura para dar validez a una proposición matemática.

Finalmente, la visualización se emplea para lograr un mejor entendimiento de conocimientos abstractos, y se considera una habilidad que es necesario estimular mediante el diseño de actividades que pongan en evidencia la interpretación que da el estudiante en la construcción y descripción de un tópico matemático.

Teorema de Barrow, una aproximación al Teorema Fundamental del Cálculo

Según Flashman (1996), el Teorema de Barrow es un caso particular del Teorema Fundamental del Cálculo, en el que la función primitiva (curva *A*) se obtiene al determinar el área acumulada bajo la curva de otra función (curva *Y* y semirrecta *OZ*).

El Teorema de Barrow afirma lo siguiente: *Suponga que en x la altura de la curva A que pasa por los puntos O y P es el segmento PX, la cual mide igual al valor del área del triángulo rectángulo OXQ. Si se elige el punto T sobre la semirrecta OZ de tal manera que* $TX \cdot XQ = XP$*, entonces la recta TP es tangente a la curva A en el punto P.*[1]

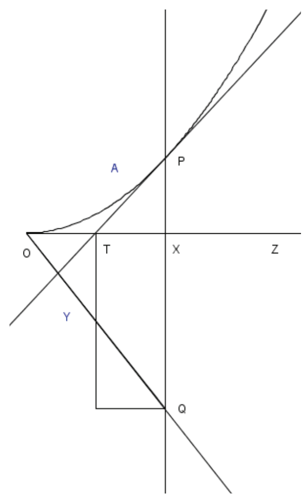


Figura 1

En la Figura 1, la curva *A* corresponde a una rama de parábola de la forma $f(x) = kx^2$, con $k > 0$. También se infiere que por ser la recta *PX* perpendicular a la recta *OX*, las longitudes *XQ* y *PX* aumentan cuando la longitud *OX* aumenta.

En la Figura 2, se presenta lo que Barrow hizo en una misma gráfica por encima y por debajo de un mismo eje horizontal. La Figura 2(a) corresponde a la

[1] Enunciado adaptado de Flashman (1996, p. 312).

curva *Y*, y en la Figura 2(b) se representa la gráfica de las abscisas que tienen la misma magnitud que el área del triángulo OXQ de la Figura 2(a).

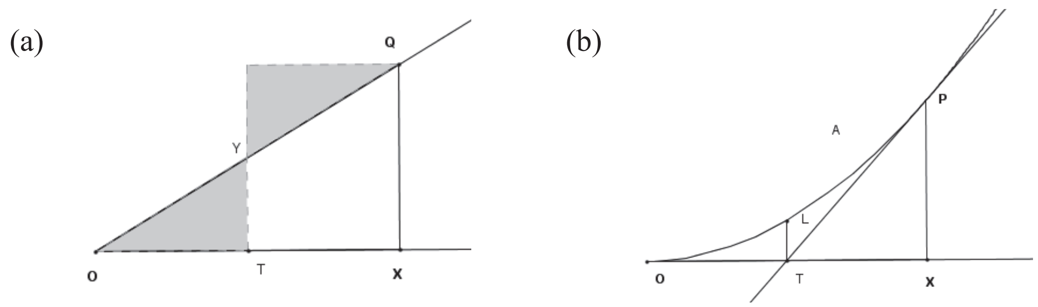


Figura 2

La condición de que $PX = QX \cdot TX$ en el Teorema de Barrow, exige que la posición del punto T en la semirrecta OX no sea arbitraria, sino que T debe ser el punto medio del segmento OX. La Figura 2(a) ilustra esta afirmación al considerar la congruencia en área entre el triángulo OXQ y el rectángulo de base TX y altura QX como consecuencia de que los triángulos sombreados son congruentes.

Otra manera de referirse al área de uno de los triángulos sombreados, es empleando la notación de integral definida de la siguiente manera: $\int_0^t Y$, lo cual representa la longitud del segmento LT de la Figura 2(b).

De acuerdo con la demostración del Teorema de Barrow (Flashmn, 1996) se deduce que la pendiente de la recta tangente a la curva A en el punto P es $m = \frac{XP}{TX}$, pero por hipótesis del teorema se tiene que $PX = TX \cdot QX$, por lo tanto se concluye que la pendiente es $m = QX$. Es decir, si se tiene la información de la Figura 2(a) se puede trazar una parte de la función primitiva y saber con precisión el valor de su pendiente en un punto específico. Ahora, si se tiene la Figura 2(b) se puede hallar el valor de la pendiente en un punto específico dividiendo el valor de la ordenada entre la mitad del valor de la abscisa.

