

LA VERIFICACIÓN Y LA INTERPRETACIÓN DE ENUNCIADOS EN LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA

Bibiana Franco, Giovanni Moreno y Leonor Camargo

Universidad Pedagógica Nacional

nanitaa55@gmail.com, giovanotas7@hotmail.com, leonor.camargo@gmail.com

Referimos el primer acercamiento que tienen estudiantes de grado octavo cuando se enfrentan a problemas de construcción que pretenden involucrarlos en la actividad demostrativa. Mostramos que los estudiantes de básica secundaria tienen la necesidad de verificar las afirmaciones incluidas en el enunciado de los problemas como un mecanismo para interpretar la información contenida y lo que se les pide. En este sentido, la verificación, como parte de las acciones de la actividad demostrativa, no se restringe a la comprobación de un hecho descubierto, tal como lo sugieren Perry et al. (2006), sino que está presente desde el comienzo de la actividad. Ilustramos esta idea con fragmentos de la interacción de un grupo de cuatro estudiantes.

En esta ponencia comunicamos algunos avances de los análisis que estamos desarrollando relacionados con nuestro proyecto de investigación “La argumentación como núcleo de la actividad demostrativa”, estudio que adelantamos como trabajo de grado en el programa de Maestría en Docencia de las Matemáticas, de la Universidad Pedagógica Nacional. Nuestra investigación se inscribe en la línea *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* del grupo Didáctica de la Matemática. Esta línea de investigación se ha preocupado por el aprendizaje de la demostración en los diferentes niveles educativos. A partir de tal inquietud, considera de vital importancia realizar experimentos de enseñanza que permitan estudiar acciones desarrolladas por los estudiantes en donde se hagan evidentes las posibilidades que tienen los estudiantes de secundaria de llevar a cabo procesos de argumentación y justificación como parte fundamental del aprendizaje de las matemáticas. Los resultados de tales experimentos permitirán promover diseños curriculares para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en la escuela.

Nuestra ponencia se divide en cuatro apartados organizados de la siguiente manera: inicialmente, describimos el marco de referencia con el cual estamos orientando la investigación; luego presentamos un resumen del diseño metodológico del estudio; posteriormente, damos cuenta del proceso de análisis de

la información recogida sobre la actividad demostrativa del grupo de estudiantes; por último, damos un ejemplo del análisis de un fragmento de interacción que se constituye en una evidencia del uso de la verificación por parte de los estudiantes.

MARCO DE REFERENCIA

Nuestro trabajo está en consonancia con el constructo *actividad demostrativa* (Perry, Camargo, Samper y Rojas, 2006), el cual ha sido desarrollado a partir de diversas investigaciones realizadas por profesores del Departamento de Matemáticas y estudiantes de Maestría de la Universidad Pedagógica Nacional. Este constructo propone una mirada amplia a la demostración en el ámbito educativo, que incluye: el proceso de conjeturación y el proceso de justificación. En el proceso de conjeturación se realizan acciones que conducen a la formulación de una conjetura que da solución a una tarea (visualizar, explorar, conjeturar y verificar); estas acciones posibilitan la creatividad de los estudiantes, pues no existen reglas para llevarlas a cabo. En el proceso de justificación las acciones conducen a la búsqueda y organización de ideas para explicar, probar o demostrar la conjetura, es decir, para justificarla.

El constructo *actividad demostrativa* se circunscribe a la perspectiva sociocultural, enfoque de referencia de la línea de investigación. En este sentido, son de vital importancia las interacciones estudiante–estudiante y estudiante–profesor en el desarrollo de tal actividad. Gracias a esa perspectiva, los profesores de la línea de investigación dan relevancia a la argumentación, foco de interés de nuestro trabajo de grado. De esta manera, cuando los estudiantes se enfrentan a un problema y buscan una vía para su solución, pueden realizar interacciones de diversa índole con sus compañeros, a partir de las cuales se generan argumentos empíricos o teóricos que permiten proponer y validar una posible solución del problema. En particular, Perry, Camargo, Samper y Rojas (2006), definen la acción de verificación como la:

Comprobación empírica mediante acciones visibles sobre una representación, como medir, construir y calcular, con el propósito de poner a prueba la conjetura establecida cuando un cuestionamiento suscita una duda frente a ésta.

Con ello suponen que la argumentación que los estudiantes despliegan, cuando verifican, se realiza sólo al momento en que quieren poner a prueba el hecho descubierto. Una posible explicación de esta caracterización es que las

investigaciones realizadas en la línea se han desarrollado principalmente con estudiantes de los primeros semestres de educación superior, en la formación inicial de profesores, quienes probablemente no tienen necesidad de verificar la información contenida en los enunciados de los problemas. Nuestro trabajo aporta a la línea de investigación al analizar las acciones de verificación que despliegan estudiantes de secundaria en momentos previos a la producción de la conjetura.

