Concepción de área en estudiantes de grado sexto

Danny Jovel y Milton Rodríguez
Universidad del Tolima
danny9480@hotmail.com, milrod33@yahoo.com

El presente Trabajo identificará la concepción del concepto de área que poseen los estudiantes de grado sexto. Este estudio nace como respuesta a los escasos conocimientos geométricos, en particular sobre áreas, que hemos observado en los escolares. Hacemos un acercamiento a través de teorías como las de Artigue, Vinner, la EMR y el Modelo Van Hiele. Clasificamos el conocimiento en tres clases (*formal*, *curricular* y *personal*). Particularmente, el conocimiento personal está referido al estudiante, que es nuestro objetivo. La metodología parte de la premisa que el alumno tiene una concepción sobre los conceptos matemáticos, manifestada en la forma como aborda los problemas y justifica sus procedimientos o afirmaciones relacionados con el concepto.

El concepto de área es uno de los más básicos y profundos de las matemáticas (Freudenthal, 1983, citado por Turégano, 1989) y su aprendizaje es "un proceso complejo que no puede de ser adquirido inmediatamente" (Carbó, Mántica y Saucedo, 2007). Exige un alto grado de conceptualización tanto de orden geométrico como aritmético (Chamorro, 2003); ahí está la fuente de la mayoría de obstáculos y dificultades que a menudo presentan los estudiantes. Además, el concepto de área es de nivel cognoscitivo superior al de longitud y su apropiación conlleva grandes retos didácticos (Turégano, 1989).

Muchos docentes creen que los estudiantes ante una tarea fundamentan sus juicios en definiciones formales de conceptos; pero las investigaciones (Vinner, 1991) muestran que cuando el alumno enfrenta un problema, no utiliza definiciones, sino que realmente evoca la *concepción* que tiene de ellos. Por esto nos preguntamos ¿cuál es la concepción del concepto de área que tienen los estudiantes? Nos centraremos en alumnos de grado sexto.

La formación de conceptos

Muchos autores en Educación Matemática han contribuido con teorías sobre la "formación de conceptos" (e.g., Skemp, 1980; Tall y Vinner, 1981; Vinner y Dreyfus, 1989; Artigue, 1990; Vergnaud, 1990; Vinner, 1991; Godino y Batanero, 1994; Sotos, 2004; D'Amore, 2001; Turégano, 2006).

Jovel, D. y Rodríguez, M. (2011). Concepción de área en estudiantes de grado sexto. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 229-236). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Tall y Vinner (1981, citado por Jaime, 1995) distinguen entre el concepto como conocimiento de los matemáticos y como conocimiento de quien lo aprende; este último lo denominan *imagen del concepto*. Por su parte, Artigue (1990, citado por Azcárate, 1995) hace la misma distinción pero denomina "concepción" al concepto del aprendiz. Hemos observado diferencias entre el conocimiento del 'matemático' y el del estudiante. En este estudio consideramos tres tipos de conocimientos asociados a un concepto matemático: formal, curricular y personal. El *conocimiento formal* es aquel que, durante la historia de la matemática, han producido los matemáticos sobre el concepto. El *conocimiento curricular* es el conocimiento formal de un concepto matemático, transformado para ser enseñado. Y el *conocimiento personal* es aquel que de un concepto matemático tiene una persona que lo aprende.

Componentes de un concepto

Un concepto tiene atributos relevantes e irrelevantes (Tall y Vinner, 1981, citado en Turégano, 2006). Los *atributos relevantes* son las propiedades que definen el concepto, mientras que los *atributos irrelevantes* son características no necesarias para el concepto (sólo diferencian ejemplos). Artigue (1990, citada por Azcárate, 1995) precisa componentes para un concepto, que llamaremos: definiciones, problemas, representaciones, teoría y procedimientos.

En matemáticas, las definiciones son uno de los componentes de un concepto, y sólo tienen atributos relevantes. En la imagen del concepto, cuando existen definiciones, además de atributos relevantes, ellas pueden contener atributos irrelevantes. En la actividad de los estudiantes se puede reconocer la presencia de atributos relevantes o irrelevantes cuando ellos realizan, identifican o usan ejemplos y contraejemplos. Para ilustrar cambios en atributos de la definición de un concepto enunciaremos una definición formal y una curricular de área.

