SÓLIDOS PLATÓNICOS Y TEORÍA DE GRAFOS EN LAS CLASES DE GEOMETRÍA

Sara Henao y **Jhonny Vanegas**
Universidad del Valle
s.a.rit@hotmail.com, jorbis777@hotmail.com

Investigaciones realizadas en las últimas décadas han dado lugar a la aparición de visiones renovadas de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, reconocibles en los replanteamientos de contenidos temáticos y procesos matemáticos. De esta manera, se reconocen las grandes posibilidades que tiene la introducción de temáticas como la *teoría de grafos* y temáticas de la *geometría del espacio* en el marco de la integración de los procesos de resolución de problemas y modelación matemática en las clases de geometría. La presente propuesta de comunicación breve busca ilustrar esta conexión a partir de una serie de *actividades experimentales* dirigidas a promover la exploración, la conjeturación y la validación de ciertas propiedades matemáticas.

INTRODUCCIÓN

Los *sólidos platónicos* son objetos matemáticos de especial significación en la historia de las matemáticas desde su aparición en la Grecia clásica. Se señala que fue Euclides quien los formalizó y consagró como elementos matemáticos, proponiendo en el Libro XIII construcciones de los mismos (proposiciones 13 a 17), inscribiéndolos en la esfera y argumentando que existen sólo cinco sólidos platónicos (Quesada, 2006). Desde esa época se los asocia a algunos aspectos y fenómenos de la vida real, idea que trascenderá en el tiempo y que dará lugar a una presencia particular en la ciencia, la religión, las artes y la tecnología.

El estudio de estos poliedros en la escuela se enmarca regularmente en la enseñanza de la *geometría del espacio*, campo que infortunadamente ocupa aún un espacio marginal en la escuela. Lo paradójico de esta situación es que se considera como un contenido temático de gran potencial para el trabajo en distintos niveles de escolaridad (Nouche, s.f.) puesto que puede asociarse al desarrollo de diversas habilidades y competencias matemáticas en relación con el

Henao, S. y Vanegas, J. (2011). Sólidos platónicos y teoría de grafos en las clases de geometría. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 221-227). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

estudio de distintos tipos de pensamiento matemático como el espacial, el variacional y, por supuesto, el geométrico.

Por su parte, la *teoría de grafos* es considerada como uno de los diversos temas matemáticos que han empezado a ser "revisitados" por parte de investigadores y educadores en didáctica de las matemáticas, desde la perspectiva de procesos matemáticos como la resolución de problemas y la modelación matemática hasta la posibilidad de su integración a través de juegos durante las clases de matemáticas.

En cuanto concierne a este último asunto, algunos elementos de la *teoría de grafos* se revelan potencialmente útiles para el estudio de *juegos de estrategia*. Se plantea por ejemplo, que es posible identificar un *modelo matemático* basado en la *teoría de grafos* para algunos juegos de este tipo, identificando estrategias ganadoras y tratando de generalizarlas para otros juegos que puedan modelar de la misma manera (Novo y Méndez, 2004).

ALGUNOS REFERENTES TEÓRICOS

La *teoría de grafos* tiene una interesante conexión con la geometría; de hecho, se la suele considerar como parte de la denominada *geometría cualitativa* que a su vez se inscribe en el campo de la matemática discreta. Este último es un campo que se considera de especial proyección en las tendencias innovadoras en Educación Matemática.

Se suele considerar que la *teoría de grafos* no requiere de grandes conocimientos matemáticos previos y permite el desarrollo de estrategias que apuntan a favorecer un buen desempeño en la resolución de problemas (Nouche, s.f.).

También se reconoce que *la teoría de grafos* es una herramienta matemática potente que sirve para modelizar una diversa gama de problemas matemáticos, pero además que puede entenderse como un recurso que permite de manera eficaz estudiar algunas propiedades topológicas de los poliedros regulares, propiciando una aproximación experimental a algunos conceptos geométricos como la simetría, la rotación y la traslación de objetos.

De igual importancia es el complejo asunto de la visualización de objetos tridimensionales en dos dimensiones. Aquí es importante mencionar que pese a los esfuerzos por representar los *poliedros regulares* lo más aproximadamente posible a la realidad, es evidente que estas representaciones no son suficientes para caracterizar completamente el objeto matemático (Duval, 1999). Además la perspectiva que comúnmente se utiliza, como la proyección en el plano no permite ver eficientemente todas las caras, aristas y vértices del poliedro, mientras que la presentación de la gráfica plana (grafo) es suficiente para visualizar en su totalidad estos elementos.

Igualmente se destaca la posibilidad de vincular el estudio de *la teoría de grafos* al modelo de competencias, a partir del supuesto de que una aproximación intuitiva y experimental podría llevar a una mejor comprensión de propiedades geométricas de los *poliedros regulares*, constituyéndose en una alternativa metodológica para la enseñanza y el aprendizaje de estos objetos matemáticos, promoviendo la construcción en el estudiante de habilidades de resolución de problemas y modelación matemática.