DISEÑO METODOLÓGICO

Dado que el interés de nuestra investigación se centra en buscar evidencias de los procesos de argumentación que estudiantes de básica secundaria llevan a cabo al involucrarse en la actividad demostrativa, nuestro trabajo se enmarca dentro de una perspectiva naturalista; es decir, observamos estudiantes en el espacio usual del aula interactuando en pro de solucionar un problema, y tomamos registro de las interacciones entre ellos.

Los primeros ejercicios de análisis de las interacciones dan evidencias del fenómeno que queremos comunicar en esta ponencia. A continuación, describimos la población a la que se dirige el estudio y de la cual tomamos los datos, el problema que se les propuso, los mecanismos que utilizamos para recoger la información y por último la manera como la estamos analizando.

La investigación se realiza con estudiantes de grado octavo de básica secundaria, en una clase de geometría que tuvo lugar al finalizar el año 2010. Uno de los autores de esta ponencia era la profesora titular de dicha asignatura y por lo tanto tuvo la posibilidad de proponer estrategias de trabajo en la clase para favorecer la actividad demostrativa. Los estudiantes tenían conocimientos básicos de geometría, tales como la identificación de figuras geométricas y sus partes. Adicionalmente, gracias a las habilidades adquiridas en la asignatura *Dibujo técnico*, manejaban la regla y el compás y conocían algunos procedimientos para construir rectas perpendiculares y ángulos congruentes. Sin embargo, no reconocían en las construcciones hechas los objetos geométricos involucrados, pues en esa asignatura lo importante era seguir cuidadosamente una serie de pasos para obtener la construcción deseada.

A ocho de los veintiocho estudiantes de grado octavo distribuidos en dos grupos, se les propuso un problema en una sesión de clase, para la cual los estu-

diantes debían usar compás, regla sin medidas, lápices y borrador. El problema era el siguiente:

En la figura, el punto M es el punto donde se cortan las mediatrices del $\triangle ABC$ y \overline{AB} es un lado del triángulo. Construya un triángulo tal que M sea corte de las mediatrices.



Los estudiantes debían leer el enunciado y solucionar el problema. La profesora y otro autor de esta ponencia acompañaron el trabajo de cada grupo formulando preguntas para promover la argumentación. Después de que los estudiantes resolvieron el problema, la profesora realizó una socialización de los procesos de solución realizados por los dos grupos, para institucionalizar los resultados. Las definiciones, teoremas o procedimientos se validaron a partir de las justificaciones propuestas por los estudiantes.

La interacción entre los estudiantes se grabó en audio y video. Las grabaciones se transcribieron en su totalidad atendiendo al orden cronológico y estas han sido objeto de varias correcciones a partir de una versión inicial, buscando reconstruir lo más fielmente posible lo sucedido en la interacción. Adicionalmente, las transcripciones se alimentaron con información proveniente de las hojas de trabajo de los estudiantes, con aclaraciones (puestas entre paréntesis cuadrados) que hicieron los investigadores a algunas intervenciones de los estudiantes que no resultaban lo suficientemente comprensibles por sí solas o con narraciones de acciones de los estudiantes que no iban acompañadas de un diálogo. Las figuras observadas en el video se modelaron utilizando un programa de geometría dinámica.

PROCESO DE ANÁLISIS

Con la transcripción completa del proceso de resolución del problema, realizamos una división de ésta en episodios. Entendemos por episodio un fragmento de la transcripción donde los estudiantes están desarrollando una idea para solucionar el problema. Por ejemplo, en la transcripción del proceso realizado por el Grupo 1 propusimos, entre otros, los siguientes episodios: (i) Interpretan el enunciado y hacen un primer intento de comprobación de que M está en la mediatriz; (ii) Comprueban que M está en la mediatriz; (iii) Propo-

nen una forma para ubicar C sobre la mediatriz de \overline{AB} , para lo cual hacen un triángulo equilátero; (iv) Identifican en la figura construida características asociadas a la mediatriz.

El análisis de cada episodio tiene en cuenta tres aspectos. Primero, describimos las acciones que hicieron los estudiantes y el diálogo sostenido entre ellos. Segundo, identificamos los momentos de la transcripción en los cuales los estudiantes desarrollan alguna de las acciones de la actividad demostrativa. Tercero, identificamos y caracterizamos los argumentos que utilizan los estudiantes para justificar sus afirmaciones. El estudio pretende caracterizar, organizar y clasificar los argumentos que están usando los estudiantes y establecer vínculos entre ellos y las diferentes acciones de la actividad demostrativa. En esta ponencia, mostramos y analizamos un episodio en donde se evidencia que verifican los estudiantes y con qué objetivo.

EJEMPLO DE ANÁLISIS

Los estudiantes habían: leído el enunciado, revisado en sus apuntes la definición de mediatriz y discutido entre ellos cómo se construía una mediatriz. En este episodio Sergio, Cristian, Felipe y Daniel retoman el enunciado y deciden construir la mediatriz sobre el lado \overline{AB} .