Definición formal de área. Apostol (1984) introduce el concepto de área mediante seis axiomas, partiendo de una clase M de conjuntos del plano medibles y una función a de dominio M. Toma conjuntos S y T de M, indicando que $S \cup T$, $S \cap T$ y $T - S$ están en M, estableciendo que: Para todo S, $a(S) \geq 0$; si $S \cong T$ entonces $a(S) = a(T)$; si S es rectángulo de lados h y k, entonces $a(S) = hk$; sea $Q \in M \middle| S \subseteq Q \subseteq T$ (1), si existe uno y sólo un número $c \middle| a(S) \leq c \leq a(T)$ para todo S y T que satisfagan (1), entonces Q es medible y $a(Q) = c$. Además, $a(S \cup T) = a(S) + a(T) - a(S \cap T)$ y $a(T - S) = a(T) - a(S)$.

Definición curricular de área. En Gordillo (2006, p. 134) se lee: "Una línea cerrada determina dos regiones, la interior y la exterior. La medida de la región interior es el área. Calcular el área es hallar la medida de la superficie encerrada por la frontera". El área, en tal texto escolar, es la medida de la región interior a una línea cerrada.

Nótese que área como concepto formal es un concepto primitivo cuyos atributos se introducen mediante axiomas en cuya formulación entran conceptos, como el de función. Área como concepto curricular no es un concepto primitivo; se define mediante otros conceptos, como el de *región del plano*. En este caso, además de cambios en los atributos, también hay cambio en la naturaleza del concepto.

CONOCIMIENTO PERSONAL DE UN CONCEPTO GEOMÉTRICO

El modelo de van Hiele. Este modelo, referente teórico para propuestas curriculares de geometría, consta de tres partes: niveles de razonamiento, fases de aprendizaje y propiedades. Según Jaime (1995), los niveles de razonamiento se pueden entender como maneras distintas de comprender un concepto geométrico. Como el modelo consta de cinco niveles de razonamiento, existen cinco maneras distintas de comprender el concepto, y de su comprensión harían parte, como mínimo, procesos como definir, clasificar, representar, demostrar y, plantear y resolver problemas.

La Educación Matemática Realista (EMR). Para Alsina (2009), la EMR es una propuesta de enseñanza y aprendizaje de la matemática que ha organizado sus elementos teóricos a partir de interrogantes como, por ejemplo, qué es la matemática, cómo y qué se enseña, cómo, cuándo y con quién se aprende[1]. Todo se organiza en seis principios: de actividad, de realidad, de niveles, de reinvención guiada, de interacción y de interconexión.

Tanto en los niveles de van Hiele como en los propuestos por la EMR hay un nivel inicial y otro final. El nivel inicial (nivel 1 para van Hiele y nivel situacional para la EMR) corresponde a lo que tiene sentido para un estudiante en relación a un concepto, lo que sabe y ha aprendido –conocimiento personal– dentro y fuera del salón. En el nivel final (nivel 4 para van Hiele y nivel formal para la EMR) también coinciden ambas propuestas. Una enseñanza ade-

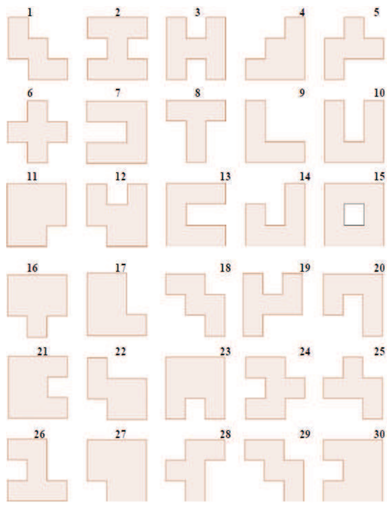
[1] Ver otras presentaciones de la EMR en Bressan, Zalkower y Gallego (2005) y Goffree (2000).

cuada (las fases de aprendizaje para van Hiele y los seis principios para la EMR) permitirá avanzar del nivel inicial al final[2].

METODOLOGÍA

Se estudia la concepción de área en estudiantes de un curso de grado sexto de la Institución Educativa El Jardín, colegio urbano de estrato dos de Ibagué. La Institución consta de tres sedes que atienden aproximadamente 2.200 estudiantes; la tasa de mortalidad en bachillerato es aproximadamente de 25% y para el año 2010, los resultados en las pruebas ICFES estuvieron entre 40 y 60 puntos. El curso tenía 48 estudiantes, 23 hombres y 25 mujeres, con edad promedio de 12 años. La investigación es de tipo cualitativo. Se hizo un estudio de casos seleccionando dos estudiantes para profundizar en el análisis de la información, para comprender cómo piensa y razona un estudiante.