Como comentario final al Teorema de Barrow, se afirma que él estableció la relación entre el problema de la recta tangente a una curva en un punto, y el problema del área bajo la curva para funciones cuadráticas y lineales respectivamente. En otras palabras, se aproximó a lo que se conoce como Teorema Fundamental del Cálculo aplicándolo a las funciones antes mencionadas.

TALLER IMPLEMENTADO Y RESULTADOS

Para introducir el Teorema Fundamental del Cálculo a partir de los registros de representación algebraico y gráfico, en el siguiente taller se hace una adaptación de la propuesta de Zubieta (s.f.), en el que se plantea a los estudiantes manipular una construcción realizada con el software Regla y Compás el cual modela el Teorema de Barrow.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

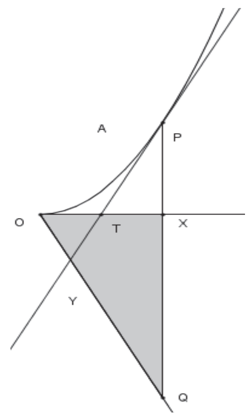
TALLER: TEOREMA DE BARROW

Elaborado por: Harold Devia - Tatiana Galvis

Objetivo: Identificar la relación entre el Teorema de Barrow y el Teorema Fundamental del Cálculo.

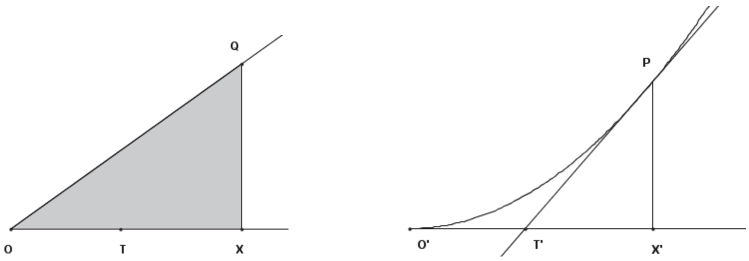
En este taller se aborda, desde una perspectiva geométrica, el puente entre dos problemas clásicos del Cálculo: el problema de la recta tangente a una curva en un punto específico y el problema del área de una región plana.

Al retroceder en la historia del Cálculo, aparece un predecesor de Newton y Leibniz que se interesó en estudiar la relación entre los dos problemas antes mencionados. Este personaje fue Isaac Barrow (1630-1677), quien fue profesor de Newton y el primero en evidenciar que la interpretación geométrica de la derivada y la integral no eran conceptos inconexos, a partir de lo cual elaboró el teorema que lleva su nombre.



Teorema de Barrow: Suponga que en X la altura de la curva A que pasa por los puntos *O* y *P* es el segmento *PX*, la cual mide igual al valor del área del triángulo rectángulo *OXQ*. Si se elige el punto *T* sobre la recta *OX* de tal manera que $TX \cdot XQ = XP$, entonces la recta *TP* es tangente a la curva *A* en el punto *P*.

1) Empleando la construcción que se presenta en el archivo Barrow1, manipule la posición del punto *T* sobre la semirrecta *OX*, para que la recta *T'P* sea tangente a la curva *A*. ¿A qué distancia del punto *O* debe estar el punto *T* para que la recta *T'P* sea tangente?



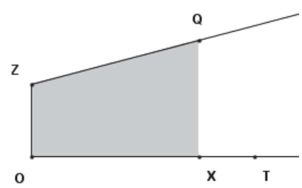
En el archivo Barrow1 se encuentra una construcción que ilustra al Teorema de Barrow. En éste, el segmento OX es congruente con el segmento *O'X'*, al igual que el *OT* lo es con el *O'T'*. La recta *T'P*

2) Trace una recta paralela a $\overline{QX}$ que pase por el punto T (donde $\overleftrightarrow{PT'}$ es tangente a la curva A en el punto P), y una recta paralela a $\overline{OX}$ que pase por *Q*. Denomine con R la intersección de estas rectas.

(a) ¿Qué debe representar el área del triángulo que se visualiza en el rectángulo *TXQR,* con respecto a la curva *A*? Justifique su respuesta.

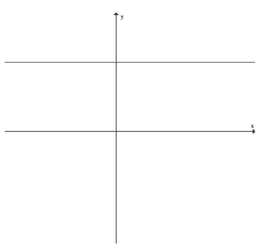
(b) El área del trapecio que se visualiza en el mismo rectángulo se interpreta como una longitud. Indique cómo obtener esa longitud analizando la gráfica de la curva *A*.

3) En el archivo Barrow2 se encuentra una variación del Teorema de Barrow, en el que las semirrectas *OX* y *OQ* no se intersecan, tal como se ilustra en la imagen de la derecha.

