

APROXIMACIÓN A LAS CONCEPCIONES DE DEMOSTRACIÓN DE ALGUNOS PROFESORES UNIVERSITARIOS DE MATEMÁTICAS

Tatiana Ospina¹, Tania Plazas¹ y Carmen Samper²

Universidad Pedagógica Nacional

tatiana.ospina.usaquen@gmail.com, tania.plazas@gmail.com, csamper@pedagogica.edu.co

Se han identificado diferentes funciones de la demostración y reconocerlas influye en el concepto que los futuros docentes de matemáticas desarrollen de ésta. Como ello depende, en gran medida, de las concepciones que los profesores de matemáticas, de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), tengan al respecto de dicha actividad matemática, es de interés determinar cuáles son esas concepciones. Para aproximarnos a las concepciones de los profesores, identificamos diferencias y similitudes entre éstas, basándonos en las funciones que el profesor asigna a la demostración.

A continuación se presenta un reporte de un estudio de tipo exploratorio, que realizamos como tema del trabajo de grado para la Licenciatura en Matemáticas. Se pretendía caracterizar las visiones que tienen algunos docentes del Departamento de Matemáticas de la UPN sobre la actividad matemática de demostrar.

MARCO DE REFERENCIA

Godino y Recio (2001), presentan tres visiones para la demostración, que se esbozan a continuación.

La demostración vista desde la lógica

Bajo este punto de vista, la demostración está sujeta a un sistema axiomático y al pensamiento formal deductivo. La demostración consiste entonces en la construcción de una justificación, a partir de unas premisas (axiomas y postulados), de teoremas y definiciones usando las reglas de la lógica formal. Los teoremas que se incorporan al sistema axiomático son considerados válidos en toda teoría matemática, sin importar el contexto de las proposiciones que

¹ Estudiante de Maestría en Docencia de las Matemáticas.

² Profesora titular.

componen el teorema, ya que están ligados a la validez de las reglas de la lógica. Por ejemplo, $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ es un teorema de toda teoría matemática que se base en la lógica bivalente usual. En este caso, la demostración se reduce a ser una actividad algorítmica que no involucra contexto alguno.

La demostración vista desde los demás campos de la matemática

La demostración está ligada a un sistema axiomático con un contexto teórico definido y al pensamiento formal deductivo. Esta visión sitúa la demostración en un contexto donde el centro no es el análisis sintáctico de las proposiciones, es decir su composición lógica, sino que se enfoca principalmente en las interpretaciones matemáticas que asumen las proposiciones dentro de una teoría. Las demostraciones en sí son, de cierta forma, subjetivas porque dependen de la visión que tenga la persona sobre las funciones de la demostración. Los teoremas pierden el carácter de verdad absoluta porque dependen del sistema axiomático y de la aceptabilidad de la demostración dentro de una comunidad específica.

La demostración vista desde la educación matemática

Hablar de la demostración desde la educación matemática implica la generación de discusiones sobre el papel de ésta en la formación matemática de un individuo, siendo éste el aspecto que nos ofrece algunos referentes teóricos para el posterior análisis de las visiones de los profesores acerca de la demostración.

La demostración en la enseñanza

Respecto al propósito de una demostración en la labor del maestro en el aula de clase, Recio (2001) sugiere dos situaciones. (1) La demostración es parte del contrato didáctico establecido en la clase; es decir, los estudiantes no aceptan proposición alguna sin su demostración inmediata, haciendo que las proposiciones no demostradas pasen a un segundo nivel, o que se conviertan en parte de la siguiente situación. (2) La demostración es un modelo para entrenar al estudiante, esto es, el profesor considera importante que el estudiante conozca las demostraciones de las proposiciones que se enuncian, las analicen y las comprendan pues es así como aprenden a demostrar.

La enseñanza de la demostración

Éste es uno de los temas de interés de educadores matemáticos. Existen diferentes ideas en torno a cómo debe ser el proceso de enseñanza. Generalmente, los profesores proveen a sus estudiantes una visión limitada de qué es demostrar, pues esa actividad en sus clases se reduce a realizar ejemplos de demostraciones que los estudiantes deben entender y replicar (Recio, 2001). Como lo expresan algunos autores, existe la necesidad de transformar el paradigma que tienen muchos profesores respecto a la demostración:

La idea común formalista de muchos profesores de matemáticas de que la convicción es una cartografía monocromática de la demostración deductiva (esto es: una función biyectiva) debe ser, por tanto, completamente abandonada; la convicción no se consigue exclusivamente con la demostración ni es la verificación/convicción la única función de la demostración. (de Villiers, 1993, p. 27)

Pensar en las funciones de la demostración es reflexionar sobre los aportes de la misma en la formación de un individuo. En el análisis para aproximarnos a la concepción de la demostración que tienen los profesores, se tendrán en cuenta los aportes que de Villiers (1993) ofrece en relación con las funciones de la demostración. Este autor destaca cinco funciones principales:

- Verificación/convicción, que tiene como objetivo obtener certeza de un teorema y convencer a los pares y a uno mismo de ésta. Esta función exige demostraciones formales y completas, cuando se trata de un grupo de expertos.
- Descubrimiento, que tiene como objetivo encontrar nuevos teoremas a partir de deducciones de otros, como ha sucedido históricamente.
- Sistematización, que atiende a la organización de los axiomas, definiciones y teoremas dentro de una teoría. Tiene las siguientes intenciones: identificar inconsistencias, integrar los teoremas y definiciones, dar lugar a nuevos sistemas axiomáticos, permitir coherencia y unificación de los resultados.
- Explicación, que busca proveer el por qué la proposición es verdadera y que el individuo comprenda mejor el objeto matemático involucrado. Usualmente esta función cobra importancia cuando se piensa en la demostración en la formación matemática de un individuo.

- Comunicación, que busca difundir resultados matemáticos entre personas de una misma comunidad. Por lo tanto, es una actividad social que estipula ciertas normas para que el proceso comunicativo sea óptimo. Permite vislumbrar las demás funciones de la demostración.

La visión de la demostración que ofrece el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$) de la UPN resalta que la demostración es medio de descubrimiento, comunicación, explicación y sistematización. (Camargo, Samper y Perry, 2006) El grupo propone el constructo *actividad demostrativa*, según el cual ésta se compone de dos procesos: (1) construcción de conjeturas y (2) producción de justificaciones. El primer proceso incluye acciones como la visualización, exploración, generalización y verificación para poder establecer conjeturas. El segundo proceso se centra en la justificación a través de una explicación, prueba o demostración formal. La actividad demostrativa tiene como fin descubrir hechos geométricos, propiciar mejor comprensión de la propiedad y el objeto matemático trabajado, y proveer elementos para la construcción de una justificación.

METODOLOGÍA

La población de estudio fueron once profesores del Departamento de Matemáticas de la UPN, que tenían a cargo cursos de matemáticas en el segundo semestre de 2008 y primero de 2009, dirigidos a estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas.

La recolección de información se realizó en dos fases. La primera fase fue una entrevista de ocho preguntas que se le hizo a cada profesor. A continuación se presenta cada pregunta junto con las razones por las cuales se formuló.

Pregunta	Propósito
¿Qué es demostrar? ¿Es importante la demostración en matemáticas? ¿Por qué?	Lograr una aproximación a lo que consideran como demostración, desde su formación matemática.
¿Cuál es el papel de la demostración en el aprendizaje de las matemáticas?	Evidenciar si diferencian entre lo que es la demostración para los matemáticos y lo que es la demostración en el proceso de aprender matemáticas.
¿Cómo cree que un estudiante aprende	Determinar si reconocen la problemática asociada al aprendizaje de la demostración y si tienen

a demostrar? ¿Es posible enseñar a demostrar? ¿Cómo lo hace usted?	una propuesta didáctica para abordar el proceso de aprender a demostrar.
¿Es importante la demostración en la formación de un maestro? ¿Por qué? ¿Considera usted que la demostración se debe llevar a nivel escolar? ¿Cómo se debe implementar la demostración en este nivel?	Establecer la visión que tiene de la demostración en la educación matemática de los individuos, y el papel que juega un maestro en propiciar habilidades que están ligadas a la demostración, a nivel escolar.
¿Existe alguna diferencia entre demostrar en álgebra, demostrar en geometría y demostrar en cálculo?	Evidenciar mayor amplitud de su visión acerca de la demostración, dado que podían asignarle diferentes funciones según el campo teórico en el que se realiza la demostración.
Tabla 1. Entrevista	

La segunda fase fue un registro audiovisual de una clase en la cual se realizó alguna demostración, de tres de los profesores, uno de álgebra, uno de cálculo y uno de geometría. Para el análisis de este registro se tuvieron en cuenta ocho aspectos relacionados con la gestión del profesor durante el proceso de demostración. Éstos se presentan a continuación acompañados del propósito correspondiente.

Aspectos	Propósito
Deja participar a los estudiantes en la construcción de demostraciones.	Evidenciar su visión del papel de la demostración en la educación matemática de un individuo.
Indaga para propiciar participación de estudiantes con ideas para la demostración.	Establecer las ideas que tiene sobre lo que es aprender y enseñar a demostrar.
Busca la comprensión de los estudiantes presentando ejemplos o contraejemplos antes de demostrar el teorema.	Determinar el papel que le asigna a la demostración en el aprendizaje de las matemáticas.
Usa expresiones que se refieren a la demostración como validación/convicción. Usa expresiones que se refieren a la demostración para la sistematización. Usa expresiones que se refieren a la demostración para la comprensión o realiza accio-	Capturar la información que permita evidenciar las funciones que le otorga a la demostración en su práctica docente.

nes a través de las cuales se entrevé que considera la demostración elemento para la comprensión/explicación. Da lugar a un espacio de actividad previa para investigar una situación que lleve al descubrimiento del teorema a demostrar.	
Problematiza el teorema a demostrar con el fin de generar discusiones en torno a éste.	Observar estrategias didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de la demostración.
Muestra interés en la refinación y rigurosidad de la demostración.	Evidenciar el papel que le asigna a la demostración desde la educación matemática.