18. Felipe: Con la misma medida de M [arco de abertura AM] toca hacerlo abajo. [Señala la parte de abajo del \overline{AB} , como lugar para trazar otro arco].
19. Daniel: Toca sacar C .
20. Sergio: Toca mirar si M es... Por eso, haga las dos circunferencias y toca mirar si M es la mediatriz.
21. Felipe: ¿Qué era? ¿Radio AM ? [Con el compás hace centro en A y describe un arco, sin trazarlo, con radio AB].
- [...]
25. Felipe: No nos da [Se refiere a que M no quedó en dicho arco].
26. Cristian: Pero no, tocaría sacar entonces C .
27. Sergio: ¿ C ?
28. Felipe: Lo que yo les digo, tocaría hacerlo abajo, tocaría hacer la misma medida de M abajo.
29. Daniel: Sí.

30. Sergio: Pero toca mirar primero si M sí pasa por la mediatriz o no pasa por la mediatriz.
31. Felipe: Por eso, primero toca averiguar eso [Hace dos arcos en la parte de abajo del \overline{AB} con radio AM y con centro en A y B]
32. [...]
33. Profesora: ¿Qué van a verificar?
34. Felipe: Si M es la mediatriz [Se refiere a verificar que el punto M esté en la mediatriz].
35. Profesora: ¿Si M es la mediatriz?
36. Todos: ¡Ajá!, Sí.
37. Sergio: Dios mío, que sea la mediatriz.
38. Profesora: [...]
39. Felipe: [Después de hacer los arcos]. ¡Ah!, sí es la mediatriz... sí, sí es la mediatriz. [Vuelve a marcar los dos arcos en la parte de abajo del \overline{AB} con radio AM y centros en A y en B].
40. Sergio: Sí, sí es la mediatriz.
41. Daniel: Sí, porque sube por toda la...
42. Profesora: ¿Qué comprobaron Sergio?
43. Felipe: Que era la mediatriz.
44. Sergio: Que M es un punto que equidista en A y B . O sea que M está formando la mediatriz.

Los estudiantes aún están interpretando el enunciado. Sugieren dos alternativas diferentes para abordar el problema: por un lado, proponen buscar el vértice C para formar el $\triangle ABC$; por el otro, proponen comprobar que el punto M está en la mediatriz del \overline{AB} .

En este episodio se evidencian dos momentos de *verificación*: cuando proponen trazar la mediatriz y anticipan que M no está en la mediatriz, porque el arco que describen con el compás no pasa por M [21-25] y cuando deciden cambiar el radio \overline{AB} por el radio \overline{AM} , para asegurarse de que los arcos pasen por M [31-40]. Cuando diseñamos el problema no previmos que los estudiantes necesitaran comprobar el hecho geométrico dado en el enunciado; esta situación nos sorprendió y puso en tela de juicio nuestra convicción de que

cualquier sujeto acepta como cierta la información dada en el enunciado de un problema. Adicionalmente, evidenciamos que la acción de verificación no solo está presente en la justificación de una conjetura, como lo proponen Perry, Camargo, Samper y Rojas (2006), sino desde la misma interpretación del enunciado, como se muestra en este episodio, pues los estudiantes tienen la necesidad de poner a prueba lo que el enunciado propone.

Los argumentos que se identifican en este episodio están enfocados a justificar que el punto M está en la mediatriz del \overline{AB} . En una primera caracterización de los argumentos, identificamos uno de tipo empírico –en el que los estudiantes justifican que la recta construida es la mediatriz apoyándose en lo observado en la construcción [41]– y un argumento de tipo teórico en el que justifican que el punto M está en la mediatriz porque equidista de los extremos del segmento [44].

REFLEXIÓN FINAL

El análisis que hemos hecho hasta el momento nos permite reflexionar sobre las siguientes cuestiones:

- La importancia de tener unas transcripciones que reflejen lo más fielmente las interacciones; es decir, con solo la lectura de ellas se debe poder reconstruir las acciones de los estudiantes. Lo anterior permite hacer un mejor análisis de los diálogos que entablan los integrantes del grupo, sin necesidad de revisar nuevamente los archivos de audio y video.
- El orden en que aparecen las acciones de la actividad demostrativa no es lineal. En los fragmentos de las conversaciones de los estudiantes, podemos evidenciar, por ejemplo, que los estudiantes visualizan, explorar, verificar, vuelven a explorar y luego otra vez verifican.
- En cuanto a la acción *verificar* es necesario ampliar la caracterización que de ella proponen Perry, Camargo, Samper y Rojas (2006), pues no sólo cuando tienen una conjetura recurren los estudiantes a ella para verificarla, sino que utilizan la verificación como medio para validar cualquier tipo de información dada o que surge en el curso de resolución del problema.

- Los argumentos son producto de la necesidad recurrente de verificar cualquier tipo de información dada o emergente del problema. Estos argumentos permiten dar validez a las diferentes estrategias de solución.
- La interpretación del enunciado propuesto en un problema, no es obvia y mucho menos inmediata. Por el contrario, los estudiantes necesitan tiempo para comprender lo que se pide en el problema y por ello cada vez que una estrategia no funciona, vuelven a leer el enunciado y a interpretarlo nuevamente para buscar una estrategia diferente.

REFERENCIAS

Perry, P., Camargo, L., Samper, C. y Rojas, C. (2006) *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.