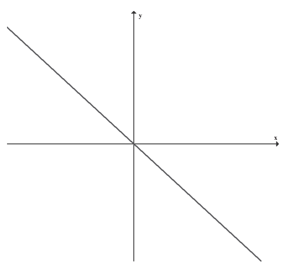


I. Para cada una de las siguientes gráficas haga un bosquejo de la gráfica de una de las funciones primitivas.

(a)

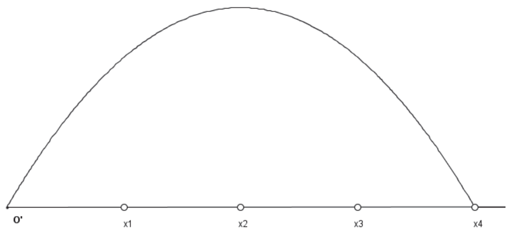


(b)



II. En el archivo Barrow2 rote la semirrecta *ZQ* alrededor de *Z* para hacer los modelos gráficos presentados en (I) y verifique si el lugar geométrico que cada uno genera coincide con los respectivos bosquejos que usted realizó de las funciones primitivas.

III. Para la gráfica (b), la construcción de Barrow2 genera una parábola como la que se muestra a continuación. Trace en ella los segmentos tangentes en los puntos x_i con $i = 1, 2, 3$ y 4.



IV. Relacione el comportamiento de las rectas tangentes a la parábola en los puntos x_i con la semirrecta *ZQ* cuando ésta modela la gráfica (b).

4) ¿Encuentra alguna similitud entre el Teorema de Barrow y el Teorema Fundamental del Cálculo? ¿Sería correcto afirmar que la variación del Teorema de Barrow y el Teorema Fundamental del Cálculo son los mismos? Explique su respuesta.

Para el desarrollo de este taller, cada estudiante tuvo la posibilidad de explorar dos archivos correspondientes a las construcciones Barrow1 y Barrow2 realizadas con el software de geometría dinámica Regla y Compás.

Con respecto a la intención del numeral 1, los estudiantes efectivamente cumplieron nuestras expectativas porque todos afirmaron que el punto *T* debe ser el punto medio del segmento *OX*, para que efectivamente la curva *A* sea la función de área acumulada de la curva *Y*, y sólo el 53% de ellos lo justificaron.

En el numeral 2, todos los estudiantes concluyeron que el triángulo por el cual se pregunta en el literal (a) es congruente con el que tiene por base el segmento *OT*, sin embargo a la mayoría de ellos les fue dispendioso comprender que el área del triángulo representa la altura de la curva *A* en el punto *T'*. Por esta razón fue necesario intervenir y explicar a los estudiantes el significado de esa área en la curva *A*.

Consideramos que la dificultad que mostraron los estudiantes fue causada por dos factores: el hecho de que el Teorema de Barrow prescinde de ejes cartesianos y en consecuencia de los términos de abscisa y ordena, y en segundo lugar por la redacción del enunciado del literal (a).

En el literal 2(b) los estudiantes manifestaron incomprensión o desacierto en lo que se desea indicar, y fue necesario intervenir una vez más en el trabajo de los estudiantes para que comprendieran lo que se espera con el enunciado.

El numeral 4, únicamente tres estudiantes lo respondieron. Los tres coincidieron en responder la pregunta: ¿Encuentra alguna similitud entre el Teorema de Barrow y el Teorema Fundamental del Cálculo?

Sus respuestas afirmaron que el Teorema de Barrow funciona igual que el Teorema Fundamental del Cálculo, pero sólo uno de ellos manifestó que no son el mismo, sin exponer la justificación de su respuesta.

REFERENCIAS

Cantoral, R. y Montiel, G. (2003). Visualización y pensamiento matemático. En J. Delgado (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (vol. 16, tomo 2, 694-701). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Recuperado en agosto de 2008 de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/actas.html.

Castiblanco, C., Urquina, H., Camargo, L. y Acosta, M. (2004). *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Castro, E. y Castro E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la educación secundaria* (pp. 95-112). Barcelona, España: Horsori.

Flashman, M. (1996). Historical motivation for a calculus course: Barrow's Theorem. En R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica. Historical research and integration with teaching* (pp. 309-315). Washington, USA: Mathematical Association of America.

Font, V. (2005). Funciones y derivadas. En *Memorias del XXI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística* (tomo II, pp. 5-54). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias, 16*(2), 233- 249.

Zubieta, G. y Meza, R. (s.f.). *El teorema fundamental del cálculo: la versión que aparece en los textos de cálculo y la otra, basada en las ideas de Barrow, presentada con un paquete de geometría dinámica*. Documento recuperado en julio de 2008, de: http://www.matedu.cinvestav.mx/~matedul/publicaciones/MemoriasPrimerEncuentro/investigacion/articulos_pdf/Zubieta.pdf.