Instrumento aplicado



Instrumento para la captación de atributos relevantes en el concepto de área

Teniendo en cuenta los componentes de un concepto según Vinner y la definición formal de área (Apostol, 1984) se aplicó un cuestionario cuyo objetivo era indagar si los estudiantes al clasificar y comparar figuras encontraban atributos relevantes para este concepto. A través de las instrucciones dadas se solicitó clasificar todas las figuras bajo un solo atributo, esperando que fuera re-

[2] Enseñanza, que para el caso de la educación colombiana, se tienen once años (cinco de primaria y seis de secundaria) para completar los cuatro niveles de comprensión de cualquier concepto matemático.

levante en la definición de área. No se esperaba que subdividieran cada figura en unidades de superficie de forma cuadrada, por ejemplo, que dijeran que las figuras 2 y 3 son de igual tamaño por tener siete cuadrados unidad; en cambio se esperaba que, por ejemplo, concluyeran que dichas figuras tenían el mismo tamaño porque eran resultado de una rotación, lo cual equivaldría a la congruencia por rotación en la definición de área de Apostol (1984).

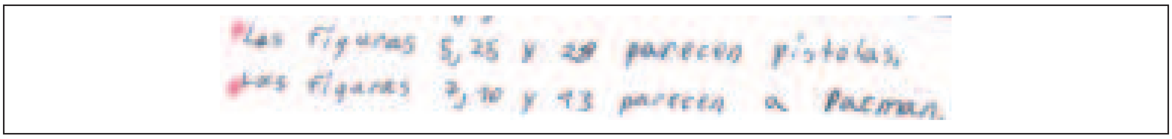
RESULTADOS

La prueba se entregó a los estudiantes en el primer bloque de clase de la mañana, dándoles hora y media para contestarla. Ese día faltaron a clase nueve estudiantes, por lo cual la prueba fue aplicada sólo a 39 de los 48 jóvenes. Los estudiantes rotularon la hoja entregada con el número de pupitre que, normalmente, tiene asignado en el salón y cada uno presentó las figuras pintadas según sus propuestas de clasificación. Dos alumnos realizaron la clasificación de las figuras bajo un solo criterio, mientras que los demás emplearon varios criterios. A continuación se analizan las respuestas de dos estudiantes.

Alumno 47

Este alumno construyó nueve grupos de figuras, y los criterios de clasificación establecidos por él, estaban relacionados en cierta medida con su cotidianidad.

Utilizó en algunos casos términos de su diario vivir así: "escaleras", "números", "letras del abecedario", "pistolas" y "Pacman". Se refirió a algunas propiedades geométricas con palabras como "misma medida y forma", "rectángulos con un cuadrado salido" y "tienen un hueco y tres cuadrados salidos".



Reconoce en su clasificación la propiedad *congruencia*, hecho que se puede evidenciar cuando usa la expresión "tienen la misma medida y forma" refiriéndose a dos grupos de figuras (21, 23 y 30; 11 y 27); hace tal reconocimiento pese a que las figuras están rotadas. En sus afirmaciones no menciona explícitamente términos relacionados con rotación, pero es claro que identifica la congruencia. De igual manera reconoce la propiedad *aditividad* cuando dice "son rectángulos con un cuadrado salido" (figuras 16 y 17). En este caso, el estudiante está reconociendo que cada una de estas figuras se obtiene a partir de un "rectángulo" al que se le agrega un "cuadrado"; alude a la aditividad cuando dice que está "salido", dando a entender que al cuadrado se le debe agregar el rectángulo. De nuevo, reconoce la propiedad *aditividad* cuando dice "3 cuadrados salidos" (figuras 19 y 24). También deja entrever que reconoce la propiedad de la diferencia cuando menciona que estas figuras "tienen un hueco", con lo que indica que ese "hueco" se le debe quitar a la superficie.

Alumno 45

Esta estudiante construyó 8 grupos, estableciendo diferentes criterios de clasificación guiándose por la forma o parecido de las figuras. Establece una convención de colores para nombrar los grupos haciendo referencia a otros atributos relevantes para ella, que destacamos porque son importantes en la identificación de propiedades geométricas relacionadas con el concepto de área. Resaltamos que en cada grupo la estudiante identificó el número de lados de las figuras. A continuación destacamos los siguientes criterios:

Número de lados: de color morado destaca diez figuras que tienen "8 lados" (figuras 4, 7, 8, 10, 13, 14 15, 16, 20 y 22), con color rojo destaca 7 figuras que tienen estrictamente "12 lados" (figuras 2, 3, 6, 12, 19, 24, 26).