Más aún, el potencial de la *teoría de grafos* en el ámbito de la educación matemática, suele asociarse con el campo de la matemática discreta y con la posibilidad que entraña de introducir nuevos contenidos temáticos vinculados a los procesos de modelización y resolución de problemas y nuevas formas de representación de la información.

En este sentido, el uso de los grafos como herramienta conceptual en la enseñanza de los polígonos desarrolla diferentes capacidades en el estudiante; específicamente, permite que los alumnos elaboren razonamientos alrededor de la matemática discreta a través de la intuición, exploración, descubrimiento y diseño de hipótesis, lo cual contribuye al desarrollo lógico y a la visión espacial del estudiante, así como a la formación de la intuición y el razonamiento abstracto; asimismo la utilización de esta herramienta permite un aprendizaje significativo para el estudiante ya que modeliza diferentes problemas y situaciones de la vida cotidiana que pueden ser solucionados por medio de los conocimientos que ofrece este concepto (Braicovich, s.f.).

Por otra parte, los grafos pueden ser utilizados como instrumento de modelización y representación de situaciones de la vida diaria. Un claro ejemplo de ello se visualiza en el problema de los puentes de Königsber solucionado por Euler en el siglo XVIII, en donde se plantea atravesar una ciudad compuesta por siete puentes de tal forma que sólo se pueda pasar una sola vez por cada puente llegando al mismo sitio en donde inició el paseo.

Así pues, los grafos constituyen una potente herramienta para la enseñanza y comprensión de conceptos matemáticos asociados a la geometría discreta, puesto que imprimen un significado real a los objetos matemáticos, además de que favorecen la comprensión, el aprendizaje y la construcción de nuevos conocimientos matemáticos a través de la resolución de problemas y la modelación matemática. Muestra de este interés se refleja en el hecho que la *teoría de grafos* sea un asunto de estudio de importantes publicaciones en didáctica de las matemáticas, como por ejemplo la revista SUMA (e.g., Espinel y Sobrón, 1992; Espinel, 1994; Menéndez, 1998; Novo y Méndez, 2004).

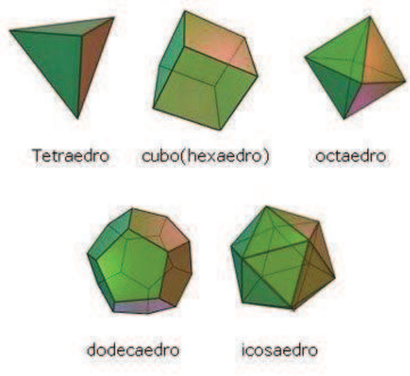
DISEÑO DE LA ACTIVIDAD

A continuación presentamos una de las situaciones que se esperan presentar durante la comunicación breve.

Ficha de los participantes

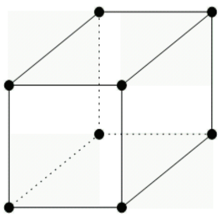
Los griegos fueron los primeros en considerar importante el estudio matemático de los poliedros; daban especial atención a cinco de ellos, los poliedros regulares (cuyas caras son polígonos regulares), pues pensaban que el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro, eran los componentes geométricos constituyentes de los elementos fundamentales (agua, fuego, tierra, aire, éter). El primero en hacer un tratamiento verdaderamente matemático es Euclides de Alejandría en su conocida obra los *Elementos*.

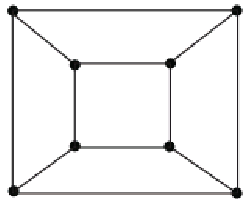
Conozcámoslos:



Estos poliedros (sólidos de Platón), y en general cualquier poliedro convexo está caracterizado por una relación particular entre número de caras, vértices y aristas, conocida como la Fórmula de Euler. El ejercicio que se propone a continuación le permitirá descubrirla, pero primero veamos un ejemplo. El cubo es un poliedro regular de seis caras (C=6), ocho vértices (V=8) y doce aristas (A=12).

Pensemos en un momento, ¿qué sucede si aplanamos el cubo, de tal forma que no haya intersección entre sus aristas? Como es lógico, el número de aristas permanecería constante y, por tanto, también el numero de vértices, aunque el número de caras se reduciría. ¿Por qué? Veamos:

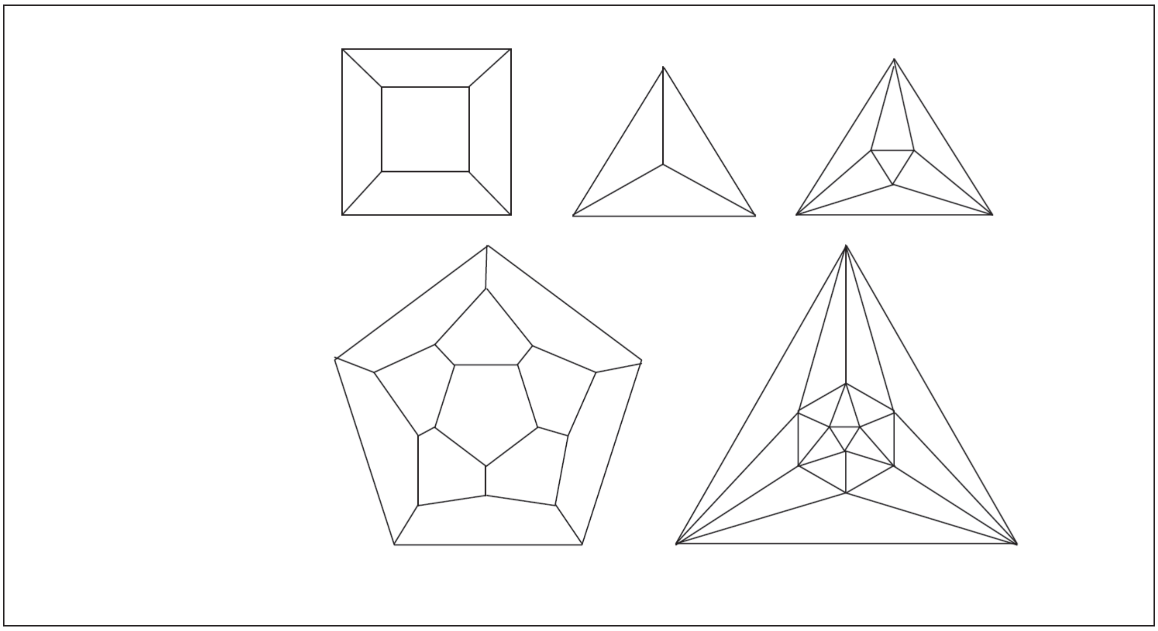




Realizar el mismo procedimiento con los restantes poliedros regulares, facilitaría la búsqueda del número de caras, vértices y aristas, además de promover el descubrimiento de otras relaciones más generales. ¿Cuáles?

Actividad

1) Utilice las siguientes gráficas planas o grafos e identifique a qué tipo de poliedro pertenece y complete la tabla.



Poliedro regular plano	Caras (C)	Vértices (V)	Aristas (A)	Valor de C+V-A
Tetraedro				
Hexaedro				
Octaedro				
Dodecaedro				
Icosaedro				

Ahora, establezca una conjetura concerniente al valor de C+V-A para todo poliedro convexo. Este resultado se conoce como **Fórmula de Euler**.

2) Considere el grafo del cubo (Figura 1), si definimos el ***grado de un vértice*** como el número de aristas que inciden en él, es claro que la suma de todos los grados de los vértices es proporcional al número de sus aristas. Compruébelo.

a) De acuerdo a los resultados obtenidos en el numeral 1), ¿qué relación existe entre el número de aristas de los grafos y la sumatoria de los grados de sus vértices?

b) ¿Qué se puede decir del número de vértices de grado impar, en estos grafos?

3) Una forma interesante de representar los cinco sólidos platónicos es utilizando el símbolo de Schläfli = $\{p, q\}$ donde p es el número de lados de cada cara y q es el número de aristas que llegan a cada vértice.

Descubra el símbolo de Schläfli para cada uno de los poliedros regulares.

4) En un poliedro regular cada arista une dos vértices y tiene dos caras adyacentes, así que:

$$pC = 2A = qV \qquad \text{donde} \quad \begin{cases} C = \text{número de caras} \\ A = \text{número de aristas} \\ V = \text{número de vértices} \end{cases}$$

Utilizando este resultado y la Fórmula de Euler para poliedros regulares, demuestre que en efecto existen únicamente cinco sólidos platónicos. (Sugerencia: utilice el resultado de que p y q valen por lo menos 3).

REFERENCIAS

Braicovich, T. (s.f.). *Grafos y su potencial educativo.* Documento para un curso de la Universidad Nacional del Comahue, Argentina. Recuperado el 6 de mayo de 2011, de: http://ebookbrowse.com/curso-extenso-grafos-y-su-potencial-educativo-braicovich-1-pdf-d108850619

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano.* (Traducido del francés por Myriam Vega). Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Espinel, M. (1994). El lenguaje de los grafos en los problemas de comunicación. *SUMA*, 18, 32-38.

Espinel, M. y Sobrón, M. (1992). Grafos a través de juegos. *SUMA*, 11-12, 88-94.

Menéndez, A. (1998). Una breve introducción a la teoría de grafos, *SUMA*, 27, 11-26.

Nouche, F. (s.f.). *Teoría de grafos: propuesta para escuela secundaria.* Recuperado el 20 de marzo de 2011, de: http://www.soarem.org.ar/Documentos/39%20Nouche.pdf

Novo, E. y Méndez, A. (2004). Aplicaciones de la teoría de grafos a algunos juegos de estrategia. *SUMA*, 46, 31-35.

Quesada, C. (2006). *Sólidos platónicos.* Recuperado el 20 de marzo de 2011, de: http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Los%20solidos%20platonicos.pdf