Tabla 2. Registro audiovisual

ANÁLISIS

Se realizó el análisis de la entrevista que permitió categorizar a los docentes entrevistados, teniendo en cuenta las funciones que en ésta le asignan a la demostración y las ideas que proveen de cómo se enseña y se aprende a demostrar. Se establecieron tres categorías.

Tipo A

Corresponde a la visión de los docentes que le asignan a la demostración únicamente la función tradicional de verificación/convicción. Ellos consideran que un individuo aprende a demostrar haciendo demostraciones o repitiéndolas. Las demostraciones en el aula de clase hacen parte esencial del contrato didáctico. Sin embargo, no se percibe que tengan interés en realizar actividades que motiven a los estudiantes a producir y entender las demostraciones; es decir, la demostración se convierte en un trabajo personal del estudiante quien trata de imitar los ejemplos que el docente provee.

Tipo B

Es la visión de aquellos docentes que le asignan a la demostración todas las funciones mencionadas por de Villiers (1993). Estos docentes consideran que los estudiantes aprenden a demostrar a través de procesos de exploración, conjeturación y justificación. Además, como de Villiers (1993) lo menciona, al reconocer la función de explicación /comprensión ligada a la de descubrimiento, expresan su interés en que la actividad que realiza el estudiante resulte sig-

nificativa para ellos. Sus visiones de la demostración coinciden con la *actividad demostrativa* propuesta por el grupo de investigación $\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$. Además reconocen la demostración como parte esencial del contrato didáctico; buscan generar el interés en los estudiantes por la demostración. Consideran que la importancia de realizarlas no está en presentarla de manera completa sino en cómo se construye.

Tipo C

Es la visión de los docentes que reconocen la función de verificación/convicción como la principal de la demostración pero también le asignan una o dos funciones más. Sin embargo, el hecho de que reconozcan otras funciones no lleva a pensar que su idea de demostración coincida con la *actividad demostrativa*. Algunos de ellos reconocen que se deben generar procesos de exploración y conjeturación para acceder a la justificación, pero no tienen en cuenta que para llevar a cabo esto es necesario identificar las funciones de descubrimiento y explicación/comprensión como acciones simultáneas. Ellos también consideran la demostración como parte esencial del contrato didáctico, mas no se percibe algún interés en realizar actividades que motiven a los estudiantes a producir y entender las demostraciones.

Teniendo estas categorías, se realizó el análisis de los registros audiovisuales de los tres profesores. Dicho análisis llevó a modificar la primera clasificación que se tenía de los profesores pues lo que expresaron en la entrevista no coincidía, en algunos casos, con lo que hacían en la práctica.

CONCLUSIONES

- Es usual que todos los docentes identifiquen la demostración como medio para verificar la veracidad de una proposición matemática y/o convencer a individuos de la misma comunidad académica de ello.
- Como resultado del análisis de la información recogida, fue posible establecer tres tipos de docentes, agrupados de acuerdo con sus ideas respecto a la demostración.
- En el proceso realizado se evidenció que para determinar la visión que tiene un docente respecto a cualquier actividad matemática se requiere no solamente tener en cuenta las respuestas proferidas en una entrevista sino también observar su práctica en el aula. Con lo que hi-

timos no se puede determinar la concepción que tienen los docentes de la demostración. Únicamente se establece una aproximación a ésta.

- Dado el análisis y las conclusiones de este trabajo, surge como inquietud: Si el grupo de docentes que está formando a los estudiantes del Departamento de Matemáticas de la UPN tienen diferentes visiones en torno a la demostración, ¿cuáles son las visiones que tienen los estudiantes del Departamento respecto a dicha actividad? y ¿cómo afecta la formación matemática y didáctica de los futuros educadores matemáticos el hecho de que los docentes tengan diferentes visiones de la demostración?
- Este estudio nos permitió reconocer que nuestra concepción de la demostración coincide con lo descrito como categoría C, pues ésta promulga la actividad demostrativa. Surgió entonces otra inquietud: ¿será que podremos propiciar actividad demostrativa en nuestro quehacer docente a nivel escolar? Responderla es la meta de nuestro actual trabajo de maestría en Docencia de las Matemáticas en la UPN, siendo lo aquí expuesto un elemento del marco teórico que usaremos.

REFERENCIAS

- Camargo, L., Samper, C. y Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. *Lecturas Matemáticas*, volumen especial, 371-383.
- de Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, 26, 15-29.
- Godino, J. y Recio, A. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las ciencias*, 19(3), 405-414.
- Recio, T. (2001). *La mecánica de la demostración y la demostración mecánica*. Tomado de <http://www.uv.es/~didmat/angel/seiem.html>