Objetos de la vida cotidiana: "Números" (figuras 24 y 26), ella reconoce que las dos figuras son números pero no explicita ningún tipo de congruencia.

"*Parecido*": Pinta con color verde oscuro (figuras 9 y 17), aquí se puede ver un aspecto relevante para ella, pero que, en primera instancia, no lo habíamos considerado importante porque no percibimos mucho parecido.

Propiedades geométricas: Se podrían ver cuatro grupos de figuras dado que la estudiante reconoce la misma figura en distinta posición, cuando alude a algunas de estas propiedades que se detallan a continuación.

Se puede entrever en esta alumna el reconocimiento de la congruencia por rotación Por ejemplo, pinta un grupo de figuras en color amarillo (figuras 1, 18 y 29) diciendo "son la misma figura", aquí se puede visualizar que la niña reconoce la propiedad de la congruencia. Además, observa que todas las figuras de este conjunto tienen diez lados. También reconoce la congruencia en las figuras que pinta de color violeta (figuras 5, 20 y 28) donde vuelve a afirmar que "son la misma figura", identifica en ellos 10 lados. Igual ocurre con un grupo que pintó de color verde oscuro (figuras 11 y 27):

Particularmente, en un grupo que pintó de color azul (figuras 21, 23 y 30) no sólo dijo que eran "las mismas figuras" sino que agregó que estaban "desacomodadas", este último término llama la atención porque parece estar referido a la rotación de figuras. Es de resaltar que, a diferencia de los grupos anteriores, en este último se hace alusión a la propiedad de congruencia por rotación que posee el área (Apostol, 1984).

Con respecto a la formación de conceptos matemáticos, se puede concluir que: Un concepto matemático no es únicamente su definición, consta de otros elementos; para ser enseñado, un concepto matemático sufre transformaciones didácticas; la comprensión de un concepto implica un mínimo de procesos del pensamiento matemático; su comprensión no se alcanza de un momento a otro, en un curso y de cualquier manera; además, en la enseñanza de un concepto, se debe tener en cuenta la naturaleza descontextualizada del conocimiento formal y la contextualizada del conocimiento personal.

REFERENCIAS

Alsina, A. (2009) El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en educación matemática a la formación del profesorado. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 119-127). Santander, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Apostol, T. (1984). *Calculus.* (Volumen I.) España: Reverté.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2-3), 241-286.

Azcárate, C. (1995) Sistemas de representación. *UNO*, 4, 53-61.

Bressan, A., Zolkower, B. y Gallego, M. (2005). Los principios de la Educación Matemática Realista. En H. Alagia, A. Bressan y P. Sadovsky (Eds.), *Reflexiones teóricas para la educación matemática* (pp. 69-98). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Carbó, A., Mantica, A. y Saucedo, G. (2007). La construcción del concepto de área: un proceso complejo. *Revista Novedades Educativas*, 195, 72-79.

Chamorro, M.C. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid, España: Prentice Hall.

D'Amore, B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. La posición "ingenua" en una teoría "realista" "versus" el modelo "antropológico" en una teoría "pragmática". *UNO*, 27, 51-76.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(3), 325- 355.

Goffree, F. (2000). Principios y paradigmas de una "Educación Matemática Realista". En N. Gorgorió, J. Deulofeu y A. Bishop (Coords.). *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 151-168). Barcelona, España: Grao.

Gordillo, J.A. (2006). *Ingenio Matemático 6*. Bogotá, Colombia: Voluntad.

Jaime, A. (1995). Vinner y la formación de conceptos. En Á. Gutiérrez y A. Jaime, *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática*. México: "una empresa docente" y Grupo Editorial Iberoamérica.

Skemp, R. (1980*). Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid, España: Morata.

Sotos, M. (2004). ¿En qué piensa el alumnado cuando decimos número? *UNO*, 37, 93-104.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Turégano, P. (1989). Propuesta metodológica para tratar de subsanar las dificultades didácticas y teóricas que se observan en la adquisición del concepto cualitativo del área. *Ensayos*, 3, 235-255. Disponible en: http://www.uclm.es/ab/educacion/ensayos/

Turégano, P. (2006). Una interpretación en la formación de conceptos y su aplicación en el aula. *Ensayos*, 21, 35-48. Disponible en: http://www.uclm.es/ab/educacion/ensayos/

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2-3), 133-170.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.

Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. Journal for *Research in Mathematics Education, 20*(4), 356-366.